Αριθμητική ολοκλήρωση

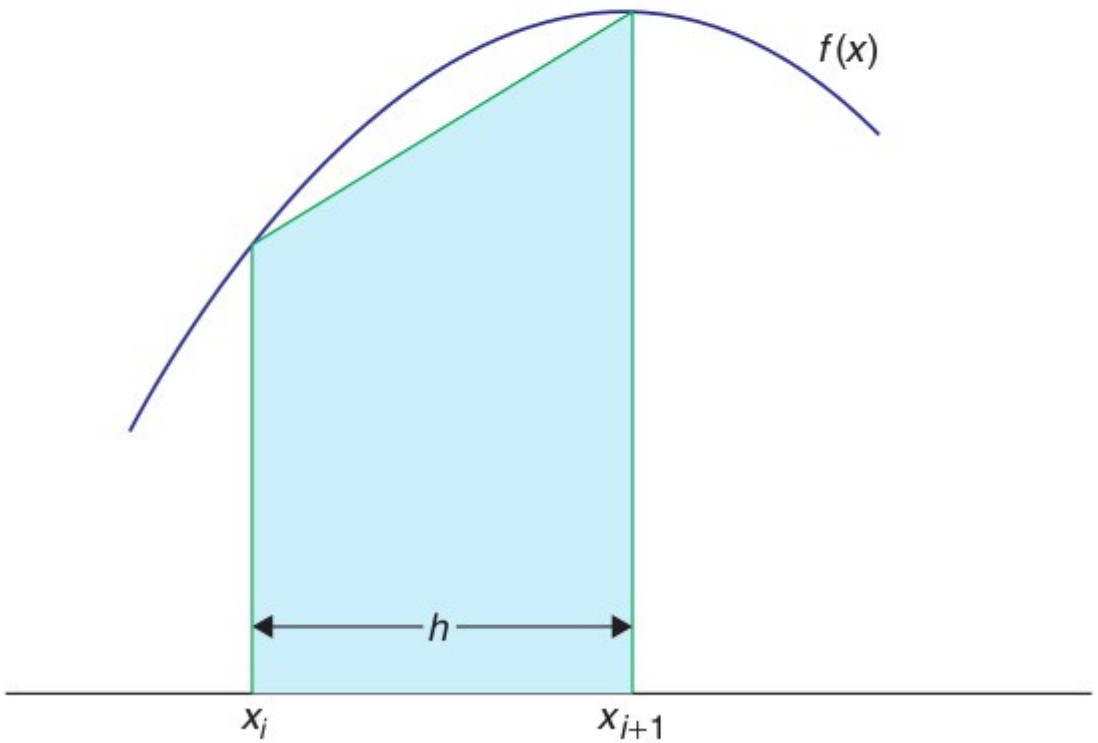
Ο Κανόνας των τραπεζίων

Το εμβαδό κάτω από την f(x) χωρίζεται σε οριζόντια τμήματα το καθένα με μήκος ίσο με h. Αν υπάρχουν n τέτοια τμήματα τότε n h = b-a δηλαδή n=(b-a)/n. Το εμβαδό S είναι το άθροισμα όλων των τραπεζίων

$$S = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right],$$

Όπου x_i = a+i h. Η παραπάνω εξίσωση είναι ο κανόνας των τραπεζίων και είναι μια προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Function M-file

```
function y = trap( fn, a, b, h )
n = (b-a)/h;
x = a + [1:n-1]*h;
y = sum(feval(fn, x));
y = h/2*(feval(fn, a) + feval(fn, b) + 2*y);
```

- Αντί για ένα loop χρησιμοποιούμε καλύτερα διανύσματα.
- Θα πρέπει να επιλέξουμε ένα h έτσι ώστε ο αριθμός των βημάτων n να είναι ακέραιος.

  Ως άσκηση ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της f(x)=x^3 στο διάστημα [0,4]. Θα καλέσουμε την συνάρτηση trap ως εξής:

  ```
  s = trap(@f, 0, 4, h);
  ```

- Δοκιμάστε με h=0.1 και h=0.01 και συγκρίνετε με την ακριβή τιμή

Ο κανόνας του Simpson

- Διαφέρει από τον κανόνα των τραπεζίων στο ότι αντί να ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα, σε τρία διαδοχικά σημεία παρεμβάλλουμε μια παραβολή. Για να είμαστε σίγουροι ότι υπάρχουν άρτιο το πλήθος τμήματα το βήμα h επιλέγεται έτσι ώστε να υπάρχουν 2n τμήματα δηλαδή n=(b-a)/(2h).

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right].$$

- Να υλοποιήσετε ένα function M-file που υπολογίζει αριθμητικά το ολοκλήρωμα με τον κανόνα του Simpson.

Το πρόβλημα της βολής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε το πρόβλημα βολής (πχ μιας μπάλας του golf) η οποία βάλλεται με δοσμένη αρχική ταχύτητα V_0 και γωνία θ_0. Θέλουμε να καθορίσουμε την τροχιά της και την οριζόντια απόσταση που διανύει όταν χτυπήσει στο έδαφος. Θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα και ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι σταθερή

$0 < \theta_0 \leq \pi/2$, g = 9.81 m/sec^2 , t sec, V_0 είναι σε m/s αποστάσεις x,y σε m.

- Θέλουμε να βρούμε τον χρόνο που απαιτείται για να χτυπήσει το έδαφος
- Την οριζόντια απόσταση
- Το σχήμα της τροχιάς

- **Η μαθηματική θεωρία της βολής**
- Η οριζόντια απόσταση που ταξίδεψε το βλήμα από το σημείο x=y=0 δίνεται από τον τύπο

$$x_{max} = 2\frac{V_o^2}{g}\sin\theta_o\cos\theta_o.$$

Ο χρόνος από την στιγμή t=0 που πέρασε για να φτάσει το βλήμα το xmax είναι

$$t_{x_{max}} = 2\frac{V_o}{g}\sin\theta_o.$$

Το βλήμα φτάνει σε y max που είναι

$$y_{max} = \frac{V_o^2}{2g}\sin^2\theta_o,$$

σε χρόνο

$$t_{y_{max}} = \frac{V_o}{g}\sin\theta_o.$$

- Η τροχιά δίνεται από τις εξισώσεις

$$x = V_o t \cos\theta_o,$$

$$y = V_o t \sin\theta_o - \frac{g}{2}t^2.$$

Πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές στο χρονικό διάστημα 0<t≤t_xmax για δοσμένη αρχική ταχύτητα V_0 και γωνία θ_0 . Στο τέλος θέλουμε να δώσουμε μαι γραφική παράσταση της V σε συνάρτηση της θ

$$V = \sqrt{(V_o \cos\theta_o)^2 + (V_o \sin\theta_o - gt)^2},$$

Και

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right).$$

Script M-file

```
g = 9.81;                                   % Gravity in m/s/s.
vo = input('What is the launch speed in m/s?')
rho = input('What is the launch angle in degrees?')
rho = pi*tho/180;                           % Conversion of degrees to radians.
txmax = (2*vo/g) * sin(rho);
xmax = txmax * vo * cos(rho);
dt = txmax/100;
t = 0:dt:txmax;
% Η τροχιά
x = (vo * cos(rho)) .* t;
y = (vo * sin(rho)) .* t - (g/2) .* t.^2;
```

```
% Υπολογισμός της ταχύτητας και της γωνιακής διεύθυνσης

vx = vo * cos(rho);
vy = vo * sin(rho) - g .* t;
v = sqrt(vx.*vx + vy.*vy);
th = (180/pi) .* atan2(vy,vx);

% Υπολογισμός χρόνου και οριζόντιας απόστασης σε μέγιστο ύψος

tymax = (vo/g) * sin(rho);
xymax = xmax/2;
ymax = (vo/2) * tymax * sin(rho);
```

```
% Γραφική παράσταση

disp(['Range in m = ',num2str(xmax),' Duration in s = ',...
num2str(txmax)])

disp(' ')

disp(['Maximum altitude in m = ',num2str(ymax),' Arrival

in s = ', num2str(tymax)])

plot(x,y,'k',xmax,y(size(t)),'o',xmax/2,ymax,'o')

title(['Projectile flight path, vo =',num2str(vo),'

th =', num2str(180*th/pi)])

xlabel('x'), ylabel('y')

% Plot of Figure 1.

figure % Creates a new figure.

plot(v,th,'r')

title('Projectile speed vs. angle')

xlabel('V'), ylabel('\theta') % Plot of Figure 2.
```