Αριθμητική Παραγώγιση

Το κλάσμα του Newton δίνεται από την σχέση

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

Όπου το h είναι μικρό. Καθώς το h τείνει στο 0 το κλάσμα δίνει την παράγωγο df/dx της f στο σημείο x. Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε αριθμητικά την παράγωγο της f(x)=x^2 (πρέπει να οριστεί η f(x) σε ένα f.m file) στο σημείο x=2, για ολοένα μικρότερες τιμές του h (η ακριβής τιμή είναι 4)

```
h = 1;
x = 2;
format short e
for i = 1:20
    nq = (f(x+h) - f(x))/h;
    disp( [h nq] )
    h = h / 10;
end
```

Για ποιά τιμή του h τα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με την ακριβή τιμή της παραγώγου?

- Η εντολή **diff**

  Αν x είναι ένα διάνυσμα (στήλη ή γραμμή)

  [x(1) x(2) … x(n)]

  η εντολή **diff** επιστρέφει τις διαφορές των τιμών μεταξύ διαδοχικών στοιχείων του x

  [x(2)-x(1), x(3)-x(2) …, x(n)-x(n-1)]

Σε ορισμένα προβλήματα η εντολή diff είναι χρήσιμη στον υπολογισμό παραγώγων π.χ. όταν ένα διάνυσμα x παριστάνει τις απομακρύνσεις ενός κινητού σε διάφορες χρονικές τιμές διαστήματος h, τότε diff(x)/h είναι η ταχύτητα του κινητού.

Πρώτης τάξης Διαφορικές Εξισώσεις (ΔΕ)

- Πολλά προβλήματα στα μαθηματικά την φυσική την βιολογία κ.α. περιγράφονται από την λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με κάποιες αρχικές συνθήκες

- Το πιό απλό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι το

  $d y / d x = f (x, y (x)),$ $y(a)$ δοσμένη τιμή

  Με την μέθοδο του Euler αντικαθιστούμε την παράγωγο $d y / d x$ με το κλάσμα του Νεύτωνα οπότε η ΔΕ γίνεται

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = f(x,y).$$

  ή ισοδύναμα

$$y (x + h) = y (x) + h f (x , y(x))$$

- Η επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών είναι πολύ σημαντική τόσο από θεωρητική όσο και από την σκοπιά των εφαρμογών !!!

Το πρόβλημα είναι να βρούμε τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης y(x) στο διάστημα [a ,b] για την οποία γνωρίζουμε μόνο την τιμή της στο σημείο x=a (συνήθως a=0) και ότι η y(x) ικανοποιεί την δοσμένη ΔΕ.

- Το πρώτο βήμα είναι να χωρίσουμε το διάστημα σε m διαστήματα μήκους h, οπότε m=(b-a)/h.

Αν συμβολίσουμε με y_i την τιμή y (x_i) όπου x_i = (i - 1)/h τότε το αριθμητικό σχήμα παίρνει την μορφή

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

με y_1 = y(0).

Παράδειγμα: Ανάπτυξη βακτηρίων

Ας υποθέσουμε ότι μια αποικία 1000 βακτηρίων πολλαπλασιάζεται με ρυθμό r=0.8 κάθε ώρα το καθένα βακτήριο (δηλαδή το κάθε βακτήριο παράγει κατά μέσο όρο 0.8 ένα απόγονο κάθε ώρα) Πόσα βακτήρια υπάρχουν στην αποικία μετά από 10 ώρες ?

$$dN/dt = rN, \quad N(0) = 1000,$$

Όπου N(t) είναι ο πλυθησμός της αποικίας μετά από χρόνο t. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται εκθετική αύξηση.

$$N(t) = N(0)e^{rt}.$$

Για να λύσουμε την ΔΕ αριθμητικά εφαρμόζουμε την μέθοδο του Euler

$$N_{i+1} = N_i + rhN_i,$$

με αρχική τιμή N_1=1000

Script M-file

```
H = 0.5; r = 0.8;
a = 0; b = 10;
m = (b - a) / h;
N = zeros(1, m+1);
N(1) = 1000;
t = a:h:b;
for i = 1:m
N(i+1) = N(i) + r * h * N(i);
end
Nex = N(1) * exp(r * t);
format bank
disp( [t’ N’ Nex’] )
plot1 = plot(t, N );, xlabel( ’Hours’ ), ylabel( ’Bacteria’ )
set(plot1,'Color','red','LineWidth',3); hold on
plot2 = plot(t, Nex )
set(plot2,'Color','blue','LineWidth',3); hold off
```

Η μέθοδος πρόβλεψης – διόρθωσης σφαλμάτων

- Η προσέγγιση της λύσης με την μέθοδο του Euler είναι

$$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

όμως στο δεξί μέλος έχουμε την παλιά τιμή της y για να υπολογίσουμε την f(x_i, y_i). Θα ήταν καλύτερα να έχουμε

(1) $$y^*_{i+1} = y_i + h[f(x_{i+1}, y^*_{i+1}) + f(x_i, y_i)]/2,$$

Όμως πως θα βρούμε την νέα τιμή της y που δηλώνεται με αστεράκι? Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Euler. Η διαδικασία είναι η εξής:

- Χρησιμοποιούμε την μέθοδο του Euler για να βρούμε την y*
- Μετά διορθώνουμε την y* από την (1)