Πολυώνυμα και προσαρμογή καμπυλών

Στο Matlab τα πολυώνυμα παριστάνονται με ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του. Για παράδειγμα για το κυβικό πολυώνυμο

3 x^3 – 2.23 x^2 – 5.1 x _9.8

Πατάμε

```
>>c=[3  -2.23  -5.1  9.8]
```

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής με τον μέγιστο βαθμό είναι πρώτος. Για να υπολογίσουμε την τιμή του πολυωνύμου σε ένα σημείο x εφαρμόζουμε την εντολή **polyval**

```
>> y = polyval(c,x)
```

Όταν το x είναι ένα διάνυσμα τότε το y είναι κι αυτό διάνυσμα με τις αντίσοτιχες τιμές του πολυωνύμου στις τιμές του διανύσματος x. Αυτό είναι χρήσιμο όταν θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά το πολυώυμο. Για παράδειγμα

```
>>x=-1:0.1:1;
>>y=polyval(c,x);
>>plot(x,y)
```

Αν θέλαμε να δούμε μόνο τα σημεία και να τα συμβολίσουμε με ένα + τότε εισάγουμε στο Matlab

```
>>plot(x,y,'+')
```

Για να βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου το Matlab έχει την εντολή root (αν και δεν πρέπει να έχουμε πολλή εμπιστοσύνη λόγω αριθμητικών σφαλμάτων)

```
>>r=roots(c)
```

Για να ελέγξουμε την ακρίβεια των ριζών μπορούμε να υπολογίσουμε με την polval την τιμή του πολυωνύμου στις ρίζες, αλλά μπορούμε επίσης να φτιάξουμε ένα νέο πολυώνυμο από τις ρίζες μου δίνεται από την

$$(x-r(1)) (x-r(2))....(x-r(n))$$

Αυτό γίνεται εφικτό με την εντολή poly

```
>>cr=poly(r)
```

```
>>norm(c(1)*cr-c)
```

Αφού το cr μας επέστρεψε 1 στον συντελεστή με τον μεγαλύτερο βαθμό, το πολλαπλασιάσαμε με τον συντελεστή c(1) για να το συγκρίνουμε με το αρχικό πολυώνυμο c.

Για πολυώνυμα μεγάλου βαθμού είναι ενδιαφέρον να δούμε την κατανομή των ριζών του.

```
>>plot(r,'bx')
```

Παρατηρούμε ότι όταν οι ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί, το Matlab αυτόματα μεταφέρεται στο μιγαδικό επίπεδο με τον οριζόντιο άξονα να είναι οι πραγματικός άξονας και ο κατακόρυφος ο φανταστικός.

Το Matlab υποστηρίζει και συμβολική παραγώγιση πολυωνύμων με την εντολή polyder

```
>>dc=polyder(c)

>>hold on

>>plot(roots(dc),'rx')
```

Για την πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση πολυωνύμων δείτε προηγούμενες διαλέξεις.

Προσαρμογή καμπυλών

Ένα συχνό πρόβλημα είναι η προσαρμογή μιας καμπύλης σε κάποια δεδομένα. Τα δεδομένα σε αυτό το πρόβλημα είναι δυο διανύσματα x και y ίδιων διαστάσεων.

- Το ερώτημα είναι αν υπάρχει μια εξάρτηση των x και y με μια πολυωνυμική εξίσωση.
- Για παράδειγμα υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ των x και y ?
- Οπότε θα πρεπει να προσαρμόσουμε τα δεδομένα γενικά με ένα πολυώνυμο.
- Το Matlab χρησιμοποιεί την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να λύσει το υπερκαθορισμένο γραμμικό σύστημα η οποία δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου προσαρμογής.
- Η εντολή που υλοποιεί αυτή την προσαρμογή είναι η polyfit(x,y,d) όπου x-y τα δεδομένα και d ο βαθμός του πολυωνύμου προσαρμογής. Το αποτέλεσμα είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου προσαρμογής.
- Για να προσομοιώσουμε την προσαρμογή δεδομένων με μια πολυωνυμική εξίσωση θεωρούμε το εξής πείραμα.

- Παράγουμε ένα δείγμα τιμών από ένα κυβικό πολυώνυμο στο διάστημα [-1, 1] και ονομάζουμε το αντίστοιχο διάνυσμα y.
- Χρησιμοποιούμε την rand ή randn για να παράγουμε ένα διάνυσμα από τυχαίους αριθμούς, ας το ονομάσουμε θόρυβο (noise) και το προσθέτουμε στο διάνυσμα y, και το συμβολίζουμε με ey. Το διάνυσμα ey παριστά τα αριθμητικά δεδομένα από ένα πείραμα, και τα οποία είναι γνωστά με περιορισμένη ακρίβεια.
- Χρησιμοποιούμε την εντολή polyfit για να βρούμε ένα κυβικό πολυώνυμο που προσαρμόζεται στα δεδομένα (x,y).
- Συγκρίνουμε οπτικά τα αποτελέσματα της προσαρμογής κάνοντας μια γραφική παράσταση των αριθμητικών δεδομένων και της καμπύλης προσαρμογής και αριθμητικά παίρνοντας τις διαφορές των συντελεστών των διανυσμάτων.

```
Clear all; close all;
c3 = [0.74  0.97 1.1  0.86];
x=-1:0.1:1;
y=polyval(c3,x)
noise=randn(1,size(y,2) );
noise=noise/norm(noise);
ey= y + noise;
ec=polyfit(x,ey,3);
hold on;
plot(x,y,'b--' );
plot(x,ey,'r+');
fy=polyval(ec,x);
plot(x,fy,'g');
```