2.4 Μια Πρώτη Προσέγγιση στην Ανάλυση Ευαισθησίας

Ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να λαμβάνει υπόψη το δυναμικό περιβάλλον των συνεχών αλλαγών μέσα στο οποίο υπάρχει το υπό μελέτη φυσικό σύστημα: οι τιμές των πρώτων υλών αλλάζουν, οι απαιτήσεις της αγοράς κυμαίνονται, νέα μηχανήματα αντικαθιστούν παλιότερα, το κόστος της παραγωγής μεταβάλλεται, ανακατατάξεις προσωπικού πραγματοποιούνται, κ.λπ. Σύμφωνα με τη γενική περιγραφή του γραμμικού μοντέλου (βλ. §2.2), όλα αυτά μεταφράζονται σε αλλαγές για τις τιμές των παραμέτρων c_j, b_i και a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$). Συνεπώς, μαζί με την εύρεση της βέλτιστης λύσης, κρίσιμης σημασίας είναι και η δυνατότητα διερεύνησης σεναρίων που αφορούν τη φύση και την έκταση των μεταβολών για εκείνες τις παραμέτρους του μοντέλου, οι οποίες μπορούν να ανατρέψουν την άριστη απόφαση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8. Η Ανάλυση Ευαισθησίας μελετά τις συνέπειες που υφίσταται η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού μοντέλου, ως συνέπεια αλλαγών στις τιμές των παραμέτρων του.

Μια τέτοιου είδους διαδικασία προσδίδει στο προσδιοριστικό πλαίσιο μοντελοποίησης του γραμμικού προγραμματισμού[53] ένα είδος στοχαστικού χαρακτήρα, και για το λόγο αυτό *πρέπει απαραίτητα να συνοδεύει τη λύση οποιουδήποτε π.γ.π.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.11

Μια εταιρεία χημικών προϊόντων παρασκευάζει μεταξύ των άλλων και δύο διαλύματα ΔΛ1, ΔΛ2. Σε γενικές γραμμές, η γραμμή παραγωγής διαχωρίζεται σε δύο στάδια, αυτό της μίξης κι εκείνο του καθαρισμού. Για την παραγωγή 1000 lit ΔΛ1 απαιτούνται δύο ώρες στο τμήμα της μίξης και μία ώρα στο τμήμα καθαρισμού, ενώ για την παραγωγή 1000 lit ΔΛ2 απαιτούνται μία ώρα στο τμήμα της μίξης και δύο ώρες στο τμήμα καθαρισμού. Το οικονομικό τμήμα της εταιρείας, γνωρίζοντας ότι το εργατικό δυναμικό «προσφέρει» εβδομαδιαία 230 ώρες για τη μίξη και 250 ώρες για τον καθαρισμό των δύο διαλυμάτων, υπολογίζει σ' ένα κέρδος 300 χρηματικών μονάδων ανά lit ΔΛ1 και 500 χρηματικών μονάδων ανά lit ΔΛ2. Δεδομένου ότι η

[53] Βλέπε και βασικές παραδοχές του γραμμικού μοντέλου, σελίδες 41-42.

αγορά σε εβδομαδιαία βάση μπορεί να απορροφήσει άπειρες ποσότητες lit ΔΛ1 αλλά το πολύ 120,000 lit ΔΛ2 προσδιορίστε τις ποσότητες που πρέπει να παραχθούν από κάθε διάλυμα ΔΛ1 και ΔΛ2 σε τρόπο ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος της εταιρείας. Στη συνέχεια,

i. *μελετήστε τη μεταβολή στη βέλτιστη λύση (και στην αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) αν κάποιος από τους αντικειμενικούς συντελεστές αλλάξει*. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι για λόγους ανταγωνισμού στην αγορά για το διάλυμα ΔΛ1, η εταιρεία μειώνει το κέρδος στις 275 χρηματικές μονάδες ανά lit.[54]
ii. *μελετήστε τη μεταβολή στη βέλτιστη λύση (και στην αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) αν το δεξιό μέλος ενός εκ των περιορισμών αλλάξει*. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ο χρόνος εργασίας στο τμήμα μίξης μειώνεται στις 220 ώρες.[54]

Λύση

Μεταβλητές. Εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι μεταβλητές απόφασης είναι η ποσότητα των διαλυμάτων ΔΛ1 και Δλ2 (σε χιλιάδες lit) που πρέπει να παράγονται σε μια εβδομάδα. Ορίζουμε να είναι

x_1 η ποσότητα του διαλύματος ΔΛ1 που παράγεται εβδομαδιαία (,000 lit),
x_2 η ποσότητα του διαλύματος ΔΛ2 που παράγεται εβδομαδιαία (,000 lit).

Στόχος (αντικειμενική συνάρτηση). Συμβολίζοντας με *Z* το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος, αναζητούνται οι τιμές x_1, x_2 οι οποίες επιτυγχάνουν να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση

$$Z = (3x_1 + 5x_2)$$

(εκατοντάδες χιλιάδες χρηματικές μονάδες) λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς που επιβάλλονται σ' αυτές.

Περιορισμοί. Ένας προφανής περιορισμός προκύπτει εξ αιτίας των περιορισμένων ωρών στα δύο τμήματα (μίξης και καθαρισμού) της κατασκευαστικής διαδικασίας

$2x_1 + x_2 \leq 230$ (εβδομαδιαίος χρόνος για μίξη των διαλυμάτων),

$x_1 + 2x_2 \leq 250$ (εβδομαδιαίος χρόνος για καθαρισμό των διαλυμάτων).

Επιπλέον, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η εβδομαδιαία απορροφητικότητα της αγοράς για το διάλυμα ΔΛ2

$x_2 \leq 120$ (εβδομαδιαία ζήτηση του διαλύματος ΔΛ2),

[54] Η αλλαγή αυτή επηρεάζει το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής που εντοπίστηκε ;

και η μη αρνητικότητα των μεταβλητών απόφασης

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Συνοψίζοντας, το γραμμικό μοντέλο για το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζει η εταιρεία του παραδείγματος, αφορά τον:

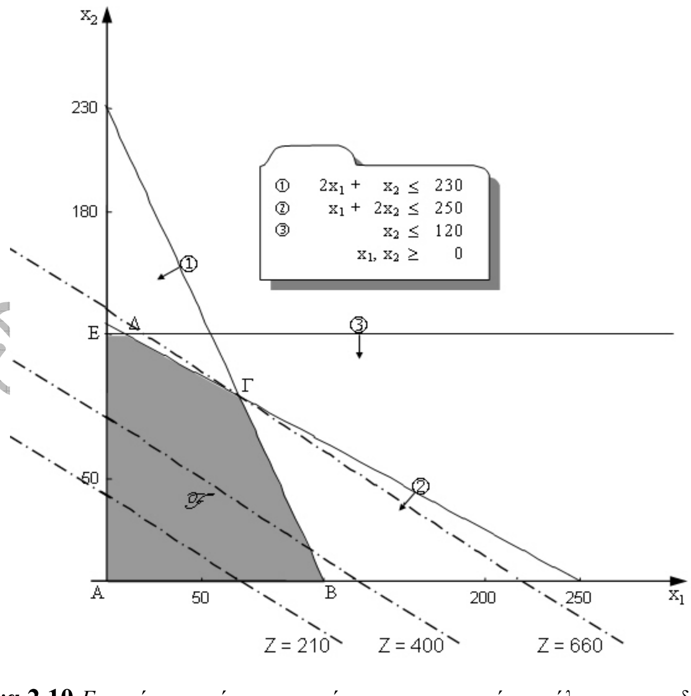
προσδιορισμό εκείνων τιμών για τις μεταβλητές x_1, x_2 (ποσότητα –σε ,000 lit– διαλύματος ΔΛ1 και ΔΛ2 αντίστοιχα) οι οποίες επιτυγχάνουν να

$$\text{maximize } Z = (3x_1 + 5x_2)$$

κάτω από περιορισμούς (όταν είναι)

$$\begin{array}{lrcrcr}
① & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 230 \\
② & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 250 \\
③ & & & x_2 & \leq & 120 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Γραφική Επίλυση. Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω π.γ.π. αντιστοιχεί στο πολύγωνο ΑΒΓΔΕ (εικόνα 2.10) του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(0, 0), Β(115, 0), Γ(70, 90), Δ(10, 120) και Ε(0, 120). Για τον εντοπισμό



Εικόνα 2.10 *Εφικτή περιοχή και κορυφές για το γραμμικό μοντέλο του παραδείγματος 2.11.*

της βέλτιστης λύσης (κορυφής), θα πρέπει να χαραχθούν ευθείες σταθερού κέρδους στην κατεύθυνση αύξησης της *Z*.

Στην εικόνα 2.10 παρατηρούμε ότι, η τελευταία κορυφή από την οποία διέρχεται μια από αυτές τις παράλληλες πριν φύγει έξω από την εφικτή περιοχή, είναι η Γ. Επομένως, η εβδομαδιαία παραγωγή 70,000 lit ΔΛ1 και 90,000 lit ΔΛ2, οδηγεί στο μεγαλύτερο δυνατό συνολικό κέρδος ύψους $Z = 66{,}000{,}000$ χρηματικών μονάδων.

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.6, οι δύο πρώτοι περιορισμοί οι οποίοι αναφέρονται αντίστοιχα στο διαθέσιμο χρόνο (ώρες) για τη μίξη και τον καθαρισμό των δύο διαλυμάτων, είναι δεσμευτικοί (η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι το σημείο τομής των περιοριστικών ευθειών τους). Ο περιορισμός, που αφορά την απορροφητικότητα της αγοράς για το διάλυμα ΔΛ2, είναι χαλαρός με **περιθώρια τιμή**[55] 120 – 90 = 30.

Η ακόλουθη ερώτηση υποδηλώνει το εύλογο ζήτημα το οποίο προκύπτει μετά την εύρεση της ζητούμενης βέλτιστης λύσης (what-if analysis): "αν η συνεισφορά του ΔΛ1 στο συνολικό κέρδος ελαττωθεί κατά *x*-μονάδες, η εβδομαδιαία παραγωγή 70,000 lit ΔΛ1 και 90,000 lit ΔΛ2 εξακολουθεί να αποτελεί τη βέλτιστη εβδομαδιαία γραμμή παραγωγής της εταιρείας ;"[56]

Ανάλυση ευαισθησίας για τους αντικειμενικούς συντελεστές

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9. Το διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να κυμαίνεται η τιμή ενός αντικειμενικού συντελεστή[57] χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του γραμμικού μοντέλου, ονομάζεται **εύρος αριστότητας** του συντελεστή[58].

Όπως φαίνεται από τη γραφική επίλυση των π.γ.π. (π.χ. εικόνα 2.10 για το παράδειγμα 2.11), μεταβολή της τιμής του αντικειμενικού συντελεστή

[55] Έτσι ονομάζεται η τιμή της χαλαρής (ή πλεονάζουσας) μεταβλητής ενός χαλαρού περιορισμού (βλ. και τον ορισμό 2.7).

[56] Φυσικά το ενδιαφέρον αφορά και την επίδραση μιας πιθανής αύξησης της συνεισφοράς του ΔΛ1 στο συνολικό κέρδος. Επιπλέον, αντίστοιχα ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντηθούν και για την αύξηση/μείωση της συνεισφοράς του ΔΛ2.

[57] Θεωρούμε ότι μόνον ο συγκεκριμένος αντικειμενικός συντελεστής μεταβάλλεται, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου παραμένουν αμετάβλητες.

[58] Συντελεστές με πολύ μικρό εύρος αριστότητας πρέπει να τύχουν ιδιαίτερης προσοχής: μια μικρή αλλαγή των τιμών τους οδηγεί και σε αλλαγή της βέλτιστης λύσης.

c_1 (ή c_2) συνεπάγεται αλλαγή στην κλίση της ευθείας (αντικειμενικής συνάρτησης) $Z = c_1x_1 + c_2x_2$[59], γεγονός που μπορεί να οδηγήσει τη βέλτιστη λύση σε κάποια άλλη κορυφή της εφικτής περιοχής. Εντούτοις (εικόνα 2.11), όσο η κλίση της ευθείας $Z = c_1x_1 + 5x_2$ παραμένει μεταξύ των κλίσεων των περιοριστικών ευθειών ① και ② η κορυφή Γ(70, 90) είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος[60].

Αύξηση της τιμής του c_1 μεταφράζεται σε περιστροφή της ευθείας Z περί το Γ σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (η κλίση της μικραίνει). Μέχρις ότου η περιστροφή ταυτίσει τις ευθείες Z και ①, η κορυφή Γ αποτελεί τη (μοναδική) βέλτιστη λύση του προβλήματος. Όταν (κι αν) συμπέσουν[61], το πρόβλημα αποκτά όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ ως εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις[62]. Αν η περιστροφή είναι ακόμη μεγαλύτερη, η κλίση που θα έχει πάρει πια η ευθεία Ζ θα δώσει ως (μοναδική) βέλτιστη λύση την κορυφή Β. Άρα, *η κλίση της ευθείας ① αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την κλίση που πρέπει να έχει η ευθεία Ζ, ώστε η κορυφή Γ που βρέθηκε να αποτελεί βέλτιστη λύση του προβλήματος.*

Μείωση της τιμής του c_1 μεταφράζεται σε περιστροφή της ευθείας Z περί το Γ αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (η κλίση της μεγαλώνει). Μέχρις ότου η περιστροφή ταυτίσει τις ευθείες Z και ②, η κορυφή Γ αποτελεί τη (μοναδική) βέλτιστη λύση του προβλήματος. Όταν (κι αν) συμπέσουν, το πρόβλημα αποκτά όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ ως εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις. Αν η περιστροφή είναι ακόμη μεγαλύτερη, η κλίση που θα έχει πάρει πια η ευθεία Ζ θα δώσει ως (μοναδική) βέλτιστη λύση την κορυφή Δ. Άρα, *η κλίση της ευθείας ② αποτελεί ένα άνω φράγμα για την κλίση που πρέπει να έχει η ευθεία Ζ, ώστε η κορυφή Γ που βρέθηκε να αποτελεί βέλτιστη λύση του προβλήματος.*

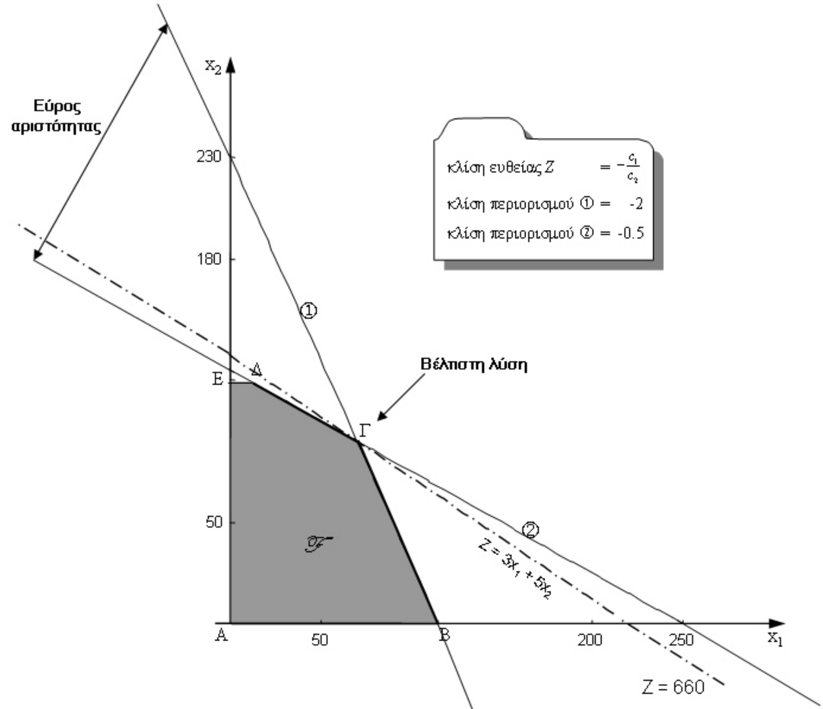
---

59 Μια και η ευθεία $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ γράφεται ως $x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{Z}{c_2}$, η κλίση της (συντελεστής διεύθυνσης) ισούται με $-\frac{c_1}{c_2}$.

60 Πρόκειται για τις περιοριστικές ευθείες η τομή των οποίων ορίζει τη βέλτιστη λύση.

61 Για να συμπέσουν, θα πρέπει η τιμή του c_1 να γίνει τέτοια ώστε η κλίση της ευθείας Z να γίνει ίση με την κλίση της ευθείας ① : $-\frac{c_1}{5} = -2$.

62 Οι κορυφές Γ (βέλτιστη λύση) και Β είναι δύο από αυτές.



Εικόνα 2.11 *Προσδιορισμός του εύρους αριστότητας των αντικειμενικών συντελεστών του παραδείγματος 2.11 (γραφική ανάλυση ευαισθησίας).*

Συνοψίζοντας, ως αποτέλεσμα μεταβολών στις τιμές του c_1, υπάρχει ένα εύρος τιμών της κλίσης της ευθείας *Z* το οποίο διατηρεί την κορυφή Γ ως βέλτιστη λύση

κλίση της ευθείας ① $\leq$ *κλίση της ευθείας Z* $\leq$ *κλίση της ευθείας* ②

που στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει:

$$-2 \leq -\frac{c_1}{5} \leq -0.5 \, .$$

Επομένως, τιμές του υπό μελέτη αντικειμενικού συντελεστή c_1 στο διάστημα [2.5, 10] -εύρος αριστότητας- διατηρούν τη κορυφή Γ ως τη βέλτιστη λύση του προβλήματος[63]. *Το γεγονός αυτό δε συνεπάγεται και σταθερότητα στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Εδώ υπάρχει μεταβολή η οποία οφείλεται στη νέα τιμή του c_1.*

---

[63] Στα άκρα του διαστήματος, λόγω παραλληλίας της ευθείας *Z* με κάποιον από τους περιορισμούς ① ή ②, υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις μεταξύ των οποίων και η κορυφή Γ.

Κατά συνέπεια, η εταιρεία πληροφορείται ότι όταν η συνεισφορά στο συνολικό κέρδος ενός lit ΔΛ1 κυμαίνεται από 250 έως 500 χρηματικές μονάδες, η βέλτιστη εβδομαδιαία γραμμή παραγωγής της εταιρείας παραμένει η ίδια: 70,000 lit ΔΛ1 και 90,000 lit ΔΛ2. Αν για παράδειγμα η εταιρεία μειώσει το περιθώριο κέρδους της για το ΔΛ1 στις 275 χρηματικές μονάδες τη μονάδα (σύμφωνα με το παράδειγμα 2.11), το βέλτιστο σχέδιο παραμένει το ίδιο αλλά το εβδομαδιαίο κέρδος γίνεται $Z = 275 \times 70{,}000 + 500 \times 90{,}000 = 64{,}250{,}000$ χρηματικές μονάδες.

Με ανάλογο συλλογισμό μπορεί να εντοπιστεί το εύρος αριστότητας του αντικειμενικού συντελεστή c_2 όταν όλες οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου παραμένουν αμετάβλητες. Η εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι τώρα η $x_2 = -\frac{3}{c_2}x_1 + \frac{Z}{c_2}$, οπότε για να παραμείνει βέλτιστη η τρέχουσα λύση θα πρέπει $-2 \le -\frac{3}{c_2} \le -0.5$, που δίνει $1.5 \le c_2 \le 6$.

Επομένως, αν η συνεισφορά στο συνολικό κέρδος ενός lit ΔΛ2 κυμαίνεται από 150 έως 600 χρηματικές μονάδες, η βέλτιστη εβδομαδιαία γραμμή παραγωγής της εταιρείας παραμένει ίδια με την προταθείσα: 70,000 lit ΔΛ1 και 90,000 lit ΔΛ2.

Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζεται όταν κατά τη διάρκεια της περιστροφής περί τη βέλτιστη λύση, η ευθεία Z έρθει σε θέση παράλληλη ή κάθετη με τον οριζόντιο άξονα (η κλίση της θα ισούται με 0 και $-\infty$ αντίστοιχα). Σε μια τέτοια περίπτωση, η περιστροφή της ευθείας Z πρέπει να σταματήσει σ' αυτή τη θέση και να μη συνεχιστεί περαιτέρω[64].

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση του ίδιου παραδείγματος είναι η $Z = 8x_1 + 3x_2$. Στην εικόνα 2.12 βλέπουμε τη γραφική επίλυση και την ανάλυση ευαισθησίας των αντικειμενικών συντελεστών για το τροποποιημένο πρόβλημα. Βέλτιστη λύση είναι η κορυφή B(115, 0) που δίνει $Z = 92{,}000{,}000$ χρηματικές μονάδες. Αν (λόγω μείωσης

[64] Ανεξάρτητα από τις δυνατότητες που υπάρχουν για τη συνέχισή της μεταξύ των περιοριστικών ευθειών που ορίζουν τη βέλτιστη λύση.

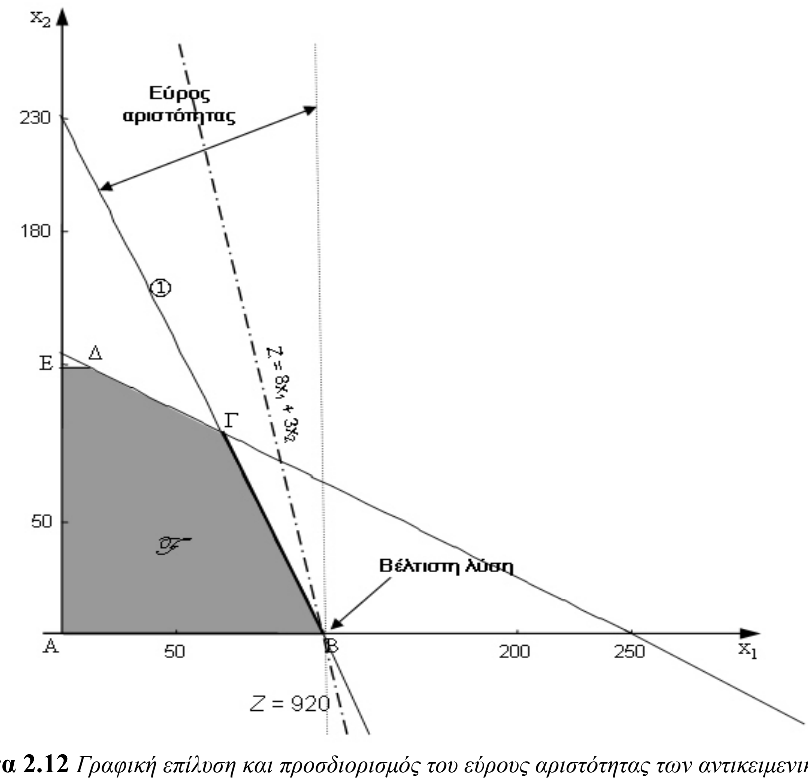
της τιμής του c_1) η ευθεία *Z* αρχίσει να περιστρέφεται αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού, το Β θα παραμείνει βέλτιστη λύση μέχρις ότου η κλίση της ξεπεράσει την κλίση της περιοριστικής ευθείας ①:

$$-\frac{c_1}{3} \leq -2 \quad \Rightarrow \quad c_1 \geq 6 .$$

Αντιθέτως αν το c_1 αρχίσει να αυξάνεται, τότε η ευθεία *Z* θα αρχίσει να περιστρέφεται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού μέχρις ότου γίνει κάθετη στον οριζόντιο άξονα με κλίση ίση με -∞. Άρα δεν υπάρχει κάτω φράγμα για την κλίση που πρέπει να έχει η ευθεία *Z* ώστε η κορυφή Β να αποτελεί τη βέλτιστη λύση του προβλήματος:

$$-\infty < -\frac{c_1}{3} \quad \Rightarrow \quad c_1 < \infty .$$

Συναθροίζοντας τα ανωτέρω καταλήγουμε στο εύρος αριστότητας του συντελεστή c_1 [6, ∞).



Εικόνα 2.12 *Γραφική επίλυση και προσδιορισμός του εύρους αριστότητας των αντικειμενικών συντελεστών του τροποποιημένου παραδείγματος 2.11* ($6 \leq c_1 \leq \infty$, $-\infty \leq c_2 \leq 4$).

Για τον εντοπισμό του εύρους αριστότητας του αντικειμενικού συντελεστή c_2 αρκεί να ληφθεί υπόψη η μορφή της εξίσωσης της αντικειμενικής συνάρτησης που τώρα είναι η $x_2 = -\frac{8}{c_2}x_1 + \frac{Z}{c_2}$. Για να παραμείνει βέλτιστη λύση η κορυφή Β θα πρέπει $-\infty < -\frac{8}{c_2} \leq -2$, που δίνει $-\infty \leq c_2 \leq 4$.

Στη συνέχεια εξετάζονται ερωτήματα (what-if analysis) που αφορούν τις αλλαγές που προκαλούνται στην εφικτή περιοχή, κι άρα και στη βέλτιστη λύση, από πιθανές αυξομειώσεις του δεξιού μέλους b_i[65] ενός εκ των περιορισμών. Από τη γραφική προσέγγιση της λύσης ενός π.γ.π. (π.χ. εικόνα 2.10 για το παράδειγμα 2.11) είναι φανερό ότι τέτοιες αλλαγές έχουν ως αποτέλεσμα την παράλληλη μεταφορά της αντίστοιχης περιοριστικής ευθείας με αποτέλεσμα τη μεταβολή της εφικτής περιοχής και πιθανόν και της βέλτιστης λύσης του π.γ.π.

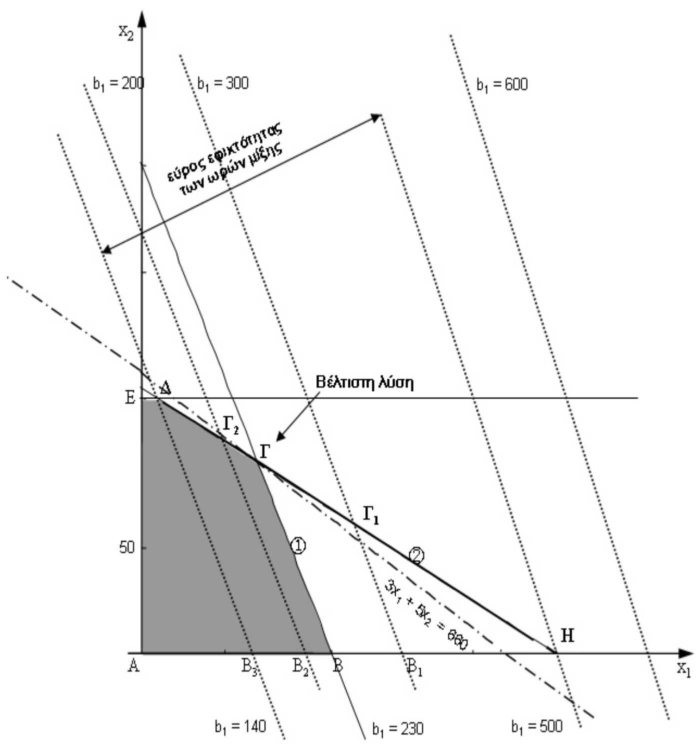
ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10. Η ανάλυση ευαισθησίας για το δεξιό μέλος b_i ενός περιορισμού αποσκοπεί στον καθορισμό ενός διαστήματος τιμών που ονομάζεται **εύρος εφικτότητας**. Καθώς το b_i παίρνει τιμές μέσα στο διάστημα, **η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται μ' έναν προσδιοριζόμενο σταθερό ρυθμό**.

Ανάλυση ευαισθησίας για τα δεξιά μέλη δεσμευτικών περιορισμών

Δεσμευτικοί περιορισμοί στο παράδειγμα 2.11 είναι ο 1ος και ο 2ος που αφορούν τις διαθέσιμες ώρες για μίξη (b_1) και καθαρισμό (b_2) αντίστοιχα. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι το σημείο τομής Γ των περιοριστικών τους ευθειών (εικόνα 2.10).

Στην εικόνα 2.13 φαίνεται το αποτέλεσμα της μεταβολής του δεξιού μέλους b_1 = 230 του πρώτου περιορισμού: επειδή η μεταβολή αφορά το σταθερό όρο, η ευθεία ① μετατοπίζεται παράλληλα είτε προς τα δεξιά (αν το b_1 αυξηθεί) είτε προς τα αριστερά (αν το b_1 μειωθεί), γεγονός που αλλάζει τη μορφή της εφικτής περιοχής (π.χ. όταν b_1 = 300 η εφικτή περιοχή ορίζεται

[65] Συνήθως η διαθέσιμη ποσότητα κάποιου πόρου.



Εικόνα 2.13 *Τροποποίηση της εφικτής περιοχής του παραδείγματος 2.11 ως αποτέλεσμα των διαφορετικών τιμών της σταθεράς b_1 στο δεξιό μέλος του $1^{ου}$ περιορισμού (προσδιορισμός του εύρους εφικτότητας).*

από το πολύγωνο $AB_1\Gamma_1\Delta E$). Ανάλογα, η βέλτιστη λύση Γ ολισθαίνει πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ (για $b_1 = 300$ έχει μετακινηθεί στο σημείο Γ_1). Αν όμως η τιμή του b_1 διαμορφωθεί σε τέτοια επίπεδα ώστε το σημείο τομής της μετακινούμενης περιοριστικής ευθείας ① με την ευθεία ② να μην αποτελεί σημείο της εφικτής περιοχής του προβλήματος, τότε η βέλτιστη λύση θα προσδιορίζεται σε κάποιο άλλο σημείο/κορυφή[66]. Επομένως, τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΔΗ σκιαγραφούν το εύρος εφικτότητας των ωρών μίξης. Το πλήθος των ωρών μίξης που συνδέεται με το σημείο Δ(10, 120) υπολογίζεται σε $2x_1 + x_2 = 2\times10 + 1\times120 = 140$, ενώ με το σημείο Η(250, 0) σε $2x_1 + x_2 = 2\times250 + 1\times0 = 500$. Συνεπώς, εύρος εφικτότητας της παραμέ-

[66] (π.χ. όταν $b_1 = 600$ η εφικτή περιοχή ορίζεται από το πολύγωνο ΑΗΔΕ και βέλτιστη λύση είναι η κορυφή Η). Με άλλα λόγια, όσο η τομή της μετακινούμενης περιοριστικής ευθείας ① με την ευθεία ② παραμένει στην εφικτή περιοχή του προβλήματος, ανεξάρτητα με το πως η τελευταία διαμορφώνεται από την κίνηση, εξακολουθεί να είναι η βέλτιστη λύση του π.γ.π.

τρου b_1 είναι το διάστημα [140, 500].

Για τη συνέχεια, ας είναι D η (πιθανή) μεταβολή της b_1 από την τρέχουσα τιμή (= 230). Όσο οι αυξομειώσεις του b_1 είναι μέσα στα πλαίσια του εύρους εφικτότητας

$$140 \le 230 + D \le 500 \quad \Rightarrow \quad -90 \le D \le 270$$

η βέλτιστη λύση προκύπτει στο σημείο τομής των περιοριστικών ευθειών ① και ② που παραμένουν δεσμευτικοί. Άρα

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 &=& 230+D \\ x_1 + 2x_2 &=& 250 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 70+\frac{2}{3}D \\ x_2 &=& 90-\frac{1}{3}D \end{array}\right.$$

οπότε

$$Z = 3x_1 + 5x_2 = 3\times\left(70+\frac{2}{3}D\right)+5\times\left(90-\frac{1}{3}D\right) = 660+\frac{1}{3}D$$

Κατά συνέπεια, μεταβολή κατά D (-90 ≤ D ≤ 270) των διαθέσιμων ωρών μίξης προκαλεί μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά $\frac{1}{3}D$ (εκατοντάδες χιλιάδες) χρηματικές μονάδες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11. Η βελτίωση της τιμής *Z* της αντικειμενικής συνάρτησης ανά μονάδα αύξησης του δεξιού μέλους ενός περιορισμού[67] καλείται **δυϊκή ή σκιώδης τιμή** του πόρου που αυτός αντιπροσωπεύει.

Η δυϊκή τιμή ενός πόρου εκφράζει την αξία που έχει για το σύστημα που μοντελοποιούμε μια επιπλέον μονάδα του συγκεκριμένου πόρου. Για κάθε επιπλέον ώρα που καταφέρνει να εξασφαλίζει η εταιρεία του παραδείγματος 2.11 στο τμήμα μίξης πάνω από τις 230 και μέχρι τις 500, αυξάνει τα κέρδη της κατά $\frac{1}{3}$ (εκατοντάδες χιλιάδες) χρηματικές μονάδες[68]. Ανάλογα,

[67] : ρυθμός μεταβολής της τιμής *Z* της αντικειμενικής συνάρτησης.

[68] Λογικά, η εταιρεία θα ήταν διατεθειμένη να πληρώσει ποσό μέχρις αυτού του ορίου προκειμένου να την εξασφαλίσει. Στην περίπτωση που δώσει ακριβώς $\frac{1}{3}$ (εκατοντάδες χιλιάδες) χρηματικές μονάδες το τελικό κέρδος θα είναι βέβαια μηδενικό.

για κάθε ώρα που μειώνεται η δυναμικότητα του τμήματος μίξης κάτω από τις 230 που είναι, και μέχρι τις 140, τα κέρδη της εταιρείας μειώνονται κατά $\frac{1}{3}$ (εκατοντάδες χιλιάδες) χρηματικές μονάδες.

Αν για παράδειγμα ο διαθέσιμος χρόνος εργασίας στο τμήμα μίξης μειωθεί από 230 σε 220 ώρες (σύμφωνα με το παράδειγμα 2.11), το βέλτιστο σχέδιο θα πρέπει να τροποποιηθεί στο (D = -10)

$$x_1 = 70+\frac{2}{3}(-10) = 63+\frac{1}{3} \text{ (χιλιάδες) lit ΔΛ1}$$

$$x_2 = 90-\frac{1}{3}(-10) = 93+\frac{1}{3} \text{ (χιλιάδες) lit ΔΛ2}$$

με αποτέλεσμα το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος να ανέρχεται σε

$$Z = 3\times\left(63+\frac{1}{3}\right)+5\times\left(93+\frac{1}{3}\right) = 656+\frac{2}{3} \text{ (00,000) χρηματικές μονάδες.}$$

Είναι δηλαδή μειωμένο κατά D-φορές τη δυϊκή τιμή του χρόνου εργασίας στο τμήμα μίξης:

$$Z = 660+\frac{1}{3}(-10) = 656+\frac{2}{3} \text{ (00,000) χρηματικές μονάδες.}$$

- Βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης δηλώνει αύξηση σε προβλήματα μεγιστοποίησης και ελάττωση σε προβλήματα ελαχιστοποίησης.
- Δυστυχώς, τα διάφορα λογισμικά Επιχειρησιακής Έρευνας δεν αναφέρουν με τον ίδιο τρόπο τις δυϊκές τιμές: μπορεί να υπάρχει διαφορά στο πρόσημο. Όμως, **η απόλυτη δυϊκή τιμή παριστά πάντα το ρυθμό βελτίωσης της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν ο αντίστοιχος περιορισμός χαλαρώνει**[69]. Επομένως

  (a) σ' ένα maximize π.γ.π. πρέπει να είναι

περιορισμός	δυϊκή τιμή	αντικειμενική συνάρτηση
$\geq$	≤ 0	↘
$\leq$	≥ 0	↗

[69] Ένας ≤ περιορισμός χαλαρώνει όταν αυξάνει το δεξιό του μέλος, ενώ ένας ≥ περιορισμός χαλαρώνει όταν το δεξιό του μέλος ελαττώνεται

(b) σ' ένα minimize π.γ.π. πρέπει να είναι

περιορισμός	δυϊκή τιμή	αντικειμενική συνάρτηση
$\geq$	≤ 0	↗
$\leq$	≥ 0	↘

ενώ ένας περιορισμός εξίσωσης μπορεί να έχει δυϊκή τιμή $\leq$ ή ≥ 0.

- Σύμφωνα με τα ανωτέρω, αν Δb_i είναι η ποσότητα κατά την οποία μεταβάλλεται το δεξιό μέλος του i-περιορισμού

  (a) σ' ένα maximize π.γ.π. ισχύει

  (νέα άριστη Z τιμή) = (προηγούμενη άριστη Z τιμή) + (δυϊκή τιμή i-περιορισμού) × Δb_i

  (b) σ' ένα minimize π.γ.π. ισχύει

  (νέα άριστη Z τιμή) = (προηγούμενη άριστη Z τιμή) – (δυϊκή τιμή i-περιορισμού) × Δb_i

Ο πίνακας που ακολουθεί καταγράφει τις διάφορες τιμές που δόθηκαν στην παράμετρο b_1 (εικόνα 2.13), μαζί με την τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης για την αντίστοιχη βέλτιστη λύση. Δίνει επίσης τη μεταβολή των τιμών τους (από την αρχική-δοσμένη) καθώς επίσης και το ρυθμό μεταβολής της Z τιμής, που παρατηρείται σταθερός όσο είναι $140 \leq b_1 \leq 500$. Πράγματι, η αντίστοιχη γραφική αναπαράσταση (εικόνα 2.14) αποδεικνύει ότι *καθώς η τιμή του b_1 κυμαίνεται εντός του εύρους εφικτότητας, η τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται γραμμικά*. Σύμφωνα με τον ορισμό 2.11, ο ρυθμός μεταβολής της που ισούται με την κλίση της προσδιορισθείσας ευθείας

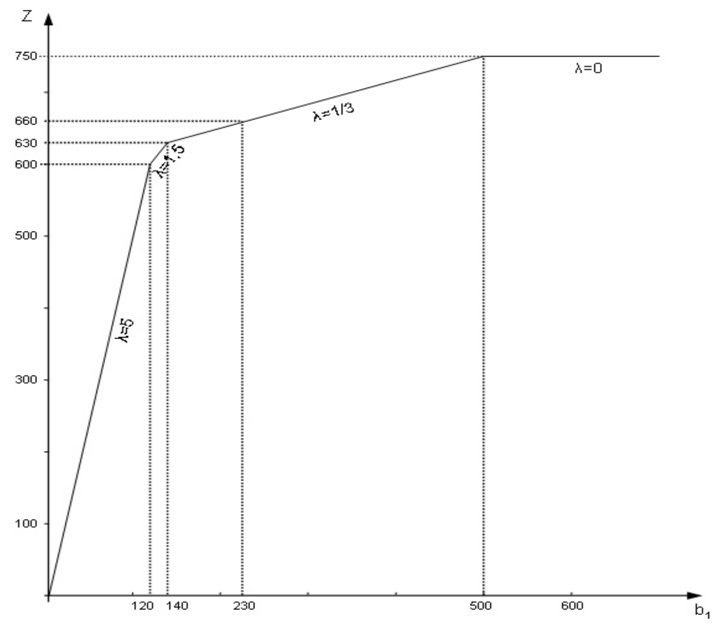
$$\text{κλιση} = \frac{(\text{τιμη Z οταν } b_1 = 500) - (\text{τιμη Z οταν } b_1 = 140)}{500 - 140} = \frac{750 - 630}{500 - 140} = \frac{120}{360},$$

αντιστοιχεί στη δυϊκή τιμή του χρόνου εργασίας στο τμήμα μίξης.

Λόγω της προαναφερόμενης γραμμικότητας, η δυϊκή τιμή ενός πόρου παραμένει σταθερή μέσα στο διάστημα εφικτότητας του δεξιού μέλους του αντίστοιχου περιορισμού. Εκτός όμως αυτών των ορίων, η δυϊκή τιμή διαφοροποιείται. Η εικόνα 2.14 παρουσιάζει επιπλέον και τα αποτελέσματα των αυξομειώσεων της τιμής του b_1 στο διάστημα $[0, \infty)$, πάνω στην τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης. Εύκολα διαπιστώνεται η ύπαρξη τμημάτων με

b_1	βέλτιστη λύση	Z	μεταβολή		*ρυθμός*
			b_1	Z	
130	(5, 120)	615	-100	-45	$\neq \frac{1}{3}$
140	Δ(10, 120)	630	-90	-30	$\frac{1}{3}$
200	Γ_2(50, 100)	650	-30	-10	$\frac{1}{3}$
230	Γ(70, 90)	660			
300	$\Gamma_1\left(\frac{350}{3}, \frac{200}{3}\right)$	$683+\frac{1}{3}$	70	$23+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
500	Η(250, 0)	750	270	90	$\frac{1}{3}$
600	(250, 0)	750	370	90	$\neq \frac{1}{3}$

διαφορετική κλίση (δυϊκή τιμή). Τα γωνιακά σημεία της ευθείας $Z(b_1)$ αντιστοιχούν σε τιμές του b_1 οι οποίες οδηγούν σε εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις. Αξίζει να σταθούμε στο γεγονός ότι, αν οι διαθέσιμες ώρες για τη μίξη



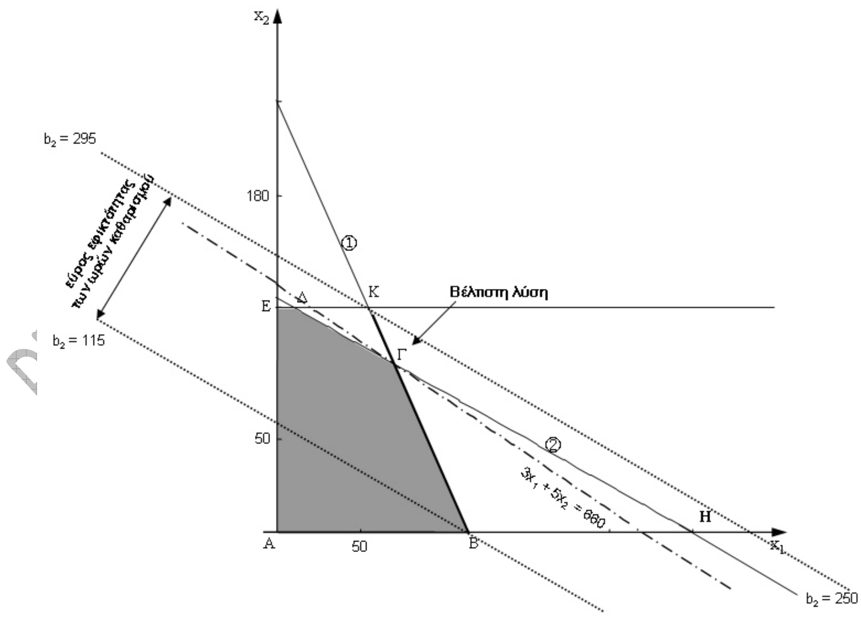
Εικόνα 2.14 *Μεταβολή της τιμής Z της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τις διαθέσιμες ώρες b_1 στο τμήμα μίξης.*

των διαλυμάτων ξεπεράσουν τις 500, η δυϊκή τιμή του πόρου αυτού μηδενίζεται με αποτέλεσμα οι όποιες επιπλέον ώρες να μην συνεισφέρουν στο συνολικό κέρδος *Z*. Η **παραμετρική ανάλυση** πραγματοποιείται δύσκολα γραφικά και για το λόγο αυτό αναπτύσσεται, στη συνέχεια του βιβλίου, αλγεβρικά (βλ. §X.X).

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί το εύρος εφικτότητας για το δεξιό μέλος b_2 του $2^{ου}$ περιορισμού. Από τη γραφική επίλυση του προβλήματος (εικόνα 2.15) παρατηρούμε ότι τα οριακά σημεία τα οποία διατηρούν τη γραμμική σχέση μεταξύ των ωρών που υπάρχουν διαθέσιμες για τον καθαρισμό των διαλυμάτων και του συνολικού κέρδους *Z* είναι τα B, K. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες τους στον αντίστοιχο περιορισμό

$$\text{B:}\quad x_1 + 2x_2 = 115 + 2\times 0 = 115 \quad (=b_2)$$
$$\text{K:}\quad x_1 + 2x_2 = 55 + 2\times 120 = 295 \quad (=b_2)$$

βρίσκουμε το εύρος εφικτότητας του b_2 [115, 295]. Επειδή οι *Z* τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στα σημεία B, K είναι ίσες με



Εικόνα 2.15 *Προσδιορισμός του εύρους εφικτότητας για το χρόνο εργασίας στο τμήμα καθαρισμού (σταθερά b_2 του δεξιού μέλους στον $2^{ου}$ περιορισμό του παραδείγματος 2.11).*

$$\text{Β:} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 = 3\times115 + 5\times0 = 345$$
$$\text{Κ:} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 = 3\times55 + 5\times120 = 765$$

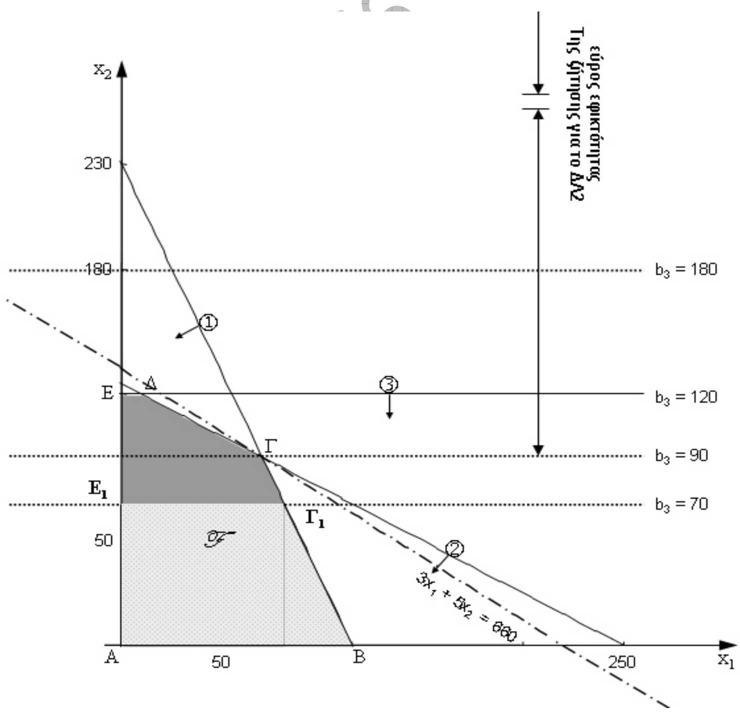
η κλίση της ευθείας που παριστά το ρυθμό μεταβολής της τιμής Z της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τη μεταβολή των διαθέσιμων ωρών για καθαρισμό των διαλυμάτων

$$\text{κλιση} = \frac{765-345}{295-115} = \frac{420}{180} = \frac{7}{3}$$

αντιστοιχεί στη δυϊκή τιμή του χρόνου εργασίας στο τμήμα καθαρισμού.

Ανάλυση ευαισθησίας για τα δεξιά μέλη χαλαρών περιορισμών

Στο παράδειγμα 2.11, ο 3^{ος} περιορισμός που αφορά την εβδομαδιαία ζήτηση του διαλύματος ΔΛ2 είναι χαλαρός (εικόνα 2.10) με περιθώρια τιμή 30. Στην εικόνα 2.16 φαίνεται το αποτέλεσμα της μετακίνησης της περιοριστικής ευθείας ③, όπως προκύπτει από διάφορες τιμές του b_3. Καθώς το b_3 αυξάνει, η εφικτή περιοχή μεγαλώνει χωρίς όμως το γεγονός αυτό να έχει



Εικόνα 2.16 *Προσδιορισμός του εύρους εφικτότητας για τη ζήτηση του ΔΛ2 (σταθερά b_3 του δεξιού μέλους στον χαλαρό 3^ο περιορισμό του παραδείγματος 2.11).*

κάποια σημασία. Ο περιορισμός παραμένει χαλαρός[70] με διαφορετική περιθώρια -μεγαλύτερη- τιμή: δεν υπάρχει άνω όριο για το εύρος εφικτότητας του b_3. Μείωση του b_3 μπορεί να προκαλεί συρρίκνωση της εφικτής περιοχής, η οποία όμως δεν επιδρά στη βέλτιστη λύση όσο είναι λιγότερη από την περιθώρια τιμή των 30 μονάδων: κάτω όριο για το εύρος εφικτότητας του b_3 είναι η τιμή $120 - 30 = 90$. Για τιμές του $b_3 \leq 90$ ο 3ος περιορισμός γίνεται δεσμευτικός και η βέλτιστη λύση μεταβάλλεται και προκύπτει στην τομή των περιοριστικών ευθειών ① και ③ (π.χ. όταν $b_3 = 70$ η εφικτή περιοχή ορίζεται από το πολύγωνο $ΑΒΓ_1Ε_1$ και η βέλτιστη λύση έχει μετακινηθεί στο σημείο $Γ_1$).

Κάθε μεταβολή του b_3 στο εύρος εφικτότητας $[90, \infty)$ αφήνει αναλλοίωτη τη βέλτιστη λύση κι άρα και την τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης. Επομένως *ο ρυθμός μεταβολής της Z σε σχέση με το δεξιό μέλος του 3ου (χαλαρού) περιορισμού μέσα στο εύρος εφικτότητάς του είναι μηδενικός: η δυϊκή τιμή απορροφητικότητας του ΔΛ2 ισούται με 0.* Αύξηση της ζήτησης κατά μία μονάδα δε θα μεταβάλλει το συνολικό κέρδος.

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί το εύρος εφικτότητας για το δεξιό μέλος ενός πλεονάζοντος περιορισμού.

Άλλες μορφές ανάλυσης ευαισθησίας

Άλλα ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν από την ανάλυση ευαισθησίας ενός π.γ.π. αφορούν σε ταυτόχρονες μεταβολές περισσοτέρων από μίας παραμέτρων, αλλαγές στους συντελεστές a_{ij} (σχέση 1.2), προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών, και προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών. Για τα ερωτήματα αυτά, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αλγεβρική αντιμετώπιση του θέματος (§X.X).

Η ανάλυση που προηγήθηκε σχετικά με την ευαισθησία των αντικειμενικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών, αφορά περιπτώσεις όπου μία μόνο παράμετρος μεταβάλλεται κάθε φορά ενώ όλες οι

[70] Μάλιστα αν η μετακίνηση είναι τόση ώστε $b_3 \geq 230$, ο περιορισμός θα καταστεί πλεονάζων.

υπόλοιπες παραμένουν αμετάβλητες. Δεν είναι όμως λίγες οι περιπτώσεις που υπάρχει ενδιαφέρον για τη διερεύνηση των συνεπειών που θα έχει στη βέλτιστη λύση η ταυτόχρονη μεταβολή περισσοτέρων παραμέτρων. Το θέμα αντιμετωπίζεται γενικότερα με τον 100% κανόνα:

- ταυτόχρονες αλλαγές των αντικειμενικών συντελεστών ενός π.γ.π. (εντός του ατομικού εύρους αριστότητας) δεν επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση[71] αν το άθροισμα των επιμέρους ποσοστιαίων αλλαγών είναι το πολύ 100%.
- ταυτόχρονες αλλαγές των δεξιών μελών δεσμευτικών περιορισμών[72] ενός π.γ.π. (εντός του ατομικού εύρους εφικτότητας) δεν επηρεάζουν τη βέλτιστη βάση[73] αν το άθροισμα των επιμέρους ποσοστιαίων αλλαγών είναι το πολύ 100%. Η βέλτιστη λύση (και κατά συνέπεια και η τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης) θα μεταβληθεί.

- Αν σ' ένα π.γ.π. προσθέσουμε ακόμη έναν περιορισμό, τότε η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια στην περίπτωση που τον ικανοποιεί. Στην αντίθετη περίπτωση το πρόβλημα πρέπει να λυθεί από την αρχή.
- Η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια αν από ένα π.γ.π. αφαιρέσουμε κάποιον από τους χαλαρούς περιορισμούς. Αν όμως ο περιορισμός που διαγράφεται είναι δεσμευτικός, το πρόβλημα θα πρέπει να λυθεί από την αρχή.

Οι πληροφορίες που αποκτούμε με την ανάλυση ευαισθησίας για το μοντέλο είναι μεγάλης σημασίας αφού επιτρέπουν την απόδοση της δέουσας προσοχής σ' εκείνα τα στοιχεία (παραμέτρους) που φαίνονται ότι επηρεάζουν σημαντικά τις ζητούμενες αποφάσεις (λύση). Η τακτική της εκ νέου επίλυσης, χωρίς να είναι λανθασμένη, δε διερευνά τους μηχανισμούς που επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση και γι αυτό θα πρέπει να αποφεύγεται.

[71] Δε συμβαίνει βέβαια το ίδιο με την τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης.

[72] Στην περίπτωση που η μεταβολή αφορά δεξιά μέλη χαλαρών περιορισμών, εφόσον η επιχειρούμενη μεταβολή είναι μέσα στο εύρος εφικτότητας του καθενός εξ αυτών, η βέλτιστη λύση παραμένει αμετάβλητη.

[73] Οι *μεταβλητές* που έχουν μη-μηδενικές τιμές στη βέλτιστη λύση ενός π.γ.π. ονομάζονται *βασικές* (βλ. και ορισμό 3.2). Χάριν ευκολίας, το σύνολο των βασικών μεταβλητών αποκαλείται *βάση*.