Τα βάρη (σε gr) 8 ποντικών, οι οποίοι για ένα μήνα υποβλήθηκαν σε καθημερινές μεταγγίσεις τεχνητού αίματος, είναι μετά τη διαδικασία τα εξής:

75 78 95 71 80 69 77 65

Υποθέτοντας ότι το βάρος των ποντικών αυτών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ, να ελέγξετε εάν σε επίπεδο σημαντικότητας α=10% δεχόμαστε την υπόθεση $H_0 : \mu \geqslant 85$gr έναντι της $H_1 : \mu < 85$gr. Ποια κατανομή χρησιμοποιήσατε και γιατί;

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 8$. Ο δειγματικός μέσος δίδεται από τον τύπο:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{\text{εδώ}}{=\!=} \frac{75 + \cdots + 65}{8} = \frac{610}{8} = \underline{\underline{76.25\ \mathrm{gr}}},$$

και η δειγματική διασπορά από τον τύπο:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \overset{\text{εδώ}}{=\!=} \frac{(75 - 76.25)^2 + \cdots + (65 - 76.25)^2}{7} = \frac{1.56 + \cdots + 126.56}{7}$$

$$= 82.50 = (9.08)^2, \quad \text{οπότε η τυπική απόκλιση είναι:} \quad S = \underline{\underline{9.08\ \mathrm{gr}}}$$

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και η εναντία υπόθεση είναι της μορφής

$$H_1 : \mu < 85$$

Τρόπος 1^{ος} Κατασκευάζουμε διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) συντελεστού εμπιστοσύνης (σ.ε.) $1 - 2\alpha^*$, όπου α^* το επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) του ελέγχου. Εδώ $1 - 2\alpha^* = 1 - 2 \times 0.1 = 0.8 (= 80\%)$.

Απορρίπτουμε την H_0 όταν Άνω Άκρο< 85.

Το δ.ε. για το μέσο κανονικής με άγνωστη διασπορά και μικρό μέγεθος δείγματος n=8, σ.ε. $1 - \alpha$, δίδεται από τον τύπο

$$\left[\overline{X} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \overset{\text{εδώ}}{=\!=} \left[\overline{X} - t_7(0.1)\frac{S}{\sqrt{8}},\ \overline{X} + t_7(0.1)\frac{S}{\sqrt{8}}\right]$$

εφόσον, $1 - \alpha = 0.8 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.1$ και $t_7(0.1) = 1.415$, το

$$\left[76.25 - 1.415\frac{9.08}{\sqrt{8}},\ 76.25 + 1.415\frac{9.08}{\sqrt{8}}\right] = [76.25 - 1.415 \times 3.21,\ 76.25 + 1.415 \times 3.21] =$$

$$[76.25 - 4.543,\ 76.25 + 4.543] = \underline{\underline{[71.71,\ 80.79]}}$$

είναι το δ.ε. σ.ε. 80%, για το οποίο παρατηρούμε ότι:

Άνω Άκρο$=80.79 < 85$

άρα απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ. 10% και αποδεχόμαστε την H_1.

Τρόπος 2^{ος} Απορρίπτουμε την $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu < \mu_0$ σε ε.σ. α, όταν ισχύει:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{n-1}(\alpha).$$

Εδώ $\mu_0 = 85$, $\alpha = 0.1$ και αντιστοίχως έχουμε

$$T = \frac{76.25 - 85}{\frac{9.08}{\sqrt{8}}} = -2.725 < -1.415 = -t_7(0.1),$$

άρα απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ. 10% και αποδεχόμαστε την H_1.

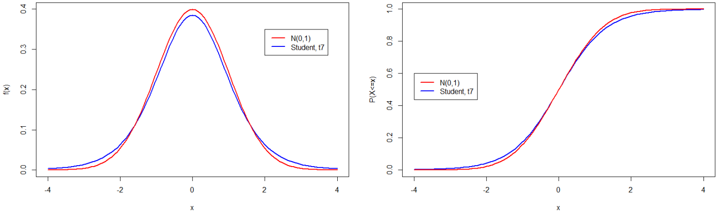
Να σημειωθεί ότι το p-value=CDF.T(-2.725,7)=0.0147.

Τα δεδομένα στην περίπτωση που μελετάμε προέρχονται από κανονική $N(\mu, \sigma^2)$ για την οποία δε γνωρίζουμε τη διασπορά. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε την ποσότητα

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό ($n = 8$), η κατανομή του Student με 7 βαθμούς ελευθερίας, t_7, διαφέρει από την $N(0, 1)$.

Η N(0,1) και η t_7 (η κατανομή του Student με 7 β.ε.)



Σχήμα: συναρτήσεις πυκνότητας, αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών

Ο έλεγχος και το p-value (significance)