Ειδικές συναρτήσεις: λογαριθμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές και αντίστροφες αυτών

Σύνολα

Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

The Conception of Power or Cardinal Number

By an "aggregate" (*Menge*) we are to understand any collection into a whole (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*) M of definite and separate objects *m* of our intuition or our thought. These objects are called the "elements" of M.

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

- ✓ με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- ✓ με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- ✓ με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και
- ✓ με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α».

Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}, \quad \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}, \quad -2 \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

Σύνολα

το σύνολο X αποτελείται από τα στοιχεία $x, y, z, \ldots$, χρησιμοποιούμε συνήθως το συμβολισμό

$$X = \{x, y, z, \ldots\}$$

θεώρηση των πραγματικών αριθμών ως σημείων μιας ευθείας που εκτείνεται επ΄απείρον και προς τις δύο κατευθύνσεις

Στους πραγματικούς αριθμούς υπάρχει και μια σχέση διάταξης «<». Με βάση αυτή τη σχέση όταν γράφουμε $\alpha < \beta$ θα σημαίνει ότι ο πραγματικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον α. Γεωμετρικά $\alpha < \beta$ θα σημαίνει επίσης ότι πάνω στην ευθεία ο αριθμός β θα βρίσκεται δεξιά του αριθμού α.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, που θα συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ περιέχει κάποια σημαντικά υποσύνολα, όπως είναι:
Το σύνολο των ***φυσικών*** αριθμών

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

το σύνολο των ***ακεραίων*** αριθμών

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

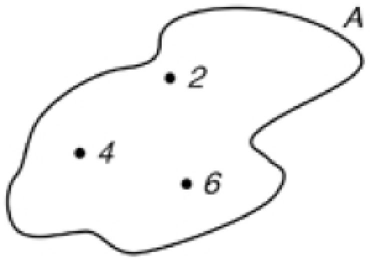
και το σύνολο των ***ρητών*** αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

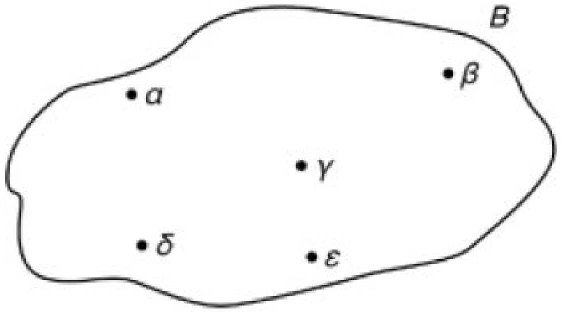
Ο προηγούμενος τρόπος της ***καταγραφής*** των στοιχείων δεν εφαρμόζεται όμως στα περισσότερα σύνολα. Συνήθως ακολουθείται η μέθοδος της ***περιγραφής*** των στοιχείων τους. Έτσι το σύνολο $\mathbb{N}$ περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο: $\mathbb{N} = \{x : x$ *θετικός ακέραιος αριθμός*$\}$ και διαβάζεται «*x, όπου x είναι θετικός ακέραιος αριθμός*».

Σύνολα

Η σχηματική παράσταση ενός συνόλου είναι παρόμοια με τις απεικονίσεις των πόλεων σ' ένα γεωγραφικό χάρτη, και ονομάζεται ***διάγραμμα του Venn*** (1834-1923). Κατασκευάζουμε ένα περίγραμμα εντός του οποίου τοποθετούμε τα στοιχεία του συνόλου τα οποία γράφουμε με τα σύμβολά τους και μια μικρή κουκίδα δίπλα απ' αυτά. Για παράδειγμα το σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$ έχει την ακόλουθη σχηματική παράσταση:

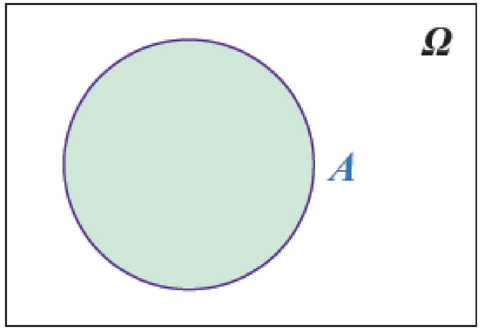


το σύνολο $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ έχει την παράσταση

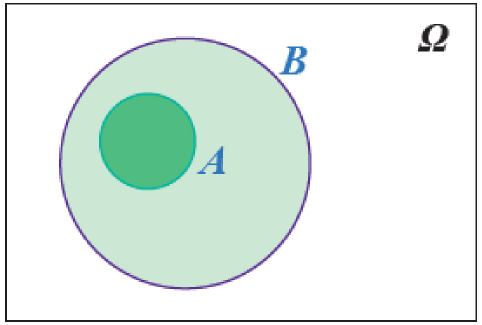


- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με **Ω**. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.

Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.



Αν $A \subseteq B$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.



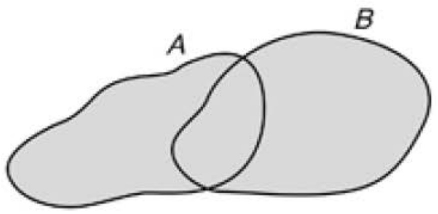
Σύνολα: Πράξεις

Κάθε σύνολο είναι πλήρως καθορισμένο από τα στοιχεία που περιέχει, και συνεπώς δύο σύνολα A, B θα είναι ***ίσα*** αν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $A = B$. Το σύνολο A είναι ***υποσύνολο*** του B, και συμβολίζεται $A \subseteq B$, αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Αν επί πλέον υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $\beta \in B$ ώστε $\beta \notin A$, τότε το A είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** του B και συμβολίζεται $A \subset B$. Προφανώς $A = B$ αν και μόνον αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Το ***κενό*** σύνολο, συμβολίζεται με $\varnothing$, και είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Το κενό σύνολο θεωρείται ως υποσύνολο κάθε συνόλου.

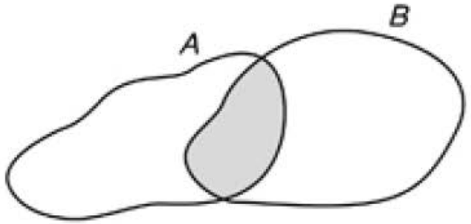
Αν δοθούν δύο σύνολα A, B μπορούμε να κατασκευάσουμε νέα σύνολα με τις ακόλουθες πράξεις:

(i) Η ***ένωση*** των A, B είναι το σύνολο $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ή } x \in B\}$ και έχει την ακόλουθη σχηματική παράσταση



$A \cup B$ είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος.

(ii) Η ***τομή*** των A, B είναι το σύνολο $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ και } x \in B\}$ και έχει τη σχηματική παράσταση



$A \cap B$ είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος.

Σύνολα: Πράξεις

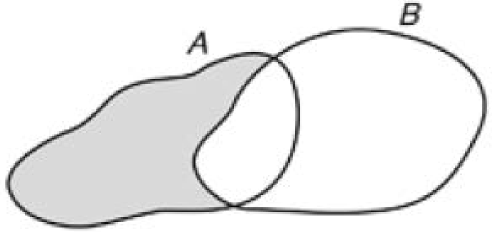
Αν $A \cap B = \varnothing$ τα σύνολα A, B λέγονται **ξένα**.
Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma),$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

(iii) Το ***συμπλήρωμα*** του B ως προς το A ή η ***συνολοθεωρητική διαφορά*** των A και B είναι το σύνολο

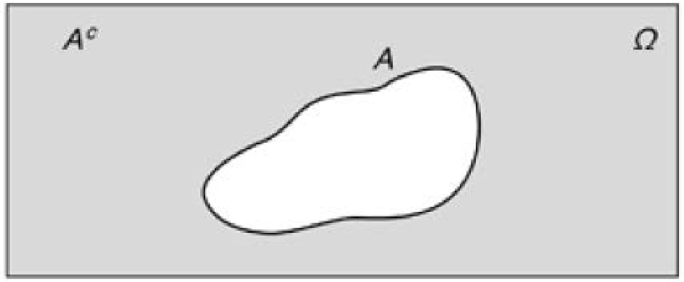
$$A \setminus B = \{x\colon x \in A,\ x \notin B\}.$$



$A \setminus B$ είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος.

Το ***απόλυτο συμπλήρωμα*** ή απλά το ***συμπλήρωμα*** ενός συνόλου A συμβολίζεται A^c ή $\Omega \setminus A$ και είναι το σύνολο

$$A^c = \Omega \setminus A = \{x\colon x \in \Omega,\ x \notin A\}.$$



A^c είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος.

Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω X και Y δύο (μη κενά) σύνολα. Τότε, το σύνολο των *διατεταγμένων ζευγών* (x, y), όπου $x \in X$ και το $y \in Y$ (ήτοι ζευγών στα οποία διακρίνουμε πρώτο και δεύτερο στοιχείο), δηλαδή το σύνολο

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

ονομάζεται το *καρτεσιανό γινόμενο* των συνόλων X και Y. Από τον ορισμό του συνόλου $X \times Y$ έχουμε

$$(1.7) \qquad (x, y) = (x_1, y_1) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 \quad \text{και} \quad y = y_1 .$$

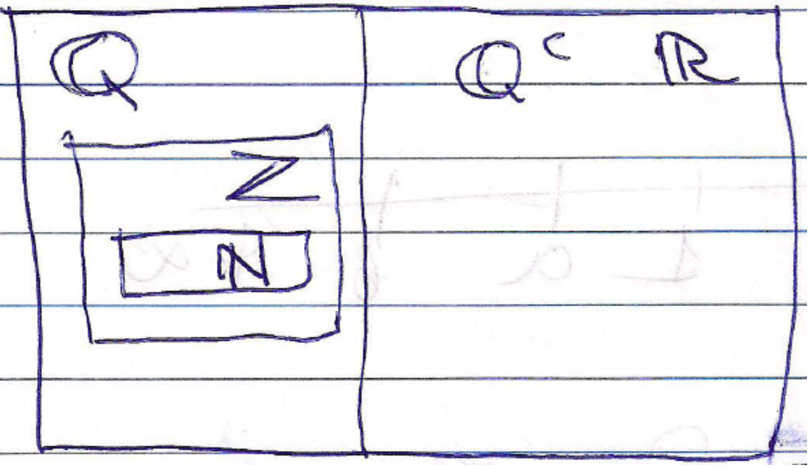
Ως παραδείγματα, θεωρούμε τα καρτεσιανά γινόμενα

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Σύνολα Αριθμών

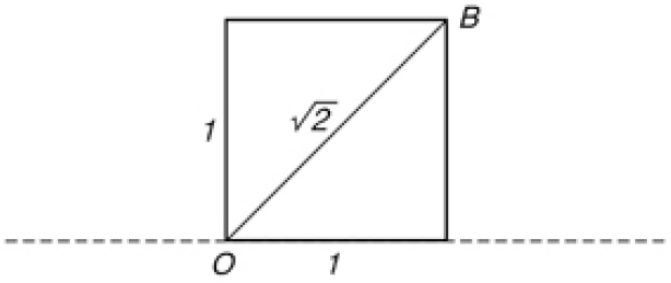


$\mathbb{Q}^c$ άρρητοι

Στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ισχύει μια προφανής αλλά πολύ βασική ιδιότητα:

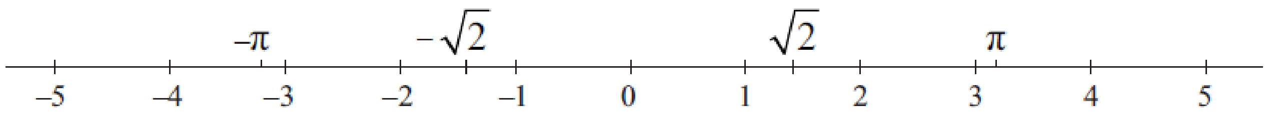
«Ανάμεσα σε κάθε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχει ένας άλλος ρητός».

Θα δούμε παρακάτω ότι αν α, β ***πραγματικοί*** αριθμοί με $\alpha < \beta$, τότε επίσης υπάρχει ρητός αριθμός r (και μάλιστα άπειροι ρητοί) ώστε $\alpha < r < \beta$. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι οι ρητοί αριθμοί είναι ***πυκνοί*** στην ευθεία. Η παραπάνω ιδιότητα (στα αρχικά στάδια μελέτης των αριθμών) οδήγησε στην εσφαλμένη εντύπωση ότι ολόκληρη η ευθεία μπορεί να καλυφθεί από ρητούς αριθμούς. Η αντίληψη αυτή καταρρίφθηκε από τους Πυθαγορείους (450-430 π.Χ.) οι οποίοι ανακάλυψαν ότι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι μεγέθη ασύμμετρα.



Διαστήματα

άξονα των πραγματικών αριθμών.



Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \le x \le \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με **[α, β]**.

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με **(α, β)**.

✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα [α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha \le x < \beta}$ και

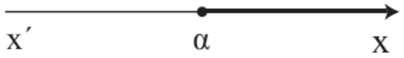
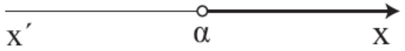
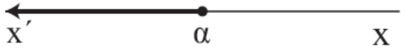
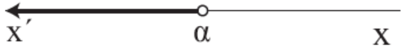
✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα (α, β]** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha < x \le \beta}$.

Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha \le x}$ συμβολίζεται με **[α, +∞)**, ενώ

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{x \le \alpha}$ συμβολίζεται με **(–∞, α]**.

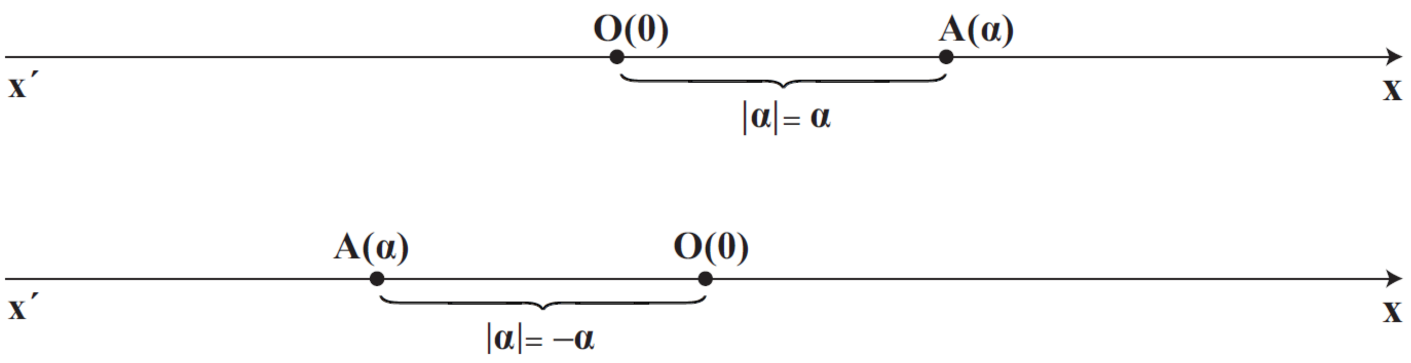
Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα **(α, +∞)** και **(–∞, α)**. Τα σύμβολα +∞ και –∞, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.



η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και συμβολίζεται με |**α**|.

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητα

$|a|^2 = a^2$, $|a\beta| = |a||\beta|$,

$||a| - |\beta|| \leq |a+\beta| \leq |a| + |\beta|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\left|\frac{a}{\beta}\right| = \frac{|a|}{|\beta|}$ $(\beta \neq 0)$

Αν θ > 0, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

$a > 0$

$|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$|x| > a \Rightarrow x < -a$ ή $x > a$

Συναρτήσεις

Σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, ιδιαίτερα των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας, είναι πολύ συνηθισμένη η αναφορά σε αλληλοεξαρτώμενες ποσότητες. Οι ποσότητες αυτές μεταβάλλονται παίρνοντας τιμές που συνδέονται άμεσα με την εκάστοτε εφαρμογή. Οι μεταβλητές αυτές ποσότητες, που παριστάνονται με γράμματα της αλφαβήτου όπως $x, y, \omega, \alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ κ.λπ., ονομάζονται μεταβλητές σε αντίθεση με ποσότητες που επίσης μπορούν να παριστάνονται με γράμματα, αλλά είναι σταθερές, όπως για παράδειγμα η σταθερά της βαρύτητας g, η σταθερά $\pi = 3.14159\ldots$, κ.λπ.

Όταν μία μεταβλητή μεταβάλλεται ελεύθερα παίρνοντας τιμές από ένα σύνολο, έστω A, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή. Αντίθετα, μία μεταβλητή ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή, όταν οι τιμές της, που βρίσκονται σ' ένα σύνολο B, εξαρτώνται από τις τιμές μίας ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παραδείγματα

1. Ο όγκος ενός κύβου ακμής α είναι, ως γνωστόν,

$$V = \alpha^3.$$

Το α παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το V την εξαρτημένη μεταβλητή.

2. Η επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας r είναι

$$E = 4\pi r^2.$$

Το r είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, το π είναι σταθερά, ενώ το E είναι η εξαρτημένη από το r μεταβλητή. Και στα δύο παραδείγματα τα σύνολα A και B όπου παίρνουν τιμές η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Ας θεωρήσουμε τώρα μόνον το πρώτο παράδειγμα, του κύβου, και ας αλλάξουμε το σύνολο A από το οποίο παίρνει τιμές η ακμή α. Έτσι, αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ σε μέτρα, τότε οι τιμές του όγκου σε κυβικά μέτρα απαρτίζουν το σύνολο $B = \{1, 8, 27, 64\}$, ενώ αν $A = \{5, 6\}$, τότε το B γίνεται $B = \{125, 216\}$.

Σχηματικά προκύπτουν οι παρακάτω αντιστοιχίες

$$(I) \qquad \alpha \quad \overset{V=\alpha^3}{\longrightarrow} \qquad V \qquad\qquad (II) \quad \alpha \quad \overset{V=\alpha^3}{\longrightarrow} \qquad V$$

$$A = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right\} \longrightarrow B = \left\{ \begin{array}{r} 1 \\ 8 \\ 27 \\ 64 \end{array} \right\} \qquad A = \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \right\} \longrightarrow B = \left\{ \begin{array}{c} 125 \\ 216 \end{array} \right\}.$$

Στα ζεύγη αυτά, που λέγονται διατεταγμένα, το πρώτο στοιχείο ανήκει στο σύνολο A και το δεύτερο στο σύνολο B. Έτσι η αντιστοιχία (I) περιγράφεται από το σύνολο $\Omega_1 = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64)\}$, ενώ η αντιστοιχία (II), που βασίζεται στον ίδιο τρόπο αντιστοίχισης ($V = \alpha^3$), περιγράφεται από το σύνολο $\Omega_2 = \{(5, 125), (6, 216)\}$.

το αποτέλεσμα καθορίζεται από τους εξής παράγοντες:

α) τον "τρόπο" ή το "νόμο" αντιστοίχισης,

β) τα σύνολα A και B των τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές.

Συναρτήσεις

Έστω τώρα ανεξάρτητη μεταβλητή x, που παίρνει τιμές από το σύνολο A, και y εξαρτημένη από το x μεταβλητή, που παίρνει τιμές στο σύνολο B. Αν κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μία ακριβώς τιμή του y, τότε η αντιστοιχία αυτή ονομάζεται μονότιμη συνάρτηση ή απλά συνάρτηση.

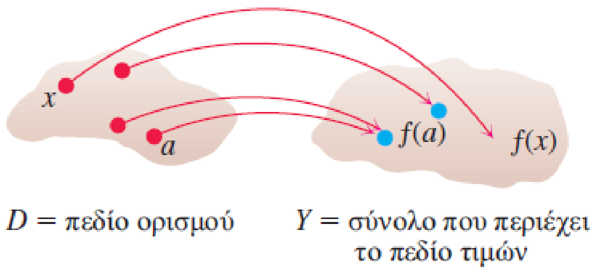
Έτσι, όταν γράφουμε $y = f(x)$, $x \in A$ εννοούμε ότι f είναι ο νόμος της αντιστοίχισης, που ονομάζεται και τύπος της συνάρτησης, A είναι το σύνολο ορισμού ή πεδίο ορισμού, ενώ το σύνολο B, στο οποίο παίρνει τιμές το y και ονομάζεται πεδίο τιμών, προκύπτει από το A και τον τύπο f της συνάρτησης.

Γενικότερα το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f θεωρείται το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ για το οποίο μέσω του κανόνα αντιστοίχισης οι τιμές $f(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί.(*)

Το πεδίο τιμών B της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι το παρακάτω σύνολο που συμβολίζεται με $f(A)$:

$$B = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \; \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}, \text{ για κάποιο } \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}.$$

ΣΧΗΜΑ 1.1 Ένα «μηχανιστικό» διάγραμμα για τη συνάρτηση.



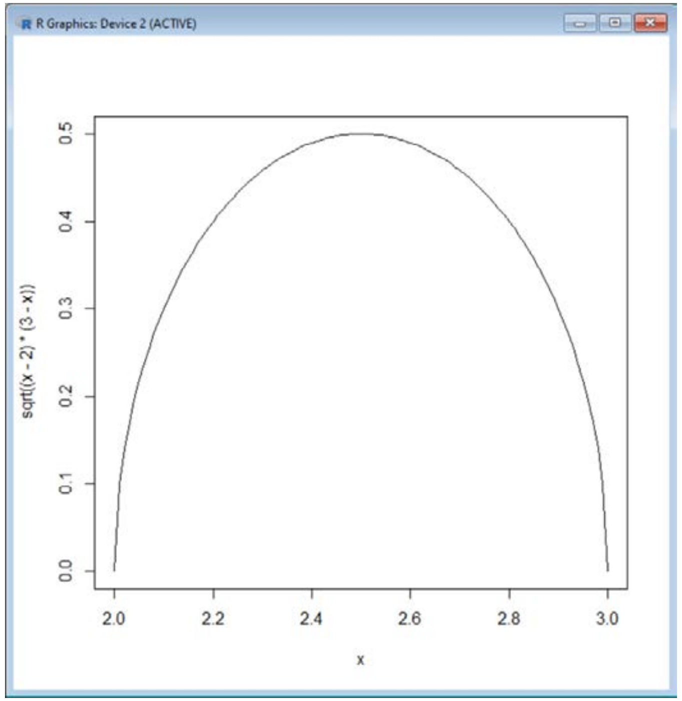
ΣΧΗΜΑ 1.2 Μια συνάρτηση από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο Y αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο του Y σε κάθε στοιχείο του D.

Παραδείγματα

1. Ο τύπος $y = f(x) = x^2$ με το σύνολο $A = \mathbb{R}$ ως πεδίο ορισμού και το σύνολο $B = \mathbb{R}_0^+$ ως πεδίο τιμών, ορίζουν μία συνάρτηση. $\mathbb{R}_0^+$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός.

2. Ο τύπος $y = g(x) = \dfrac{1}{x}$ με το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{0\}$ ως πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο $B = \mathbb{R} - \{0\}$ ορίζουν συνάρτηση.

3. Ο τύπος $w = h(\theta) = \sqrt{(\theta - 2)(3 - \theta)}$ με πεδίο ορισμού A το κλειστό διάστημα $[2, 3]$ και πεδίο τιμών B το κλειστό διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$ ορίζουν συνάρτηση.



Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού (x)	Πεδίο τιμών (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

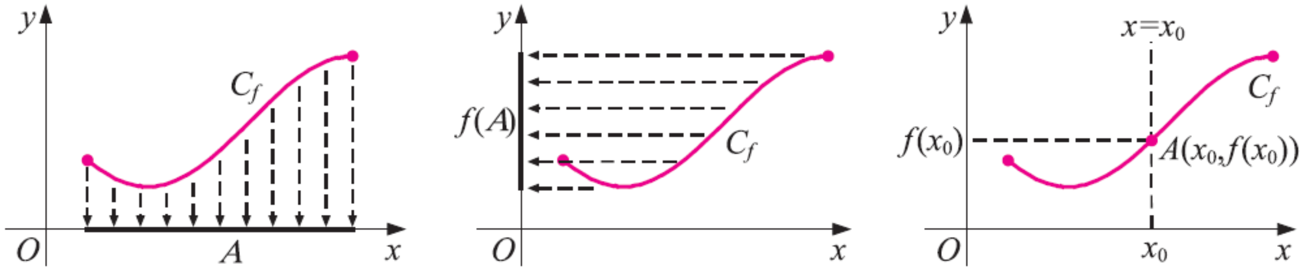
<u>Γραφική παράσταση</u> ή <u>γράφημα</u> μίας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η αποτύπωση στο επίπεδο των ζευγών τιμών $(x, y = f(x))$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x διατρέχει το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. Για να γίνει αυτή η απεικόνιση, είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός συστήματος συντεταγμένων που είναι συνήθως το γνωστό μας ορθογώνιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

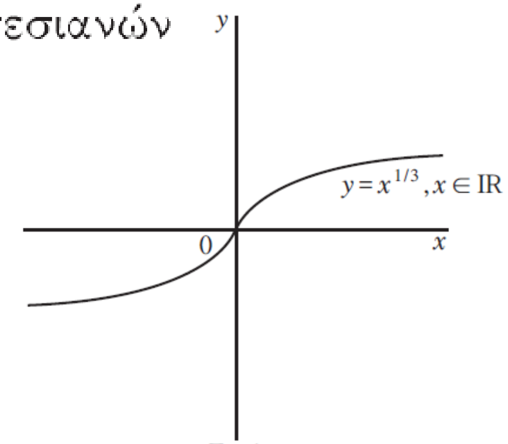
α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

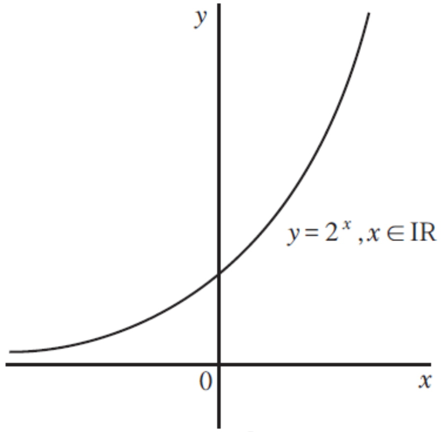
γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f



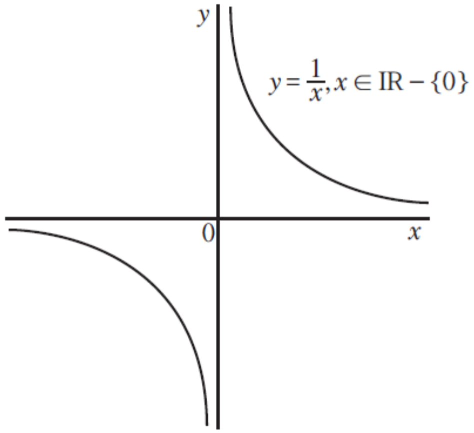
(α) (β) (γ)



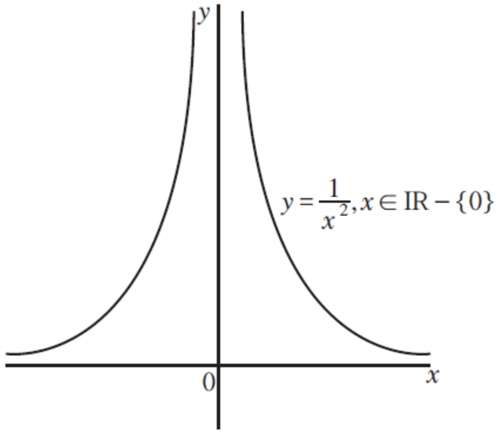
Σχ. 1α



Σχ. 1β



Σχ. 1γ

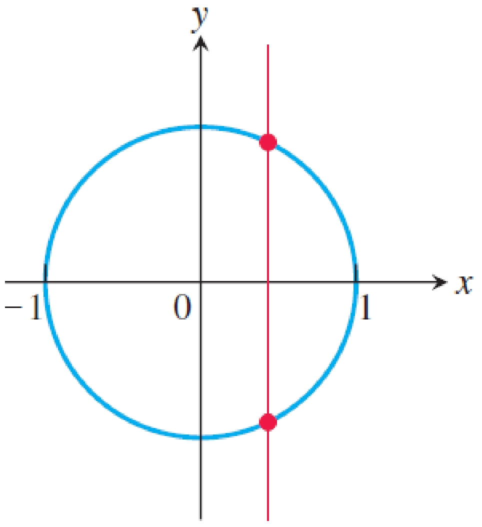


Σχ. 1δ

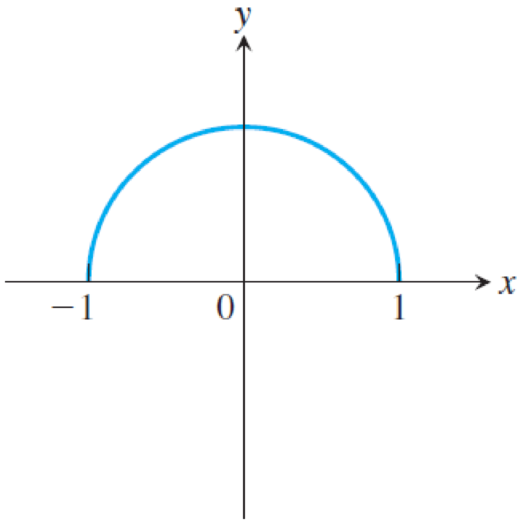
Συναρτήσεις: Γραφική Παράσταση

Δεν είναι όλες οι καμπύλες του επιπέδου γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Μια συνάρτηση f μπορεί να πάρει μόνο μία τιμή $f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της, έτσι μια *κατακόρυφη* ευθεία δεν μπορεί να τέμνει το γράφημα μιας συνάρτησης περισσότερες από μία φορές. Αν το a ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, τότε η κατακόρυφη ευθεία $x = a$ θα τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο μοναδικό σημείο $(a, f(a))$.

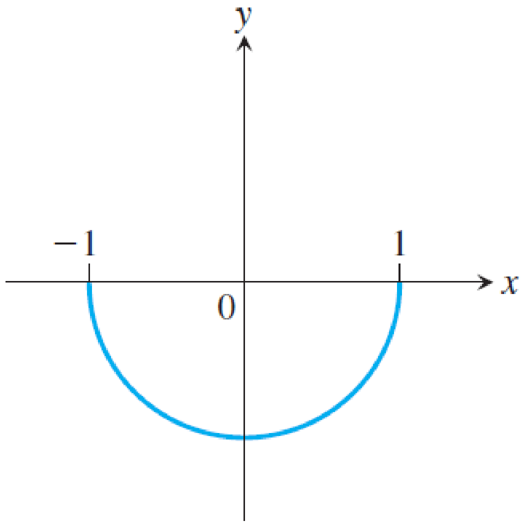
Ένας κύκλος δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, διότι κάποιες κατακόρυφες ευθείες τον τέμνουν δύο φορές. Ο κύκλος στο Σχήμα α, ωστόσο, περιέχει γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x, όπως το άνω ημικύκλιο που ορίζεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και το κάτω ημικύκλιο που ορίζεται από τη συνάρτηση $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (Σχήματα β και γ).



(α) $x^2 + y^2 = 1$



(β) $y = \sqrt{1 - x^2}$

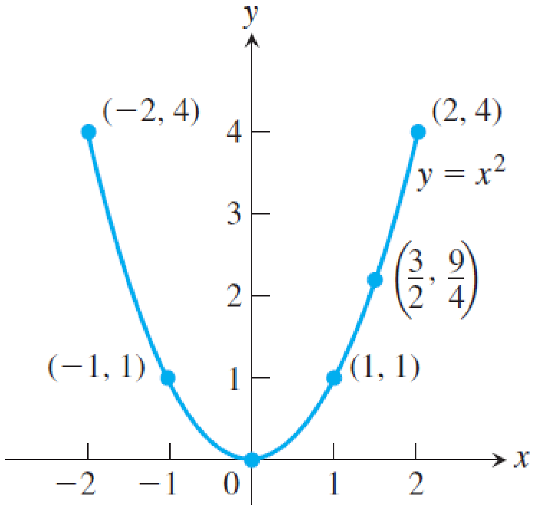


(γ) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

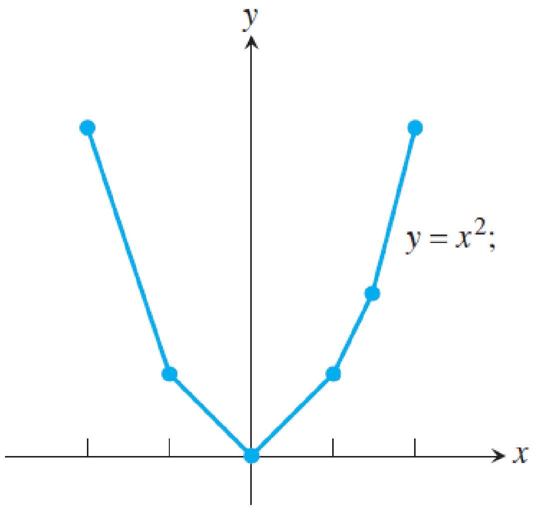
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ στο διάστημα $[-2, 2]$.

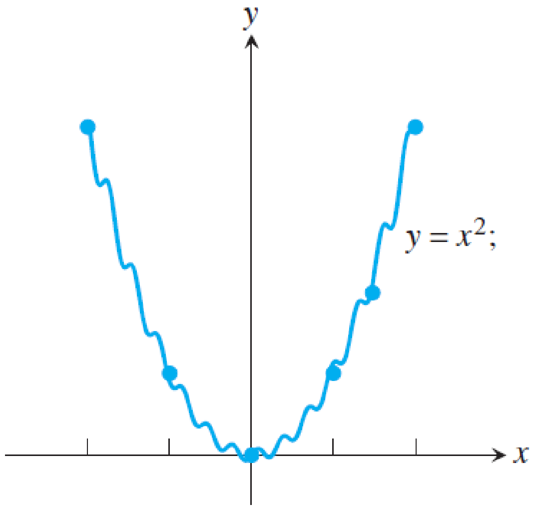
Λύση Κάνουμε έναν πίνακα ζευγών x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $y = x^2$. Τοποθετούμε τα σημεία (x, y) των οποίων οι συντεταγμένες εμφανίζονται στον πίνακα, και σχεδιάζουμε μια *λεία* καμπύλη (αναγράφοντας την εξίσωσή της) η οποία να διέρχεται από τα σημεία (δείτε το Σχήμα). ■



Σχημα Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος

Πώς όμως ξέρουμε ότι η γραφική παράσταση της $y = x^2$ δεν μοιάζει με κάποια από τις παρακάτω καμπύλες;



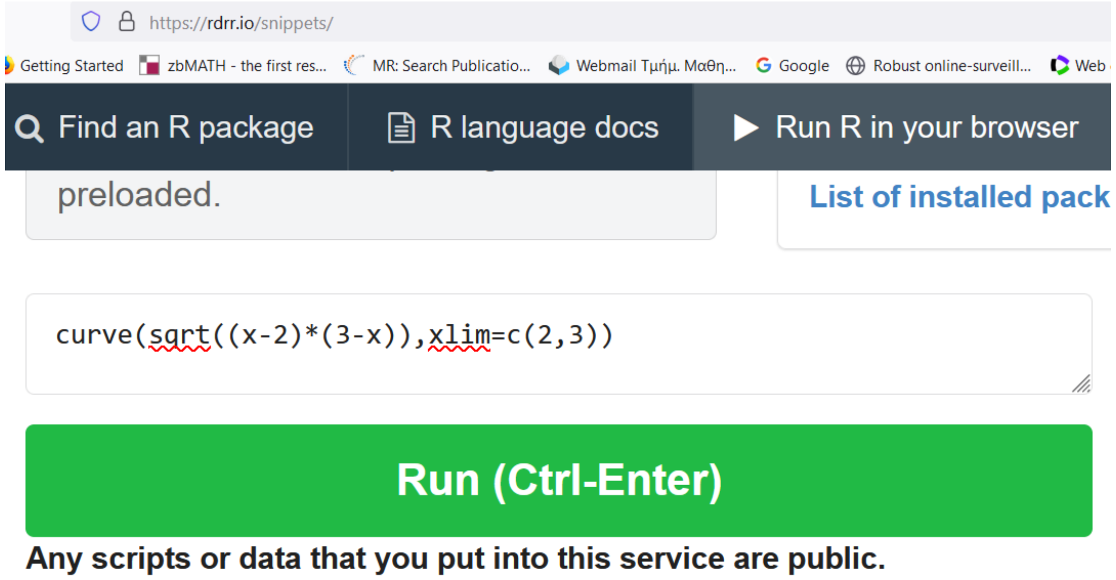


Θα μπορούσαμε ενδεχομένως να τοποθετήσουμε περισσότερα σημεία. Αλλά και πάλι, πώς θα τα συνδέαμε; Το βασικό ερώτημα παραμένει: Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε με σιγουριά τη μορφή της γραφικής παράστασης μεταξύ των σημείων;

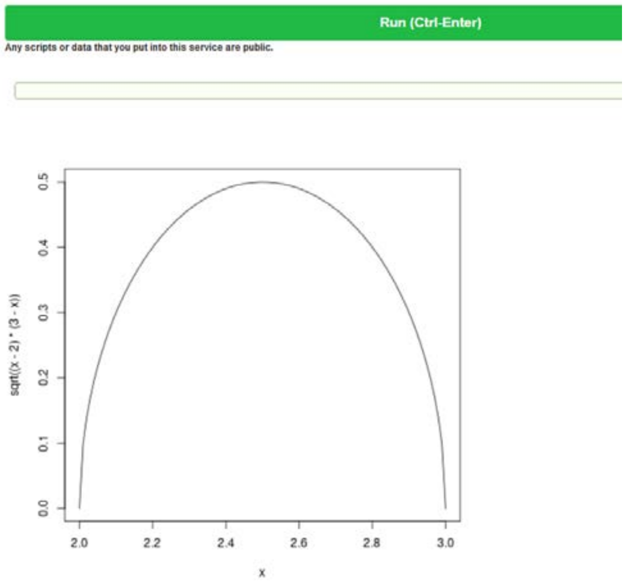
Συναρτήσεις: Γραφική Παράσταση, με χρήση της γλώσσας R

Μπορείτε να "τρέξετε" τις εντολές σε διάφορους "μεταγλωττιστές" που υπάρχουν στο διαδίκτυο. Δίδεται ενδεικτικά ο εξής:
https://rdrr.io/snippets/

1. γράφουμε τις εντολές στο παράθυρο
2. «πατάμε» το RUN



3. τα αποτελέσματα (είτε αριθμητικά, είτε γραφικές παραστάσεις) εμφανίζονται, συγκεντρωμένα, στη συνέχεια και μπορείτε να τα αντιγράψετε σε κάποιο αρχείο



Συναρτήσεις: Γραφική Παράσταση, με χρήση της γλώσσας R

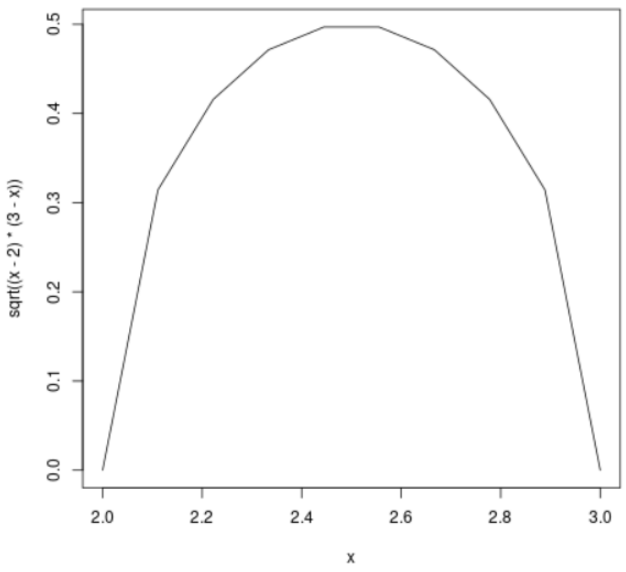
Με την εντολή

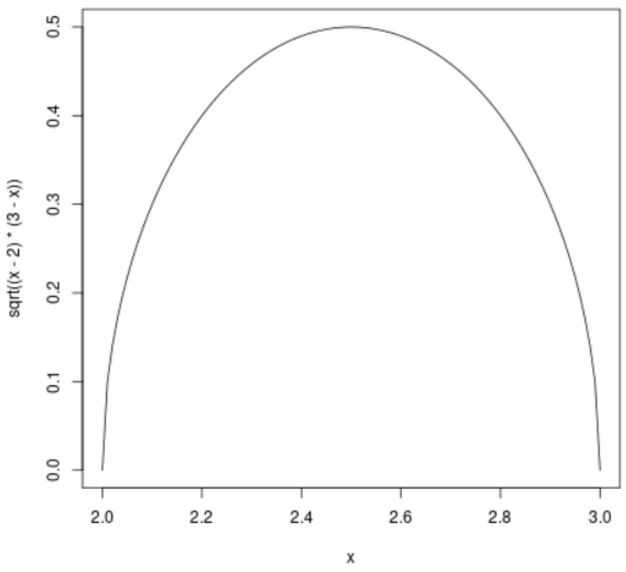
curve(sqrt((x-2)*(3-x)),from=2, to=3, n=10)

δημιουργούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\sqrt{(x-2)*(3-x)}$ στο διάστημα [2,3] που είναι το πεδίο ορισμού. Το n=10 είναι μια «προαιρετική» παράμετρος, δηλώνει πόσα σημεία (x,f(x)), με x ϵ [2,3], θα χρησιμοποιηθούν για τη «δημιουργία» της γραφικής παράστασης

```
curve(sqrt((x-2)*(3-x)),from=2, to=3, n=10)
curve(sqrt((x-2)*(3-x)),from=2, to=3, n=101)
```

Run (Ctrl-Enter)





Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης Χ. Ε., Γιαννακούλιας Ε., Γιωτόπουλος (2009). *Γενικά Μαθηματικά - Απειροστικος Λογισμός τόμος Ι,* Σ.ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ & ΣΙΑ
- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος. *ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΊΑ ΠΙΘΑΝΟΤΉΤΩΝ Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*, 22-0270 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ζαγούρας Χ.Γ., Γεωργίου, Δ.Ν. (2019). *Γενικά Μαθηματικά*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ
- Ζαφειροπούλου-Καρατζόγλου (2020). *Σημειώσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για το Τμήμα Φαρμακευτικής*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
- Τσίτσας (2003). *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός*, Σ.ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ & ΣΙΑ