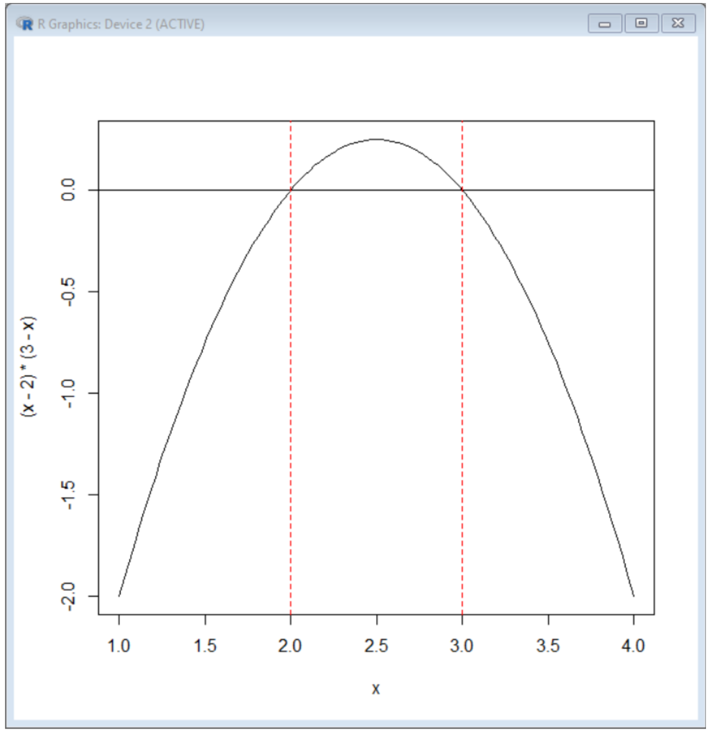
Ειδικές συναρτήσεις: λογαριθμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές και αντίστροφες αυτών

Συναρτήσεις

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού (x)	Πεδίο τιμών (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

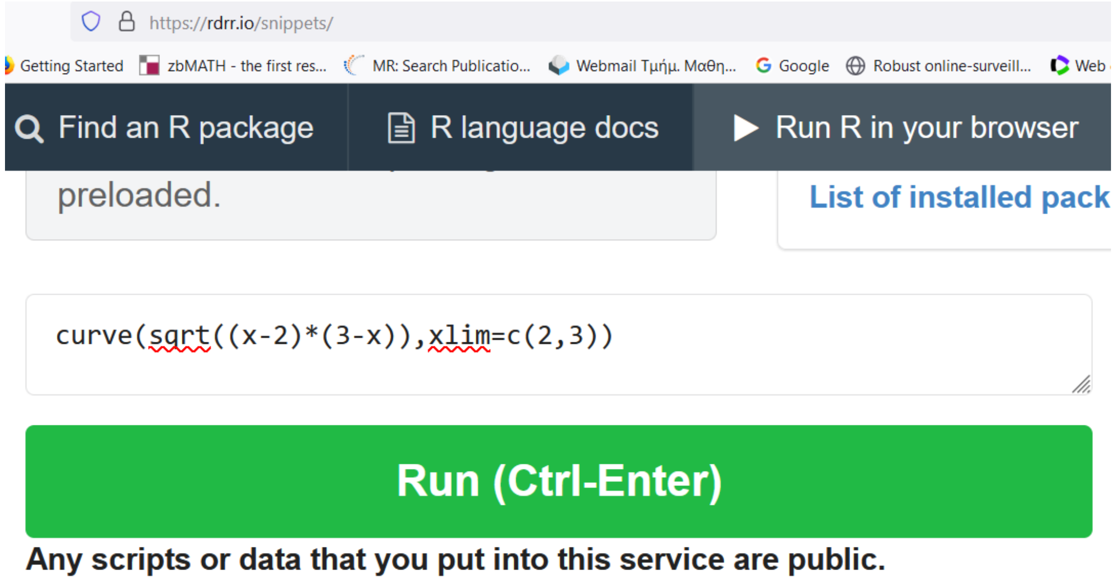
3. Ο τύπος $w = h(\theta) = \sqrt{(\theta - 2)(3 - \theta)}$ με πεδίο ορισμού A το κλειστό διάστημα $[2, 3]$ και πεδίο τιμών B το κλειστό διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$ ορίζουν συνάρτηση.



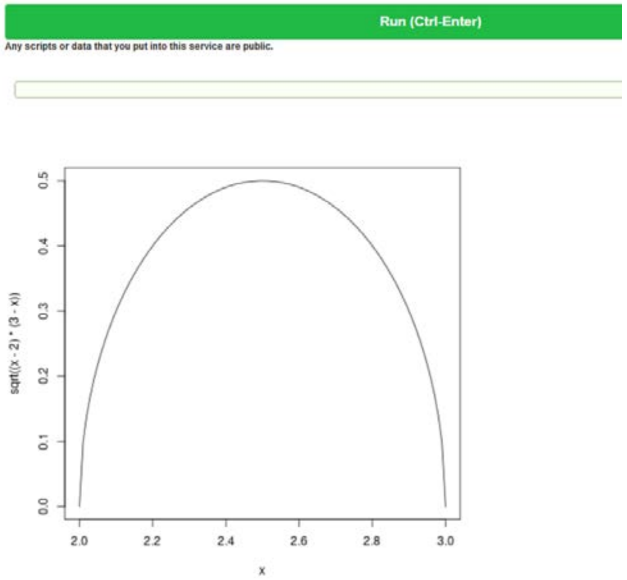
Συναρτήσεις: Γραφική Παράσταση, με χρήση της γλώσσας R

Μπορείτε να "τρέξετε" τις εντολές σε διάφορους "μεταγλωττιστές" που υπάρχουν στο διαδίκτυο. Δίδεται ενδεικτικά ο εξής:
https://rdrr.io/snippets/

1. γράφουμε τις εντολές στο παράθυρο
2. «πατάμε» το RUN



3. τα αποτελέσματα (είτε αριθμητικά, είτε γραφικές παραστάσεις) εμφανίζονται, συγκεντρωμένα, στη συνέχεια και μπορείτε να τα αντιγράψετε σε κάποιο αρχείο



Συναρτήσεις: Γραφική Παράσταση, με χρήση της γλώσσας R

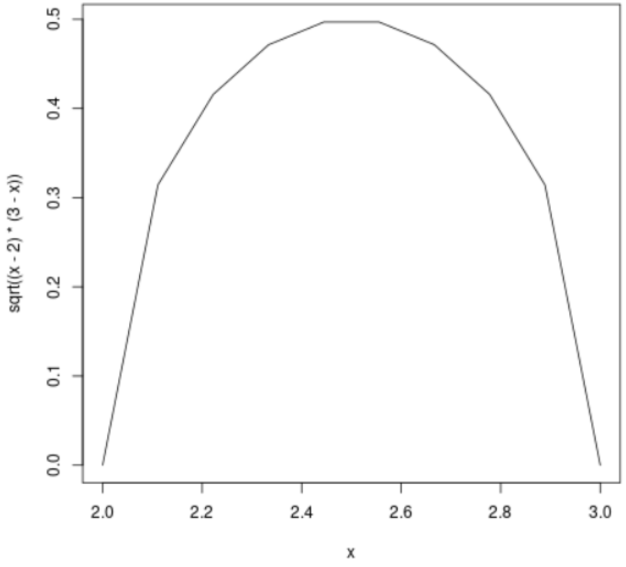
Με την εντολή

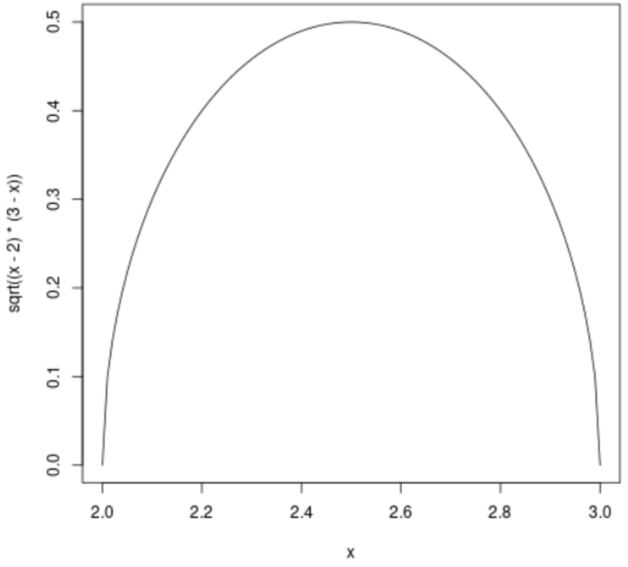
curve(sqrt((x-2)*(3-x)),from=2, to=3, n=10)

δημιουργούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\sqrt{(x-2)*(3-x)}$ στο διάστημα [2,3] που είναι το πεδίο ορισμού. Το n=10 είναι μια «προαιρετική» παράμετρος, δηλώνει πόσα σημεία (x,f(x)), με x ϵ [2,3], θα χρησιμοποιηθούν για τη «δημιουργία» της γραφικής παράστασης

```
curve(sqrt((x-2)*(3-x)),from=2, to=3, n=10)
curve(sqrt((x-2)*(3-x)),from=2, to=3, n=101)
```

Run (Ctrl-Enter)





Συναρτήσεις: Είδη

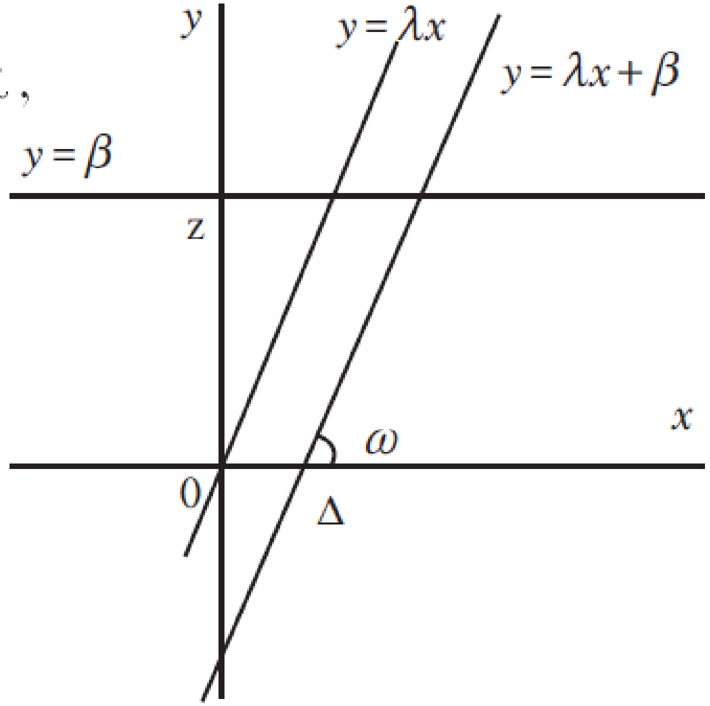
<u>Η πρωτοβάθμια ή γραμμική συνάρτηση</u>

Είναι η συνάρτηση με τύπο

$$y = f(x) = \lambda x + \beta\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \beta \in \mathbb{R}\,,$$

και πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

Το γράφημα της γραμμικής συνάρτησης είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\Delta(-\frac{\beta}{\lambda}, 0)$, εκτός αν $\lambda = 0$, οπότε η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα Ox και τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο $Z(0, \beta)$.



Στην περίπτωση που $\beta = 0$, $\lambda \neq 0$, η συνάρτηση έχει τύπο $y = \lambda x$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων O.

Ο συντελεστής λ του x ονομάζεται <u>συντελεστής κατεύθυνσης</u> της ευθείας. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα Ox, τότε $\lambda =$ εφω.

Συναρτήσεις: Είδη

Ο συντελεστής λ του x ονομάζεται συντελεστής κατεύθυνσης της ευθείας. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα Ox, τότε $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$.

Είναι φανερό ότι όλες οι γραμμικές συναρτήσεις με τον ίδιο συντελεστή κατεύθυνσης, λ, έχουν γραφήματα ευθείες παράλληλες.

Παράδειγμα

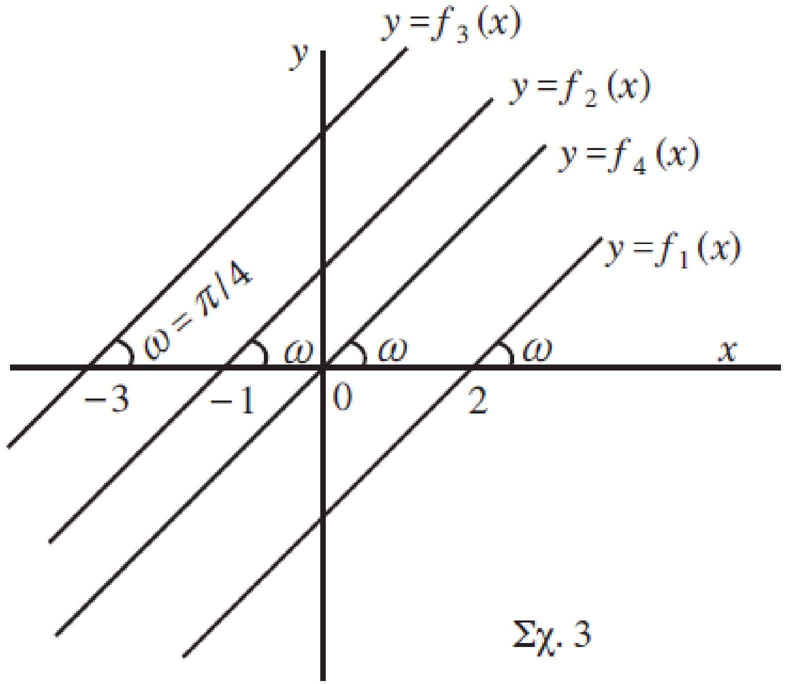
Οι γραμμικές συναρτήσεις με τύπους

$$y = f_1(x) = x - 2 \ ,$$

$$y = f_2(x) = x + 1 \ ,$$

$$y = f_3(x) = x + 3 \ ,$$

$$y = f_4(x) = x \ ,$$



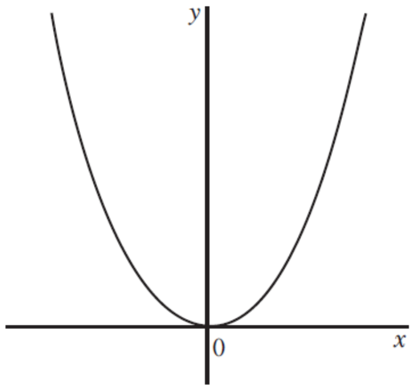
Σχ. 3

έχουν γραφήματα ευθείες παράλληλες (Σχ. 3). Έχουν συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda = 1$ και σχηματίζουν με τον άξονα Ox γωνία $\omega = \dfrac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = 1$.

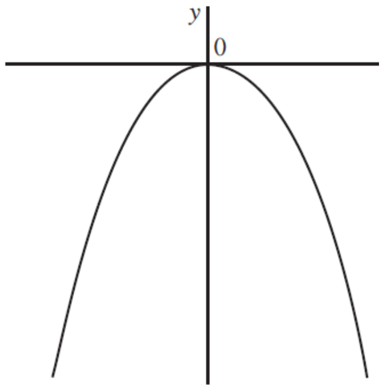
Το γράφημα της συνάρτησης $y = x$ είναι η διχοτόμος της γωνίας xOy.

Συναρτήσεις: Είδη

$y = x^2, a = 1, \beta = \gamma = 0$



$y = -x^2, a = -1, \gamma = \beta = 0$



<u>Η δευτεροβάθμια συνάρτηση</u>

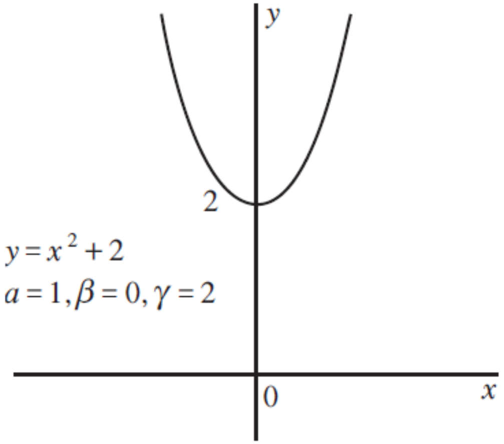
Είναι η συνάρτηση με τύπο

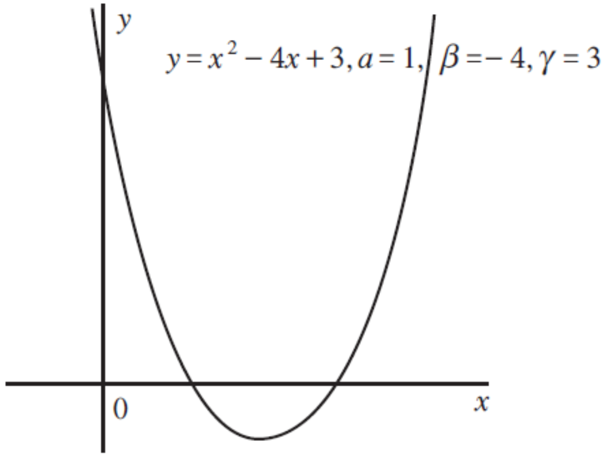
$$y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma\,, \quad \alpha\,, \beta\,, \gamma \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha \neq 0\,,$$

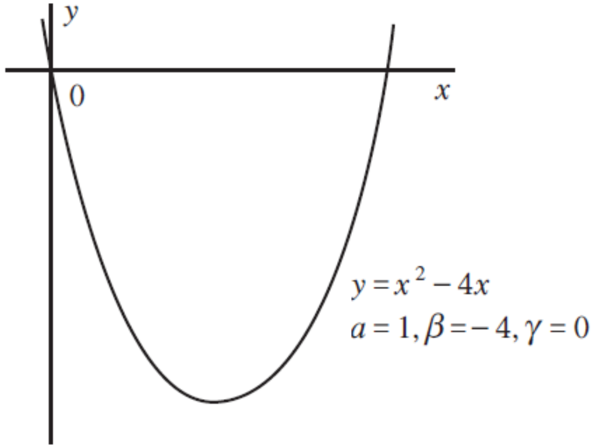
και πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

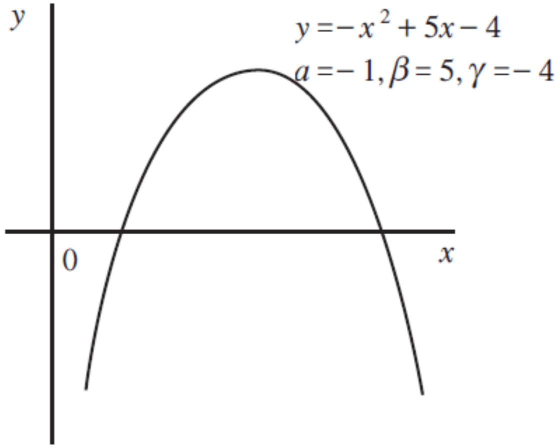
Το γράφημα αυτής της συνάρτησης, που ονομάζεται <u>παραβολή</u>, έχει μορφή που εξαρτάται από τις τιμές των συντελεστών α, β και γ.

Παρατηρούμε ότι όταν ο συντελεστής α του x^2 είναι θετικός, τότε η παραβολή έχει "στραμμένα τα κοίλα" προς τα άνω, ενώ όταν είναι αρνητικός η παραβολή "στρέφει τα κοίλα" προς τα κάτω.





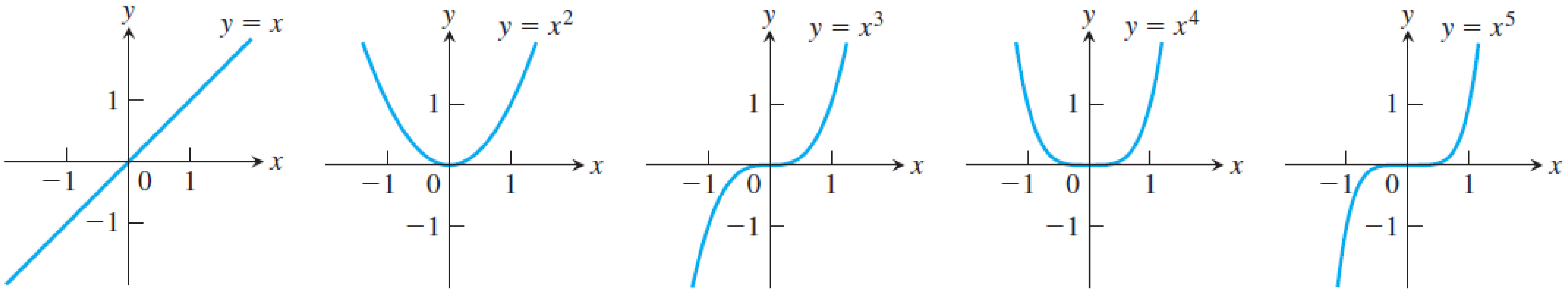




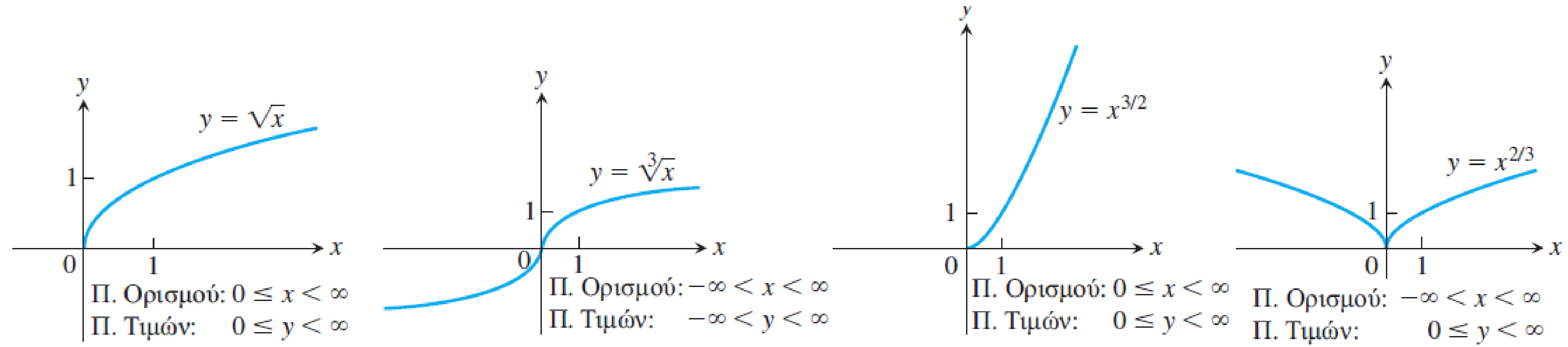
Συναρτήσεις δυνάμεων Μια συνάρτηση $f(x) = x^a$, όπου a σταθερά, ονομάζεται **συνάρτηση δύναμης**. Ας δούμε μερικές σημαντικές περιπτώσεις.

(α) $f(x) = x^a$ όπου $a = n$ θετικός ακέραιος.

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = x^n$, για $n = 1, 2, 3, 4, 5$, φαίνονται στο Σχήμα   Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται για όλες τις πραγματικές τιμές

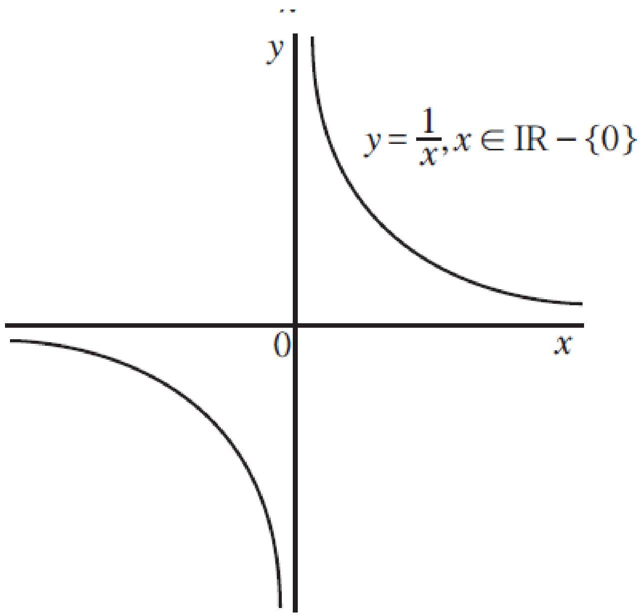


Σχημα Γραφικές παραστάσεις της $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, ορισμένης στο $-\infty < x < \infty$.



Σχημα Γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = x^a$ για $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, και $\frac{2}{3}$.

Συναρτήσεις: Είδη



Παράδειγμα

Η συνάρτηση με γράφημα αυτό του Σχήματος

$$y = f(x) = \frac{1}{x},$$

είναι ρητή συνάρτηση και έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν

Είναι η συνάρτηση με τύπο:

$$y = f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0\,, \;\; \alpha_0\,, \alpha_1\,, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}, \;\; \alpha_\nu \neq 0,$$

και πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

Η πρωτοβάθμια και η δευτεροβάθμια συνάρτηση που είδαμε προηγουμένως είναι παραδείγματα πολυωνυμικών συναρτήσεων.

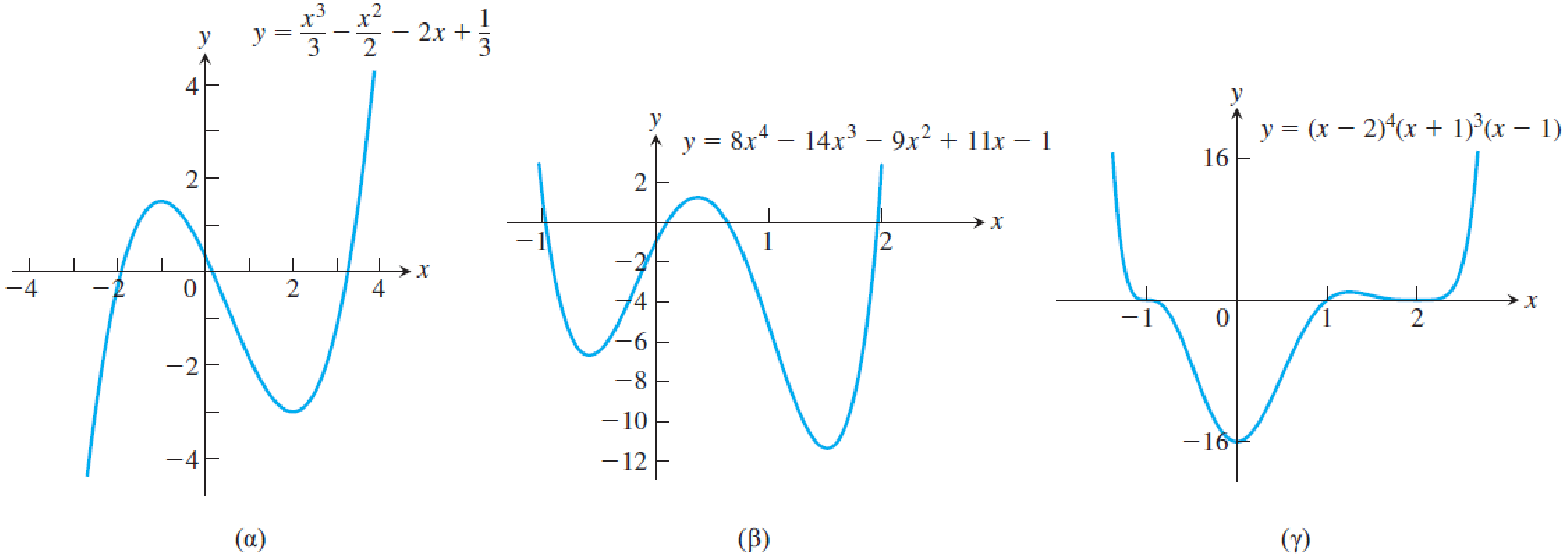
Ρητή συνάρτηση

Είναι η συνάρτηση με τύπο:

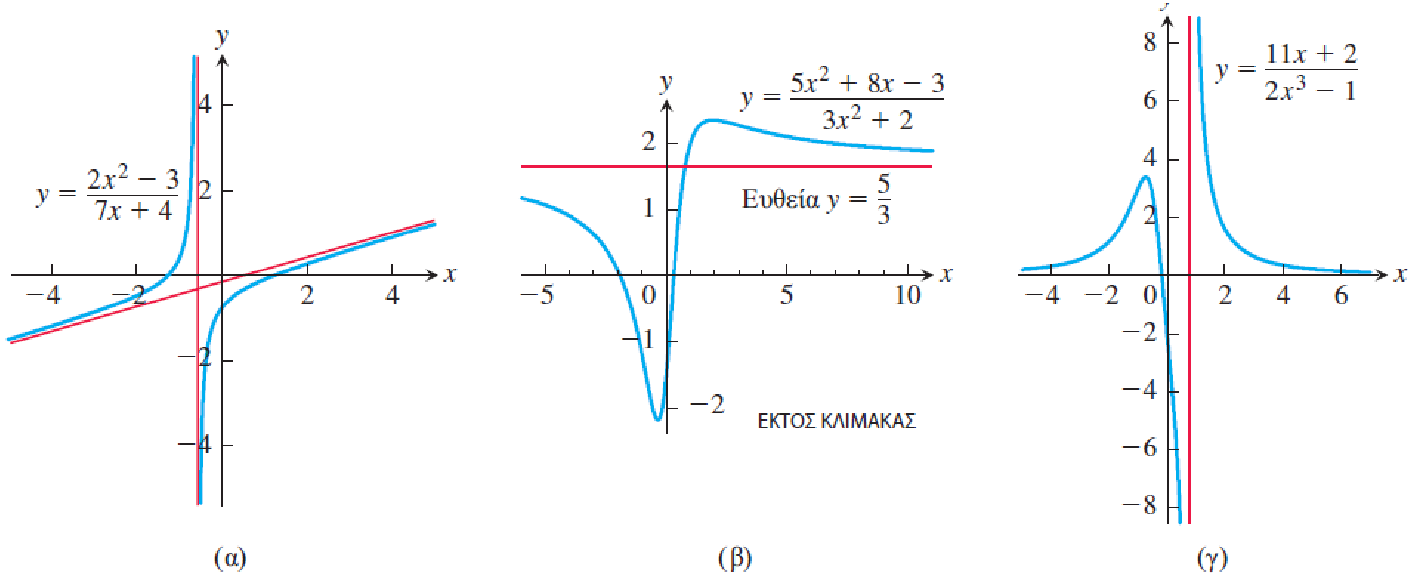
$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου P και Q είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Το πεδίο ορισμού είναι $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Q(x)} \neq 0\}$.

Συναρτήσεις: Είδη



Γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνυμικών συναρτήσεων.



Σχημα Γραφικές παραστάσεις τριών ρητών συναρτήσεων. Οι κόκκινες ευθείες στις οποίες τείνουν οι καμπύλες ονομάζονται *ασύμπτωτες* και δεν αποτελούν μέρος των γραφικών παραστάσεων.

Συναρτήσεις: Είδη

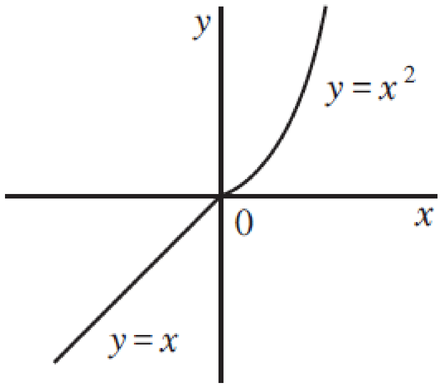
Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου

Είναι οι συναρτήσεις των οποίων ο τύπος είναι διαφορετικός όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές σε ορισμένα υποσύνολα του πεδίου ορισμού.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση με πολλαπλό τύπο

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



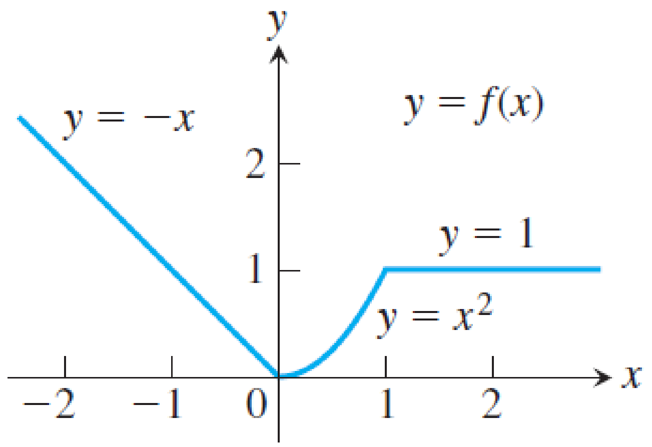
έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$. Το γράφημά της φαίνεται στο Σχήμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Η συνάρτηση

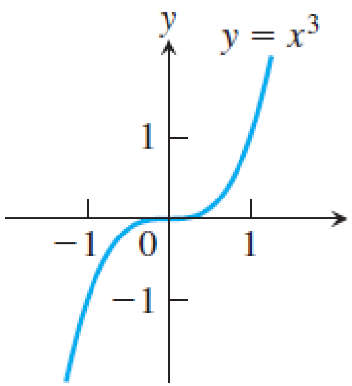
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

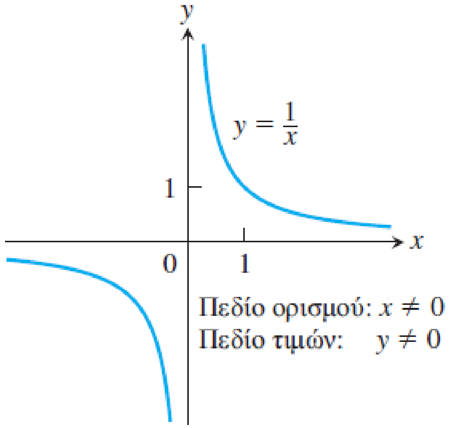
Πρώτος τύπος
Δεύτερος τύπος
Τρίτος τύπος

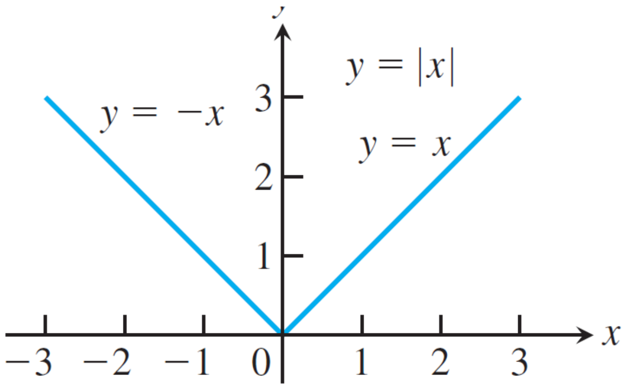
ορίζεται σε όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών αλλά οι τιμές της δίνονται από τρεις διαφορετικούς τύπους, ανάλογα με τη θέση του x: $y = -x$ όταν $x < 0$, $y = x^2$ όταν $0 \leq x \leq 1$, και $y = 1$ όταν $x > 1$. Πρόκειται, ωστόσο, για *μία και μόνη συνάρτηση* με πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ■



Συναρτήσεις: Μονοτονία







<u>Ορισμός 1</u>: Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι <u>αύξουσα</u> (αντίστοιχα, <u>γνησίως αύξουσα</u>) σ' ένα υποσύνολο Δ του A, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2) \, (\text{αντίστοιχα}, \, f(x_1) < f(x_2)) \, .$$

<u>Ορισμός 2</u>: Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι <u>φθίνουσα</u> (αντίστοιχα, <u>γνησίως φθίνουσα</u>) σ' ένα υποσύνολο Δ του A, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2) \; (\text{αντίστοιχα}, \, f(x_1) > f(x_2)) \, .$$

Αν μία συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντίστοιχα, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα), τότε καλείται, με έναν όρο, <u>μονότονη</u> (αντίστοιχα, <u>γνησίως μονότονη</u>).

<u>Ορισμός 3</u>: Μια συνάρτηση ονομάζεται <u>τμηματικά μονότονη</u> (αντίστοιχα, <u>τμηματικά γνησίως μονότονη</u>) σε ένα διάστημα όταν το γράφημά της μπορεί να χωρισθεί σε τμήματα πεπερασμένου πλήθους, στο καθένα από τα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντίστοιχα, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα).

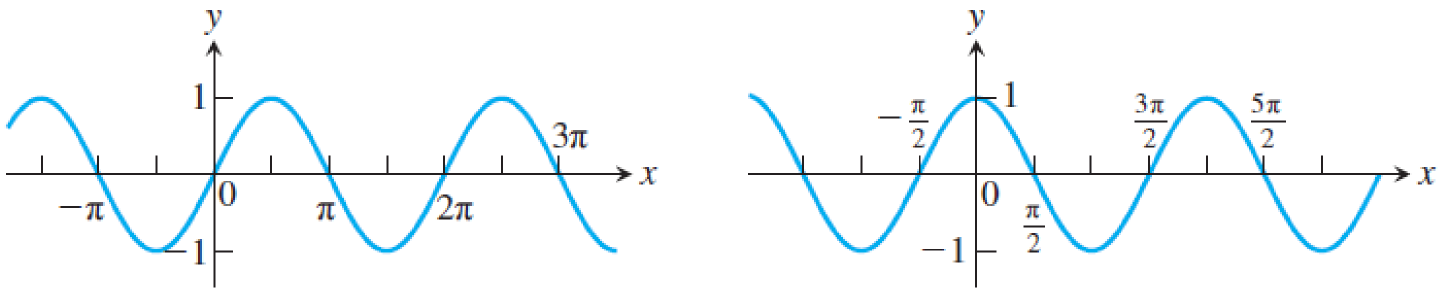
Φραγμένες συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$, λέγεται φραγμένη σε ένα υποσύνολο Δ του A, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq \phi$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παράδειγμα

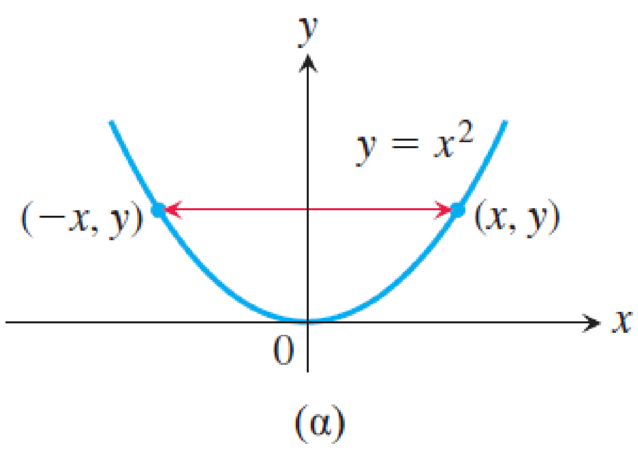
Οι δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, και $y = f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι φραγμένες, αφού ισχύει

$$|\eta\mu x| \leq 1 \quad \text{και} \quad |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \,, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R} \,.$$



(α) $f(x) = \sin x$ (β) $f(x) = \cos x$

Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου.



(α) Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ (άρτια συνάρτηση) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Ορισμένα είδη συναρτήσεων

α) Άρτια ονομάζεται μία συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$, όταν

$$x \in A \Longrightarrow -x \in A \text{ και } f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in A .$$

Το γράφημα μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Oy.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια. Πράγματι, είναι

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) .$$

β) Περιττή ονομάζεται μία συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$, όταν

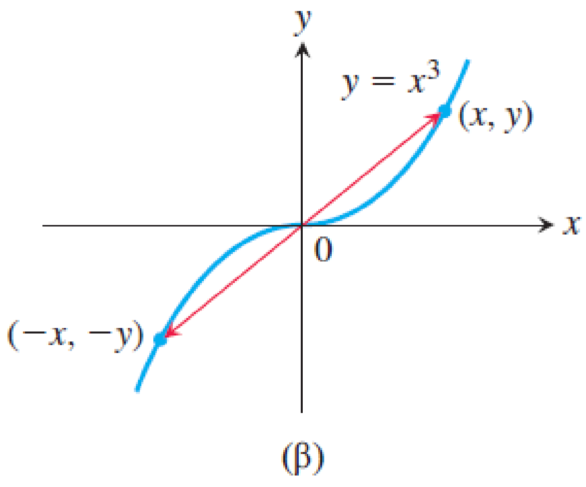
$$x \in A \Longrightarrow -x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in A .$$

Το γράφημα μίας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων O.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $y = f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή. Πράγματι, είναι

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) .$$



(β) Η γραφική παράσταση της $y = x^3$ (περιττή συνάρτηση) είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) <u>Περιοδική</u> ονομάζεται μία συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$, όταν υπάρχει αριθμός $\tau \neq 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση

$$x \in A \Longrightarrow x + \tau \in A \text{ και } f(x+\tau) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in A\,.$$

Ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x, $x + \tau \in A$ ονομάζεται <u>κύρια περίοδος</u> της συνάρτησης.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Η συνάρτηση $y = f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι περιοδική. Η περιοδός της μπορεί να είναι 2π, 4π,..., εν γένει 2κπ και κ ακέραιος αριθμός. Πράγματι, είναι

$$\eta\mu(x + 2\kappa\pi) = \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},\ \kappa \text{ ακέραιος}.$$

Ο ελάχιστος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση είναι ο $\tau = 2\pi$ που είναι η κύρια περίοδος.

2. Η συνάρτηση

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \text{ ρητός} \\ 0 & , \quad x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι περιοδική και δεν έχει κύρια περίοδο.

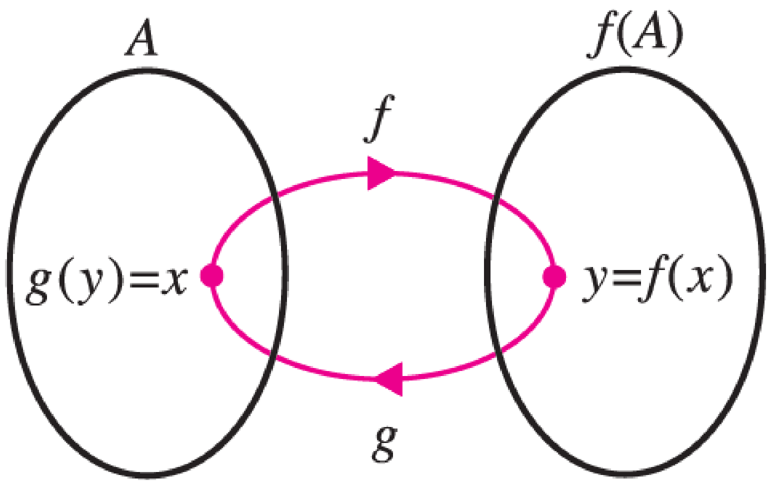
Πράγματι, κάθε θετικός ρητός αριθμός τ είναι περίοδος της f, αφού

$$f(x+\tau) = 1 = f(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ ρητό}$$

και

$$f(x+\tau) = 0 = f(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ άρρητο}.$$

Αντίστροφη συνάρτηση



$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$. Αν υπάρχει μία συνάρτηση g τέτοια ώστε να είναι

$$x = g(y) \text{ μόνον όταν } y = f(x) \; ,$$

τότε η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται $g = f^{-1}$.

Είναι φανερό ότι αν f είναι ο "νόμος" που μας οδηγεί από το x στο y, τότε $g = f^{-1}$ είναι ο "αντίστροφος νόμος" που μας φέρνει από το y πίσω στο x. Επίσης είναι φανερό ότι για να συμβαίνει το παραπάνω θα πρέπει η αρχική συνάρτηση f να είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή να υπάρχει ένα προς ένα (1-1) αντιστοιχία των στοιχείων του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $y = f(x) = 3x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη την συνάρτηση

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y}{3}, \; y \in \mathbb{R} \; .$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Μια συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$ είναι <u>αμφιμονοσήμαντη</u>, και επομένως έχει αντίστροφη συνάρτηση, όταν για όλα τα $x_1, x_2 \in A$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται $x_1 = x_2$.

<u>Παρατήρηση 2</u>: Με βάση τα προηγούμενα, για να βρούμε την αντίστροφη μίας συνάρτησης ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

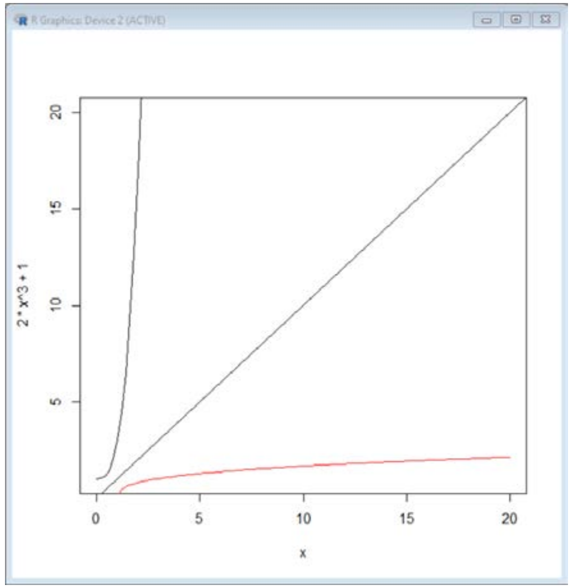
α) Εξετάζουμε αν η αρχική συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη
β) Λύνουμε τον τύπο $y = f(x)$ ως προς x
γ) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $x = f^{-1}(y)$.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη της συνάρτησης $y = f(x) = 2x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Εξετάζουμε αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη. Πράγματι, αν x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε

$$2x_1^3 + 1 = 2x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \ .$$



β) Λύνουμε τον τύπο της f ως προς x:

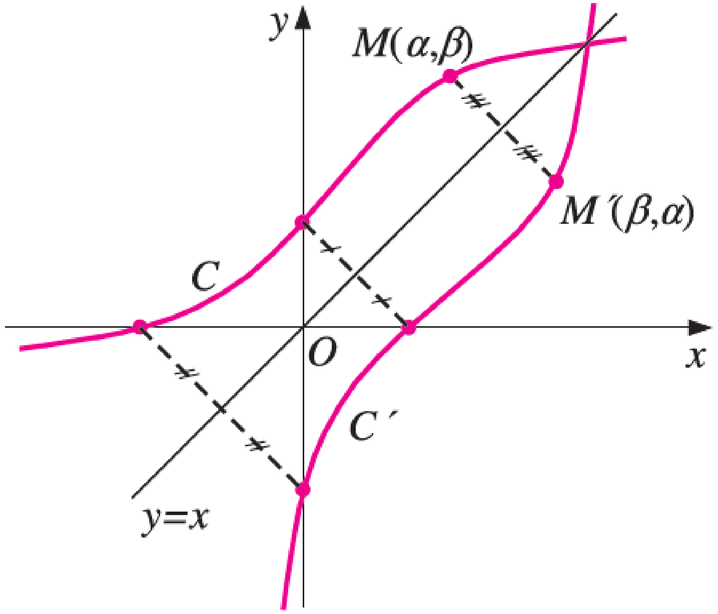
$$2x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} = f^{-1}(y) \ .$$

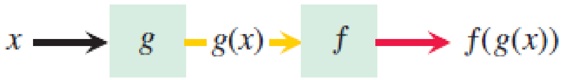
γ) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που είναι το $\mathbb{R}$.

● Ας πάρουμε τώρα μια 1–1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και f^{-1}, αντιστοίχως, στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή

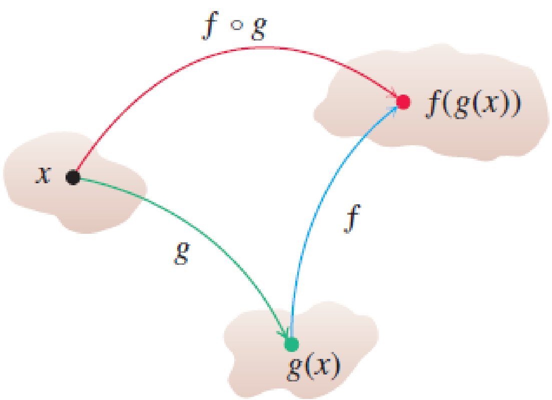
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και





Σχημα Μια σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ χρησιμοποιεί την έξοδο $g(x)$ της πρώτης συνάρτησης g ως είσοδο για τη δεύτερη συνάρτηση f.



Σχημα Διάγραμμα με βέλη για την $f \circ g$. Αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και το $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, τότε οι συναρτήσεις f και g μπορούν να συντεθούν και να σχηματίσουν την $(f \circ g)(x)$.

Σύνθετη συνάρτηση

Αν δίνονται οι συναρτήσεις $y = f(x)$, $x \in A$ και $z = g(y)$, $y \in A^*$, η σύνθεση των συναρτήσεων f και g συμβολίζεται με $h = g \circ f$ και ορίζεται ως η συνάρτηση

$$z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) ,$$

όπου το πεδίο ορισμού της $h = g \circ f$ είναι το σύνολο των τιμών του x από το πεδίο ορισμού της f για τις οποίες το $y = f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

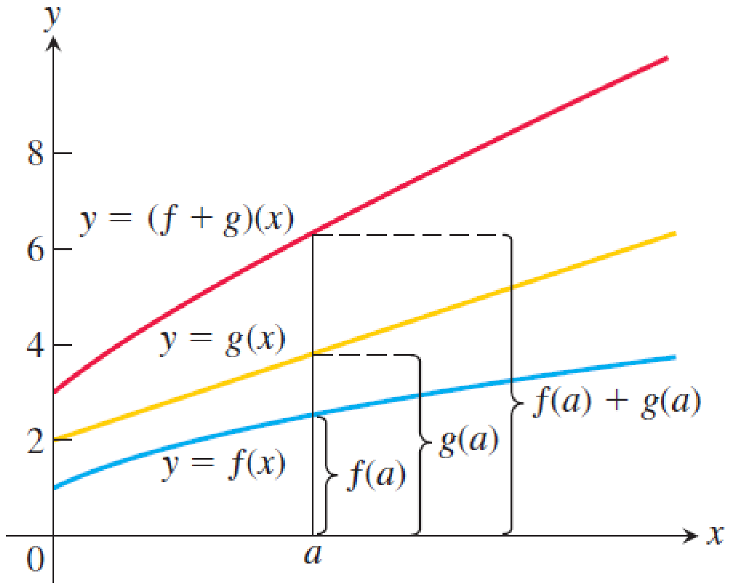
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x + 1$, βρείτε τις

(α) $(f \circ g)(x)$ **(β)** $(g \circ f)(x)$ **(γ)** $(f \circ f)(x)$ **(δ)** $(g \circ g)(x)$.

Λύση

Σύνθεση	**Πεδίο ορισμού**
(α) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + 1}$	$[-1, \infty)$
(β) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(γ) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(δ) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Αθροίσματα, διαφορές, γινόμενα και πηλίκα



Σχημα Πρόσθεση δύο συναρτήσεων γραφικά.

Όπως και οι αριθμοί, έτσι και οι συναρτήσεις μπορούν να προστεθούν, να αφαιρεθούν, να πολλαπλασιαστούν και να διαιρεθούν (εκτός εάν ο παρονομαστής είναι μηδέν), δημιουργώντας νέες συναρτήσεις. Αν f και g συναρτήσεις, τότε για κάθε x που ανήκει στα πεδία ορισμού και της f και της g (δηλαδή, για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$), ορίζουμε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, και fg μέσω των τύπων

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

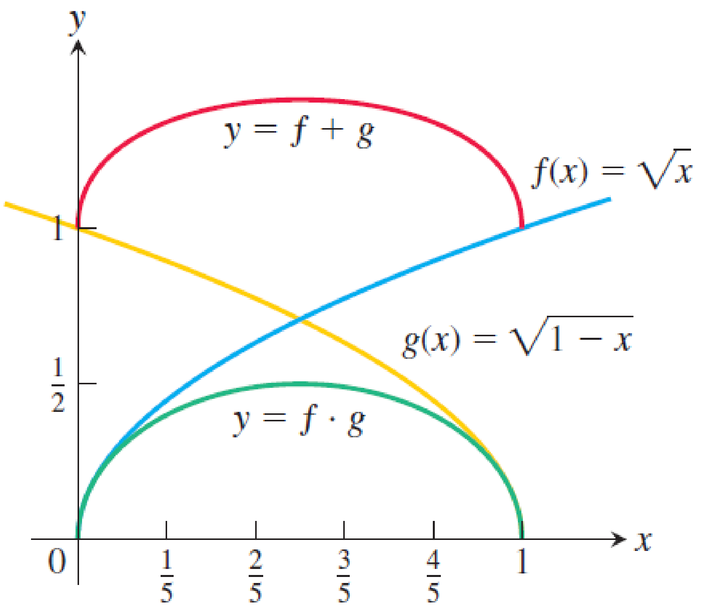
Προσέξτε ότι το πρόσημο + στο αριστερό μέλος της πρώτης ισότητας αναπαριστά την πράξη της πρόσθεσης *συναρτήσεων*, ενώ το + στο δεξιό μέλος σημαίνει πρόσθεση των πραγματικών αριθμών $f(x)$ και $g(x)$.

Σε οποιοδήποτε σημείο του $D(f) \cap D(g)$ όπου είναι $g(x) \neq 0$, μπορούμε επίσης να ορίσουμε τη συνάρτηση f/g μέσω του τύπου

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (\text{όπου } g(x) \neq 0).$$

Οι συναρτήσεις μπορούν επίσης να πολλαπλασιαστούν με σταθερές: Αν c πραγματικός αριθμός, τότε η συνάρτηση cf ορίζεται για όλα τα x στο πεδίο ορισμού τής f μέσω της σχέσης

$$(cf)(x) = cf(x).$$



ΣΧΗΜΑ Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f+g$ είναι η τομή των πεδίων ορισμού των f και g, το διάστημα $[0,1]$ στον άξονα x όπου αυτά τα πεδία ορισμού επικαλύπτονται. Το διάστημα αυτό είναι επίσης το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$ (Παράδειγμα 1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Οι συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των τύπων

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

έχουν πεδία ορισμού $D(f) = [0, \infty)$ και $D(g) = (-\infty, 1]$. Τα κοινά σημεία αυτών των πεδίων ορισμού είναι τα σημεία του

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1].$$

Στον ακόλουθο πίνακα συνοψίζονται οι τύποι και τα πεδία ορισμού για τους διάφορους αλγεβρικούς συνδυασμούς των δύο συναρτήσεων. Η συνάρτηση fg γράφεται επίσης και ως $f \cdot g$.

Συνάρτηση	**Τύπος**	**Πεδίο ορισμού**
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0,1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0,1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ (όχι το $x = 1$)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ (όχι το $x = 0$)

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ζαγούρας Χ.Γ., Γεωργίου, Δ.Ν. (2019). *Γενικά Μαθηματικά*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ