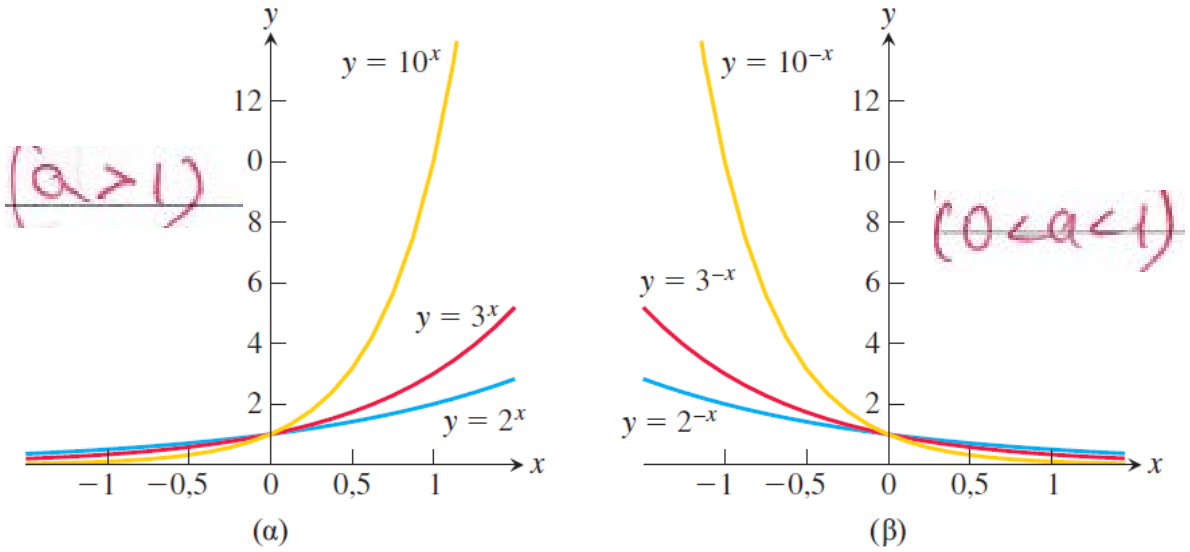
Ειδικές συναρτήσεις: λογαριθμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές και αντίστροφες αυτών

Συναρτήσεις: Είδη

Εκθετικές συναρτήσεις Μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = a^x$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$, ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση** (με βάση a). Όλες οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(0, \infty)$, έτσι μια εκθετική συνάρτηση δεν παίρνει ποτέ την τιμή μηδέν.



Σχημα Γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων.

$\boxed{y=f(x)=e^x}$

Ειδική περίπτωση $a=e$. $e\simeq 2,7182818\ldots$

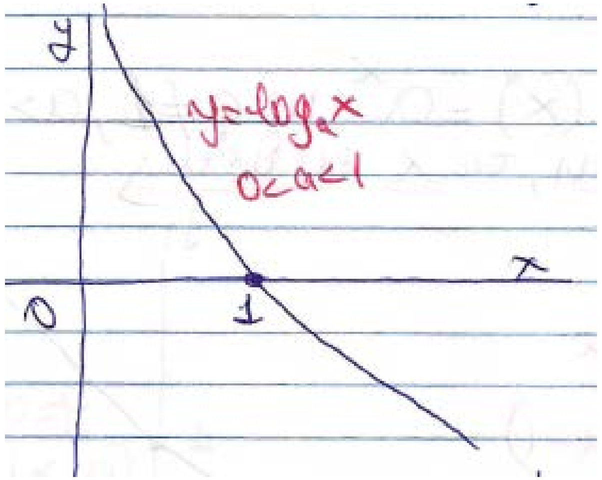
Ορίζεται ως: (υπερβατικός αριθμός)

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{\nu!}+\cdots$$

ή ... ο αριθμός που πλησιάζει η συνάρτηση $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ όταν το x παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές μέχρι να φτάσει στο $+\infty$.

Συναρτήσεις: Είδη

Λογαριθμικές συναρτήσεις Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \log_a x$, όπου η βάση $a \neq 1$ είναι μια θετική σταθερά. Είναι οι *αντίστροφες συναρτήσεις* των εκθετικών συναρτήσεων,



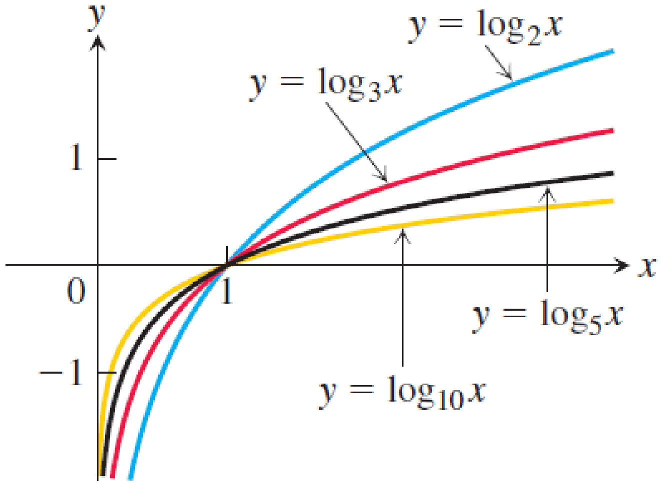
Σε κάθε περίπτωση, πεδίο ορισμού είναι το $(0, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\infty, \infty)$.

Ειδικά $\log x = \log_{10} x$ || $\ln x = \log_e x$ νεπέριος ή φυσικός

Οι εκθετικές και οι λογαριθμικές είναι αντίστροφες!

$a^{\log_a x} = x$ // $\log_a a^x = x$

$(0, +\infty)$ $\mathbb{R}$



Συναρτήσεις: Είδη

Αν α, β είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2} \qquad \alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$$

επειδή $1 = \alpha^0$ και $\alpha = \alpha^1$, ισχύει:

$$\log_\alpha 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \alpha = 1$$

Αν α>0 με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

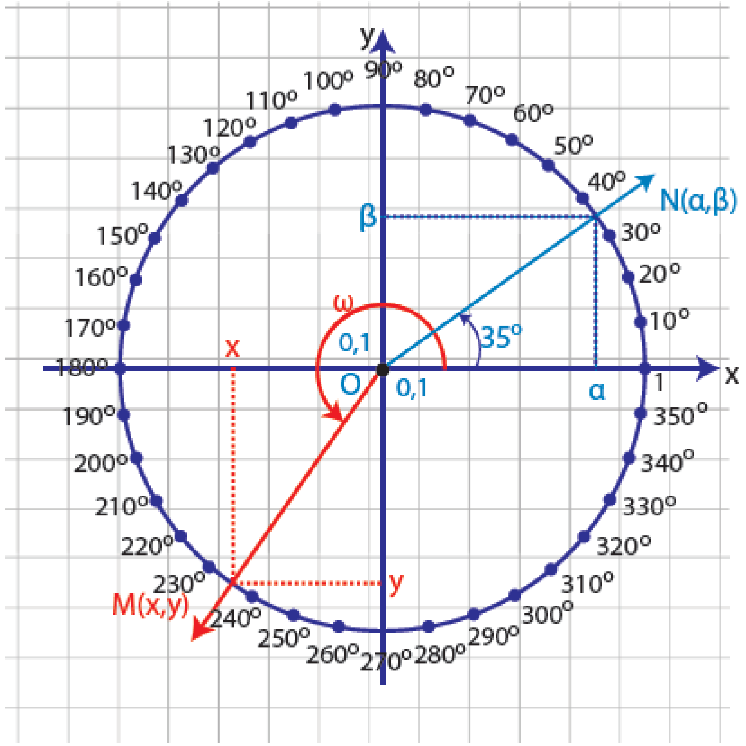
1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
2. $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
3. $\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta$

Αν α,β>0 με $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε θ>0 ισχύει: $\log_\beta \theta = \dfrac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Με κέντρο την αρχή O(0,0) ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα $\rho = 1$ γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Έστω τώρα ότι η τελική πλευρά μιας γωνίας, π.χ. της γωνίας $\omega = 35^\circ$ τέμνει τον κύκλο αυτό στο σημείο N(α, β).



Επειδή $\eta\mu 35^\circ = \dfrac{\beta}{\rho}$ και $\rho=1$

θα ισχύει $\eta\mu 35^\circ = \beta \simeq 0{,}57$.

Ομοίως, επειδή $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \dfrac{\alpha}{\rho}$ και $\rho = 1$, θα ισχύει $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \alpha \simeq 0{,}82$.

Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M(x, y), τότε ισχύει:

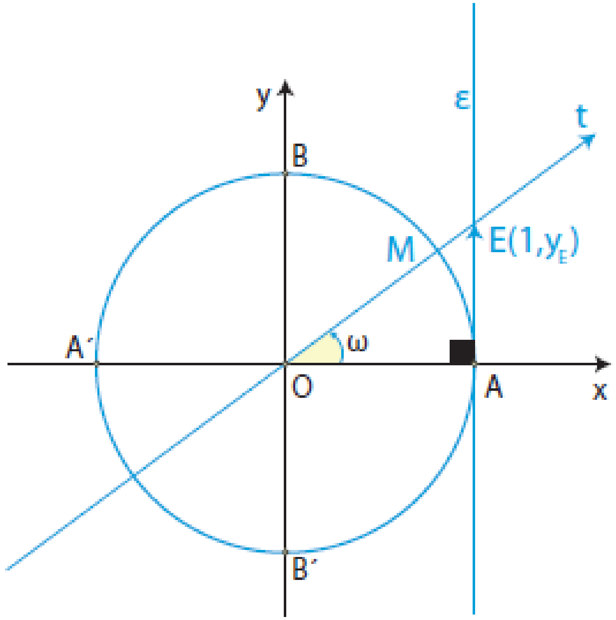
> συνω = x = τετμημένη του σημείου M
> ημω = y = τεταγμένη του σημείου M

Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία ω που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο M(x, y). Φέρνουμε την εφαπτομένη ε του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο A.

Αν η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο και η ευθεία OM τέμνει την ε στο E, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο AOE θα έχουμε

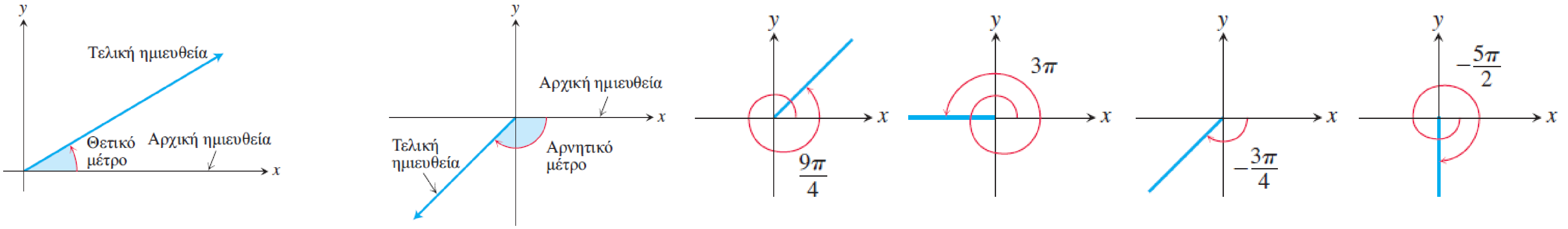
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(AE)}{(OA)} = \frac{(AE)}{1} = (AE)$$



> **Ακτίνιο** (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

η γωνία 360° είναι ίση με 2π rad.

Συναρτήσεις: Είδη

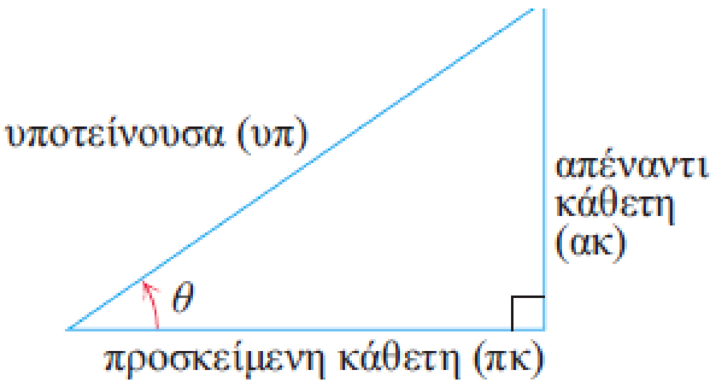


ΣΧΗΜΑ Τα μη μηδενικά ακτινιακά μέτρα μπορούν να είναι θετικά ή αρνητικά και να υπερβαίνουν το 2π.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 Γωνίες μετρημένες σε μοίρες και σε ακτίνια

Μοίρες	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (ακτίνια)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Συναρτήσεις: Είδη

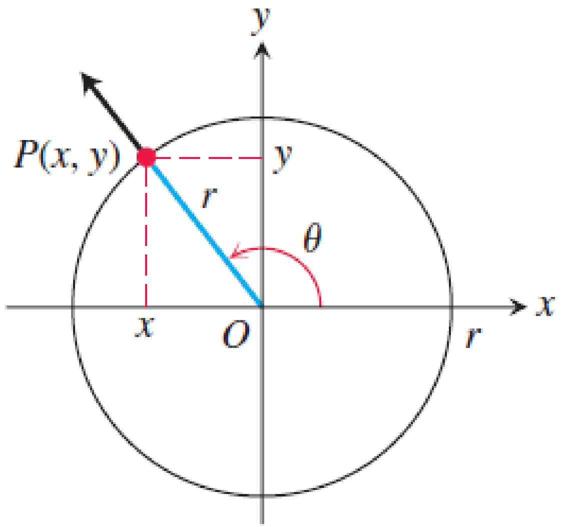


$$\sin\theta = \frac{\text{ακ}}{\text{υπ}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{υπ}}{\text{ακ}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{πκ}}{\text{υπ}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{υπ}}{\text{πκ}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ακ}}{\text{πκ}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{πκ}}{\text{ακ}}$$

ΣΧΗΜΑ Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.



ΣΧΗΜΑ Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μιας γενικής γωνίας θ ορίζονται μέσω των x, y και r.

ημίτονο: $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

συνημίτονο: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

εφαπτομένη: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

συντέμνουσα: $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$

τέμνουσα: $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

συνεφαπτομένη: $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Συναρτήσεις: Είδη

Περίοδοι Τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Περίοδος π: $\tan(x+\pi) = \tan x$

$\cot(x+\pi) = \cot x$

Περίοδος 2π: $\sin(x+2\pi) = \sin x$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\sec(x+2\pi) = \sec x$

$\csc(x+2\pi) = \csc x$

Άρτιες

$\cos(-x) = \cos x$

$\sec(-x) = \sec x$

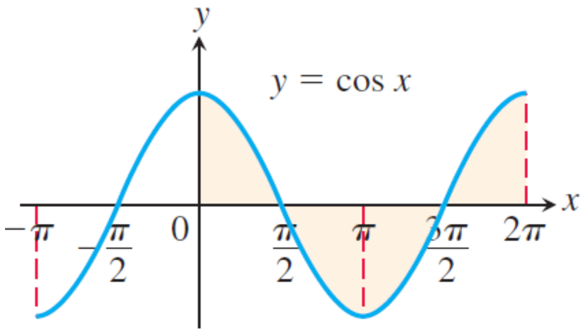
Περιττές

$\sin(-x) = -\sin x$

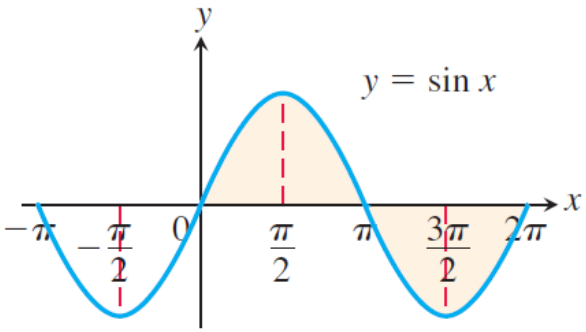
$\tan(-x) = -\tan x$

$\csc(-x) = -\csc x$

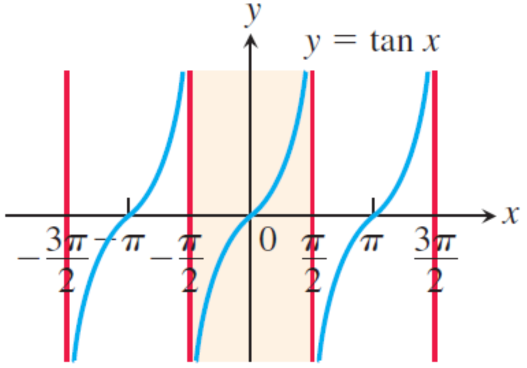
$\cot(-x) = -\cot x$



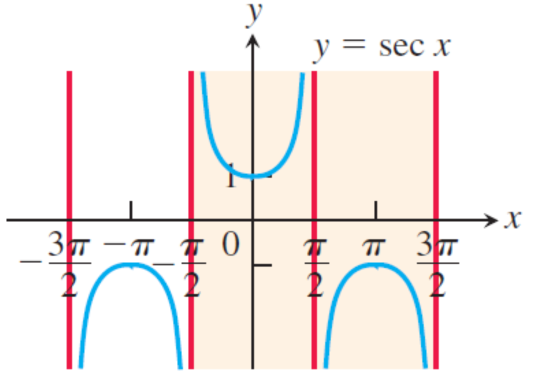
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-1 \le y \le 1$
Περίοδος: 2π
(α)



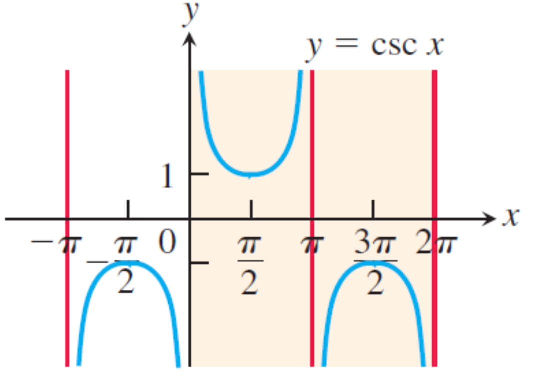
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-1 \le y \le 1$
Περίοδος: 2π
(β)



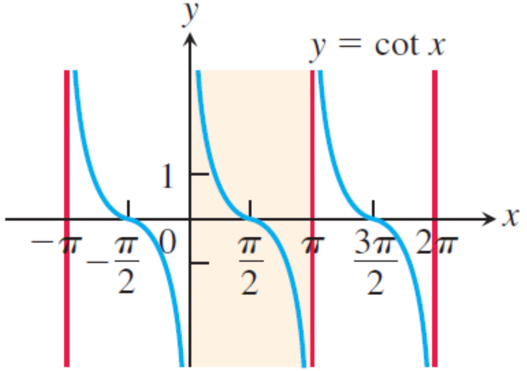
Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
Περίοδος: π
(γ)



Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Πεδίο τιμών: $y \le -1$ ή $y \ge 1$
Περίοδος: 2π
(δ)



Πεδίο ορισμού: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Πεδίο τιμών: $y \le -1$ ή $y \ge 1$
Περίοδος: 2π
(ε)



Πεδίο ορισμού: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
Περίοδος: π
(στ)

Τριγωνομετρικές ταυτότητες ([illegible])

$$ημ^2x + \cos^2x = 1$$

$$ημ(α \pm β) = ημα\,συνβ \pm συνα\,ημβ$$

$$\cos(α \pm β) = \cos α \cos β \mp ημα\,ημβ$$

$$εφ(α \pm β) = \frac{εφα \pm εφβ}{1 \mp εφα \cdot εφβ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} ημ2α &= 2ημα \cdot συνα \\ \cos 2α &= \cos^2α - \sin^2α = \\ &= 1 - 2\sin^2α = \\ &= 2\cos^2α - 1 \end{aligned}}$$

$$2ημα\,συνβ = ημ(α+β) + ημ(α-β)$$

$$2συνα\,συνβ = συν(α+β) + συν(α-β)$$

$$2ημα\,ημβ = συν(α-β) - συν(α+β)$$

Συναρτήσεις: Είδη

Αντίστροφες τριγωνομετρικές

$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in [-1, 1]$

$x = \sin^{-1} y, \quad y \in [-1, 1]$

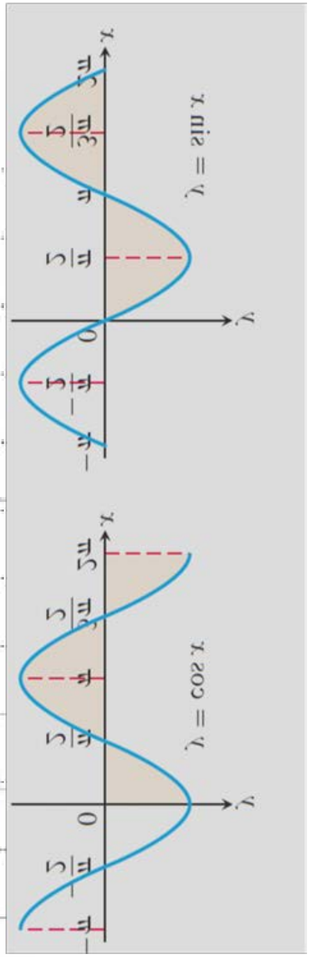
Πεδίο Ορισμού $[-1, 1]$. Πεδίο Τιμών $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

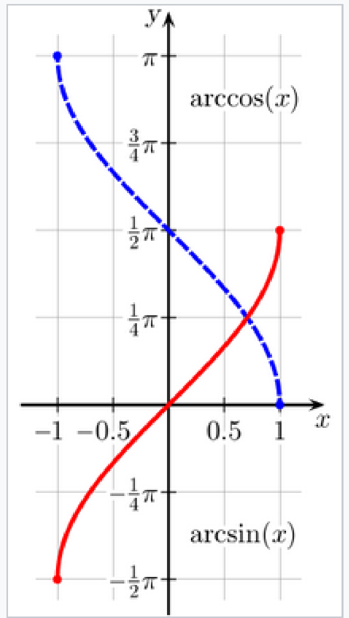
$y = \cos x, \quad x \in [0, \pi], \quad y \in [-1, 1]$

$x = \cos^{-1} y, \quad y \in [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

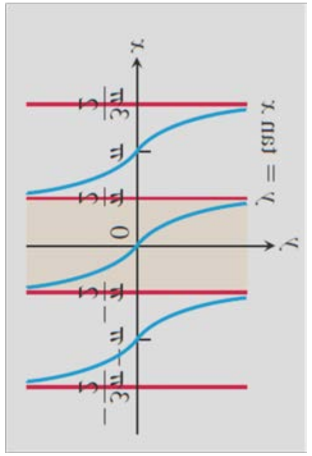
$y = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad y \in (-\infty, +\infty)$

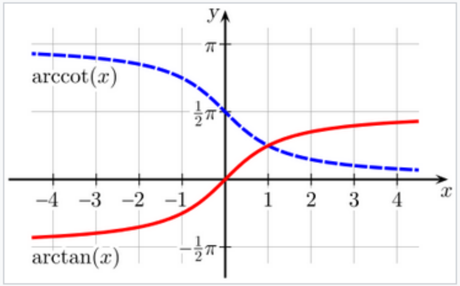
$x = \tan^{-1} y, \quad y \in (-\infty, \infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



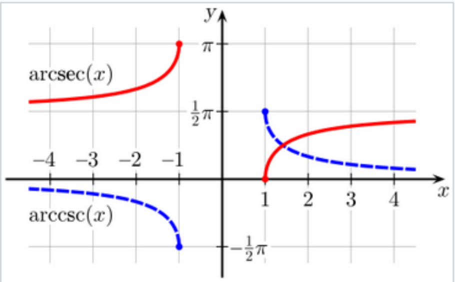


The usual principal values of the arcsin(x) (red) and arccos(x) (blue) functions graphed on the cartesian plane.





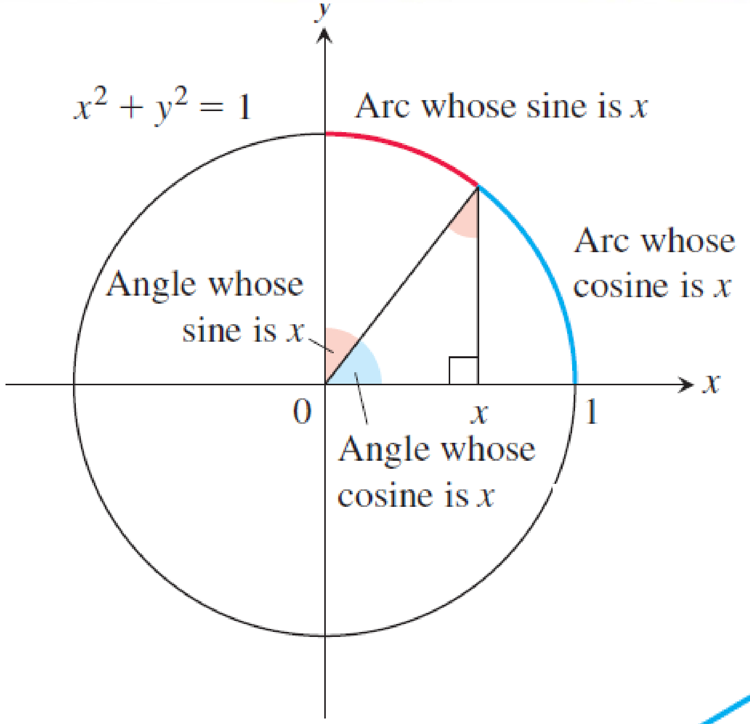
The usual principal values of the arctan(x) and arccot(x) functions graphed on the cartesian plane.



Principal values of the arcsec(x) and arccsc(x) functions graphed on the cartesian plane.

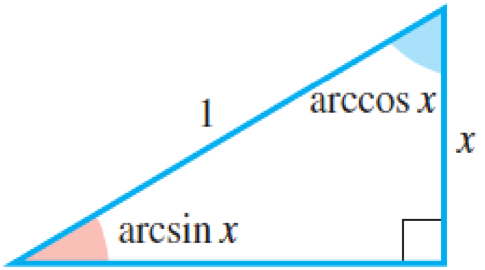
Συναρτήσεις: Είδη

Αντίστροφες τριγωνομετρικές

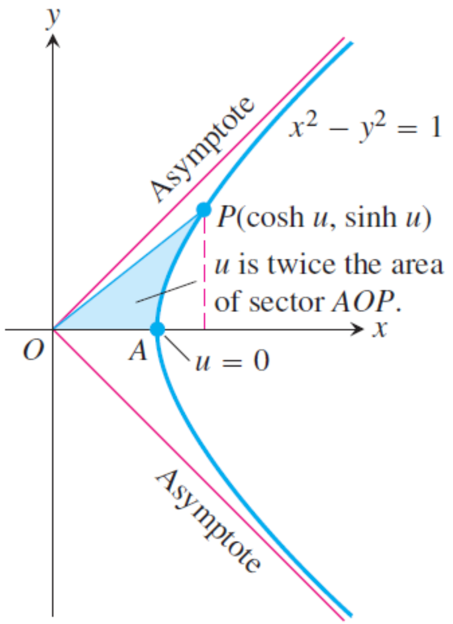


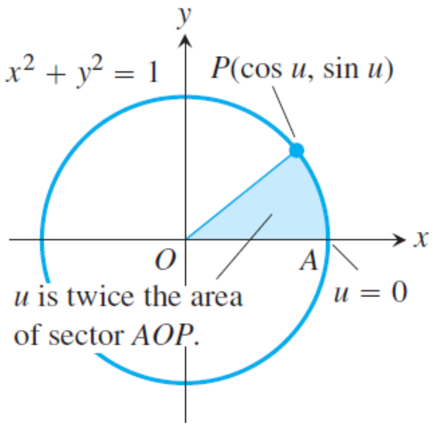
x	arcsin x	arccos x
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$	$\pi/3$
$-1/2$	$-\pi/6$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	$5\pi/6$

x	arctan x
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$



ΣΧΗΜΑ Οι arcsin x και arccos x είναι συμπληρωματικές γωνίες (το άθροισμά τους ισούται με $\pi/2$).





Συναρτήσεις: Είδη

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Υπερβολικό Ημίτονο:

$$y = \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$$

Υπερβολικό Συνημίτονο:

$$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in [1, +\infty)$$

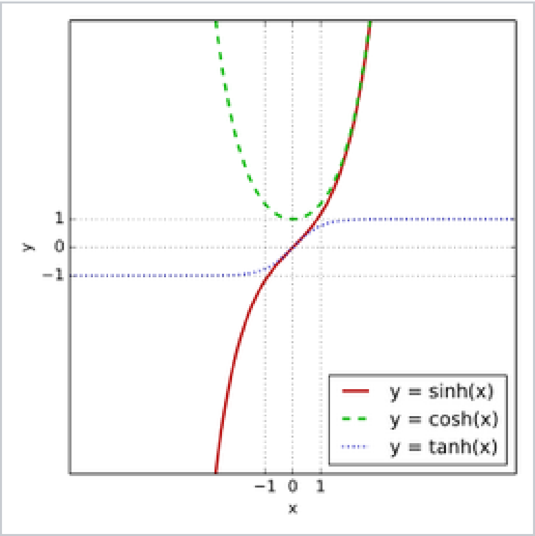
Υπερβολική Εφαπτομένη:

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in (-1, 1)$$

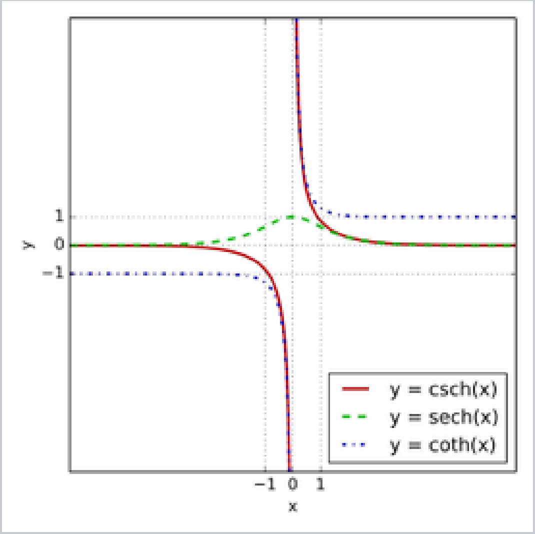
Υπερβολική Συνεφαπτομένη

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\},\ y \in \mathbb{R} - [-1, 1]$$

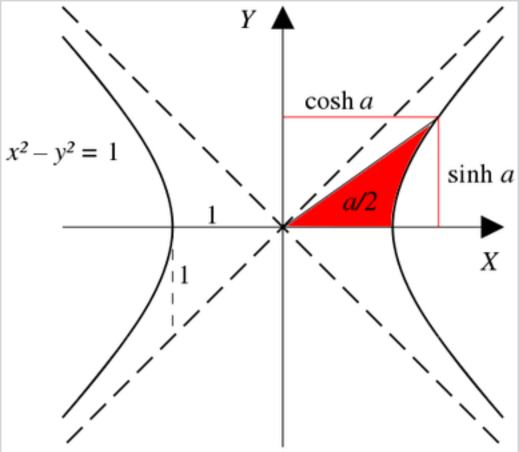
$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$



sinh, cosh and tanh

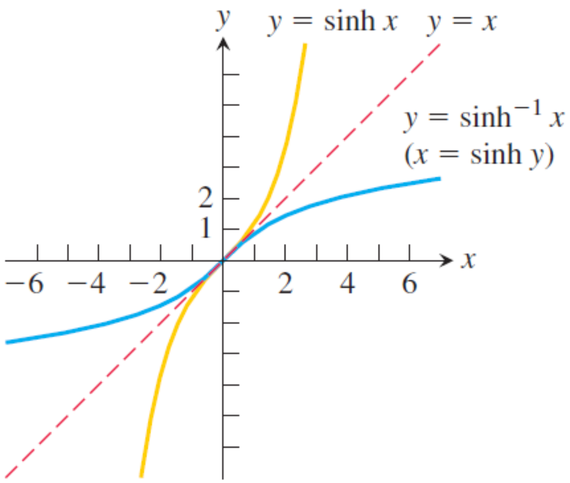


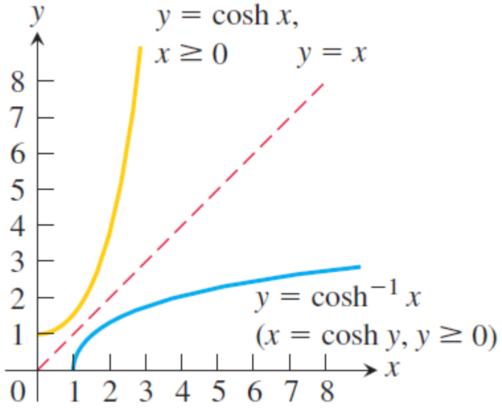
csch, sech and coth



A ray through the unit hyperbola $x^2 - y^2 = 1$ at the point $(\cosh a, \sinh a)$, where a is twice the area between the ray, the hyperbola, and the x-axis. For points on the hyperbola below the x-axis, the area is considered negative (see animated version with comparison with the trigonometric (circular) functions).

Inverse Hyperbolic Functions and Integrals





$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

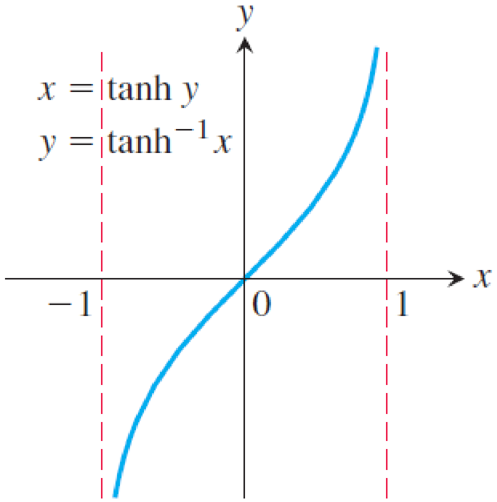
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1$$

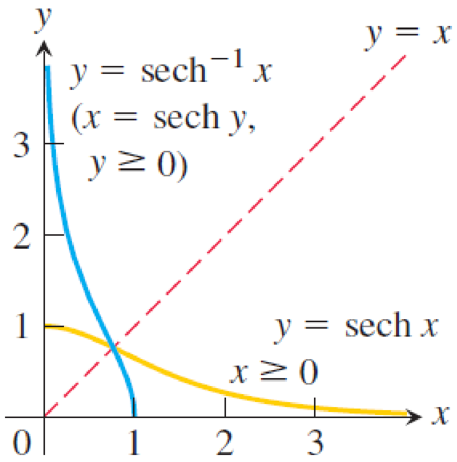
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

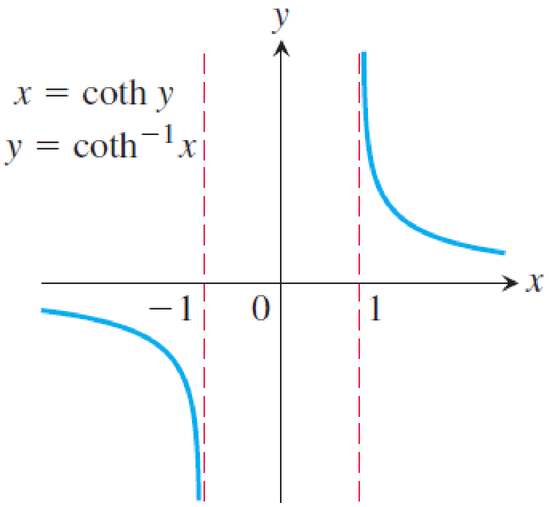
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

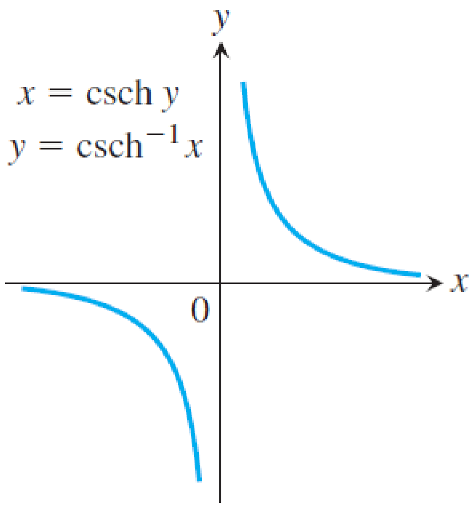
$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \qquad |x| > 1$$









Συναρτήσεις

Όριο: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Συνέχεια: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in A$

Παράγωγος σε ένα σημείο x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x)\Big|_{x=x_0}$$

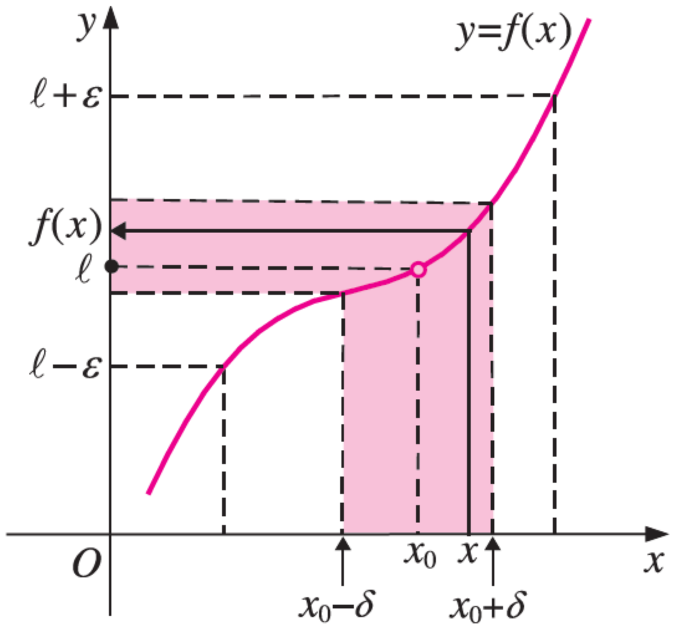
Θεώρημα Αν $f(x)$ παραγωγίσιμη για x_0 $\Rightarrow$ $f(x)$ συνεχής στο x_0

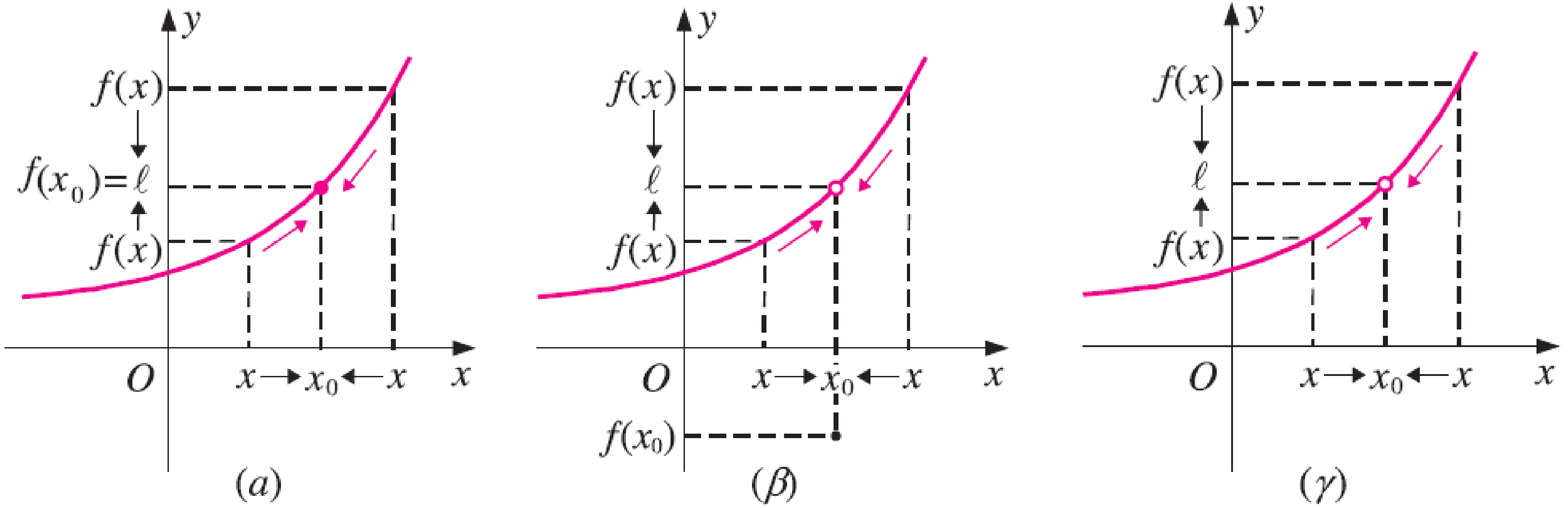
(όχι το αντίστροφο).

Συναρτήσεις: όριο σε σημείο

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει:

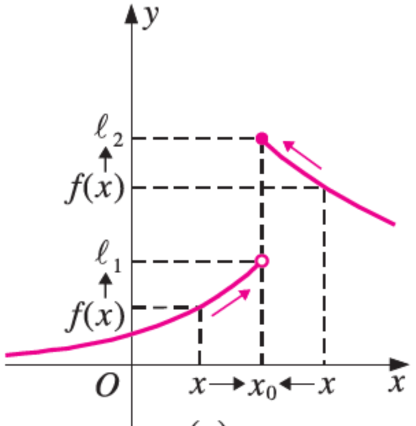
$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$



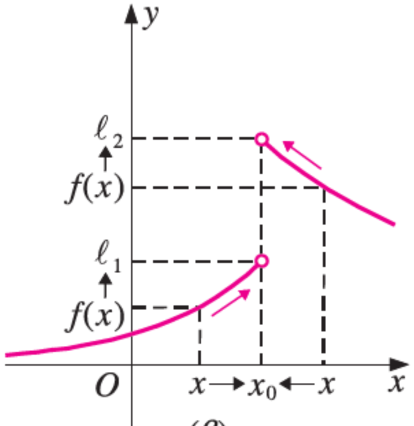


Συναρτήσεις: όριο σε σημείο

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2”.



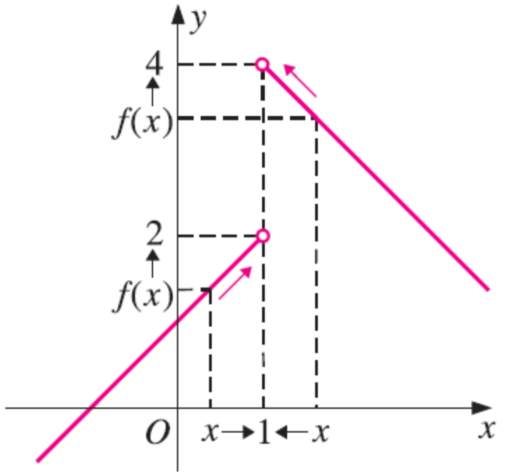
(α)



(β)

● Έστω, τώρα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases},$$



της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.

Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά ($x<1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2.$$

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά ($x>1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4.$$

Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0

και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Συναρτήσεις: όριο σε σημείο

Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2,+\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

NAI i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2$

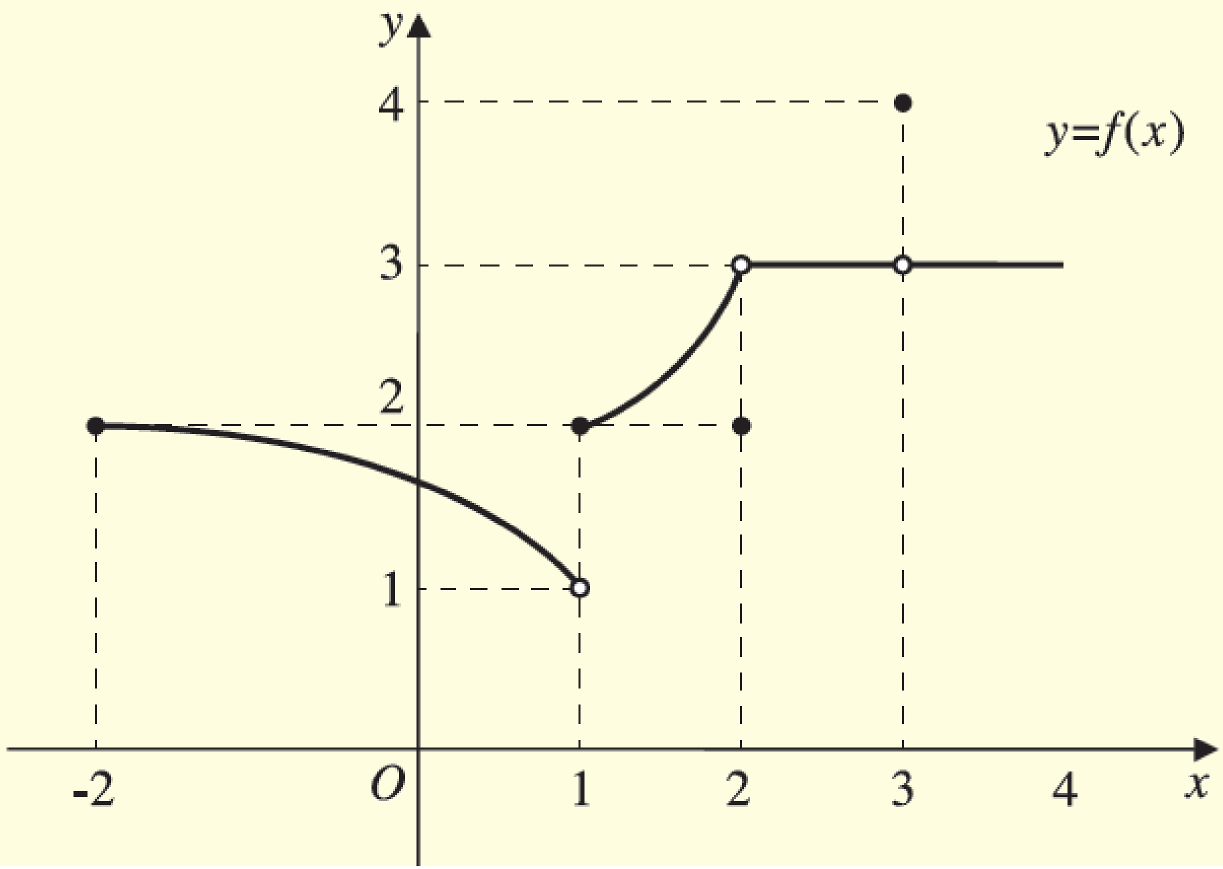
OXI ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

OXI iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

NAI iv) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

ΌXI v) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$

NAI vi) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$



Συναρτήσεις: όριο σε σημείο

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$$

Εστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

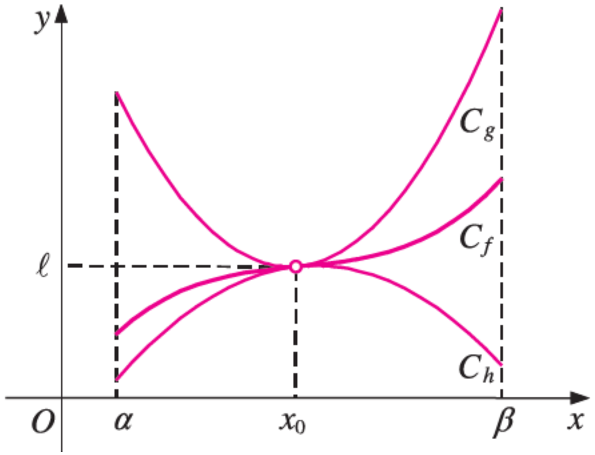
$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

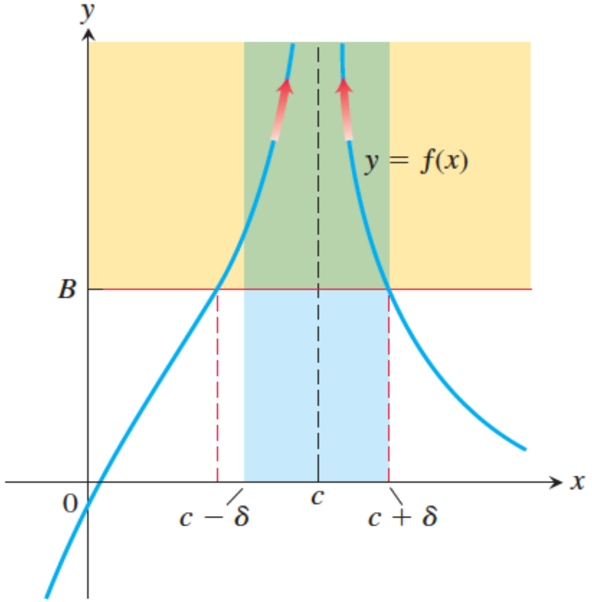
- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε

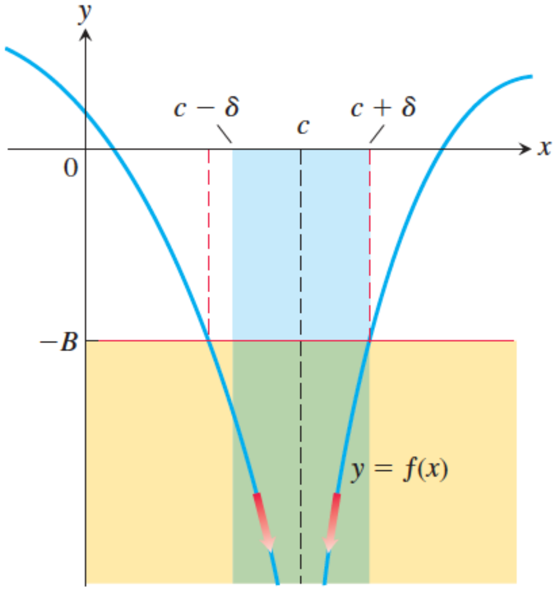
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$



Συναρτήσεις: μη πεπερασμένο όριο σε σημείο

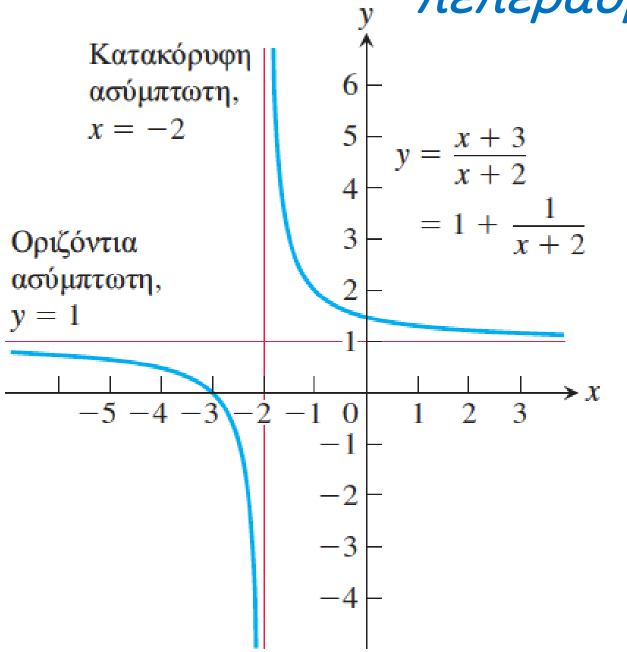


ΣΧΗΜΑ Για $c - \delta < x < c + \delta$, η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = B$.

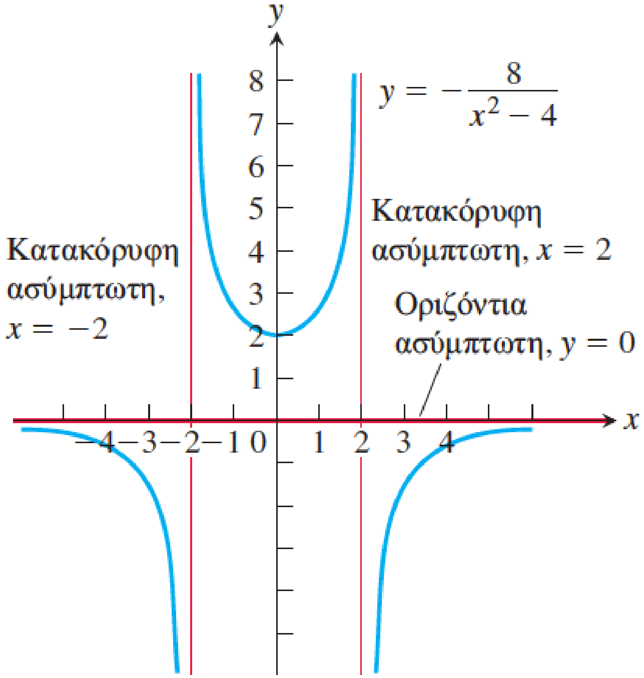


ΣΧΗΜΑ Για $c - \delta < x < c + \delta$, η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = -B$.

πεπερασμένο όριο στο +/- άπειρο



ΣΧΗΜΑ Οι ευθείες $y = 1$ και $x = -2$ είναι ασύμπτωτες της καμπύλης



ΣΧΗΜΑ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παραδείγματος

Προσέξτε ότι η καμπύλη τείνει στον άξονα x μόνο από τη μία πλευρά. Οι ασύμπτωτες δεν είναι λοιπόν απαραίτητως «αμφίπλευρες».

Συναρτήσεις: συνέχεια

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x) =$ ημx και $g(x) =$ συνx είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

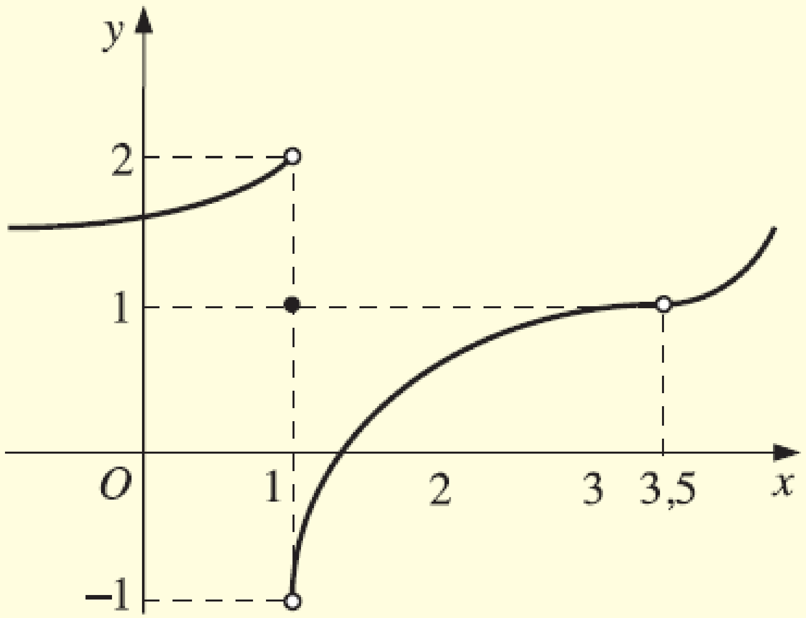
$$\lim_{x \to x_0} \text{ημ}x = \text{ημ}x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \text{συν}x = \text{συν}x_0.$$

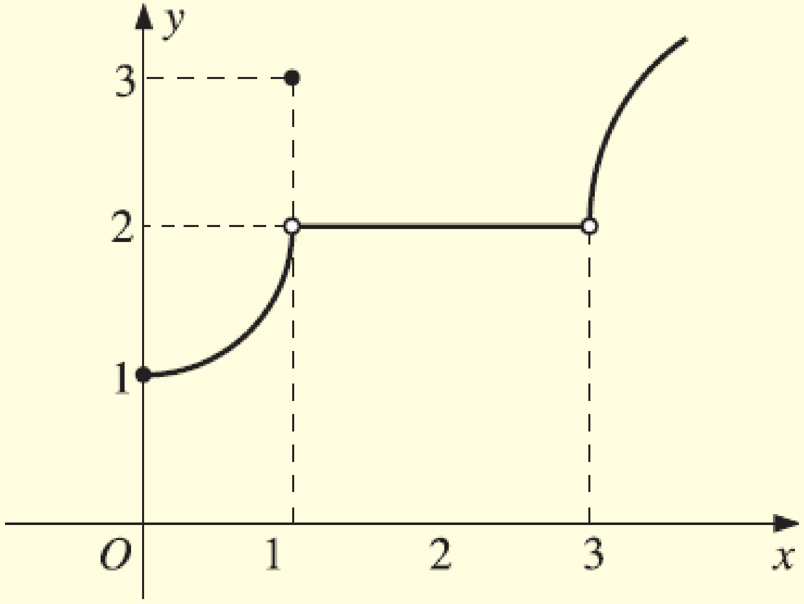
Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = log_a x$, $0 < a \neq 1$ είναι συνεχείς.**

Συναρτήσεις: συνέχεια

Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





πεδίο ορισμού:	IR \ {3.5}=(-∞,3.5)U(3.5,+ ∞)	[1, +∞) \ {3}=[1,3) U(3,+ ∞)
δεν είναι συνεχής:	στο 1	στο 1

Συναρτήσεις: συνέχεια

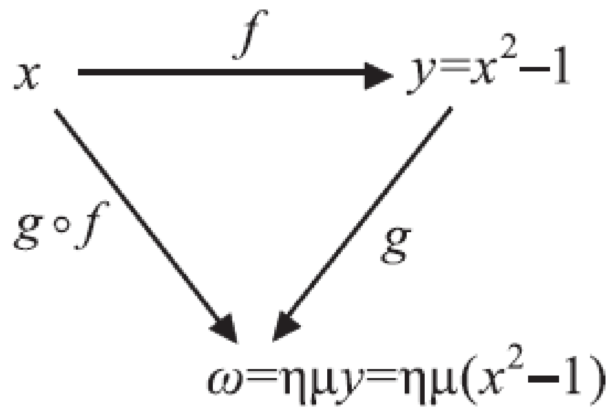
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\ c\cdot f,\ \text{όπου}\ c\in\mathbb{R},\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ |f|\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{f}$$

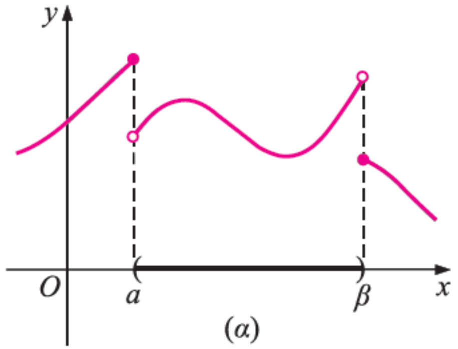
με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

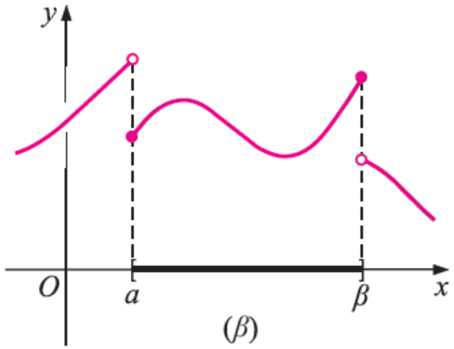
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

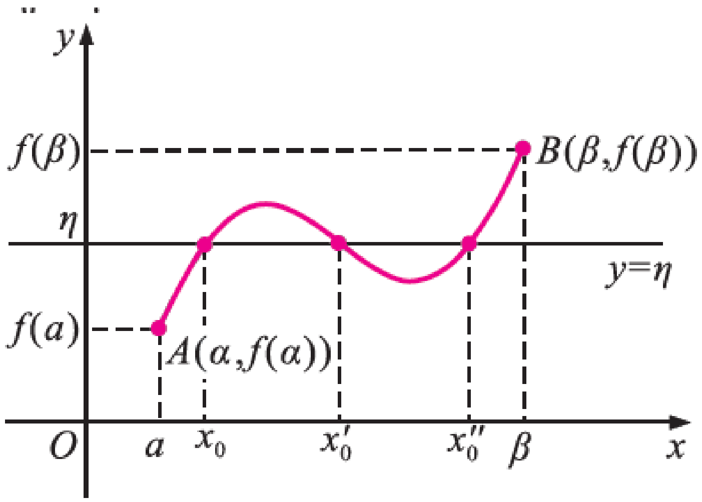
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\varphi(x)=\eta\mu(x^2-1)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=\eta\mu x$.



Συναρτήσεις: συνέχεια







Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

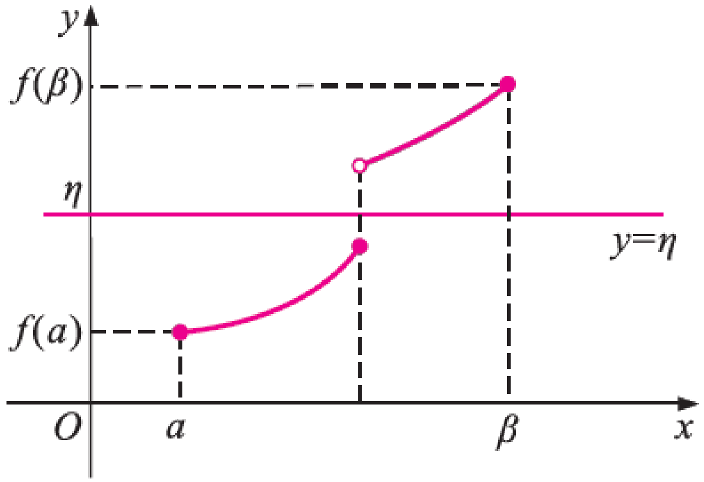
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

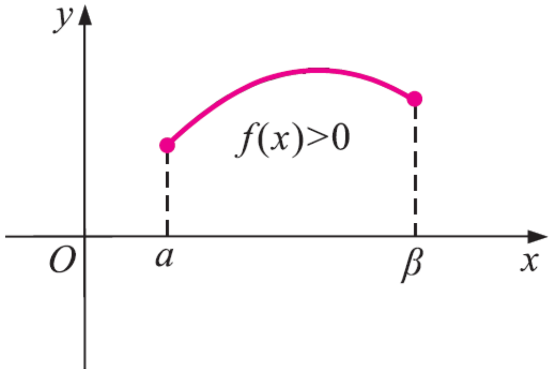
τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

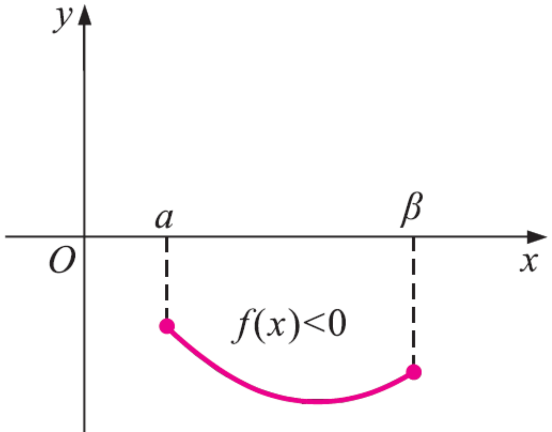
$$f(x_0) = \eta$$



Συναρτήσεις: συνέχεια

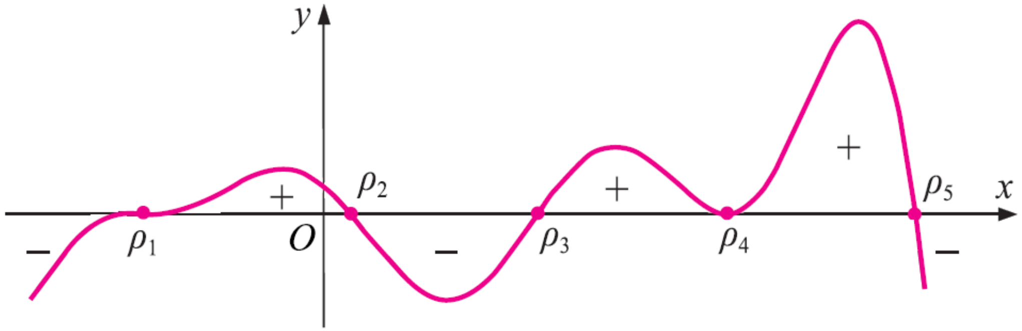
— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.





(β)

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



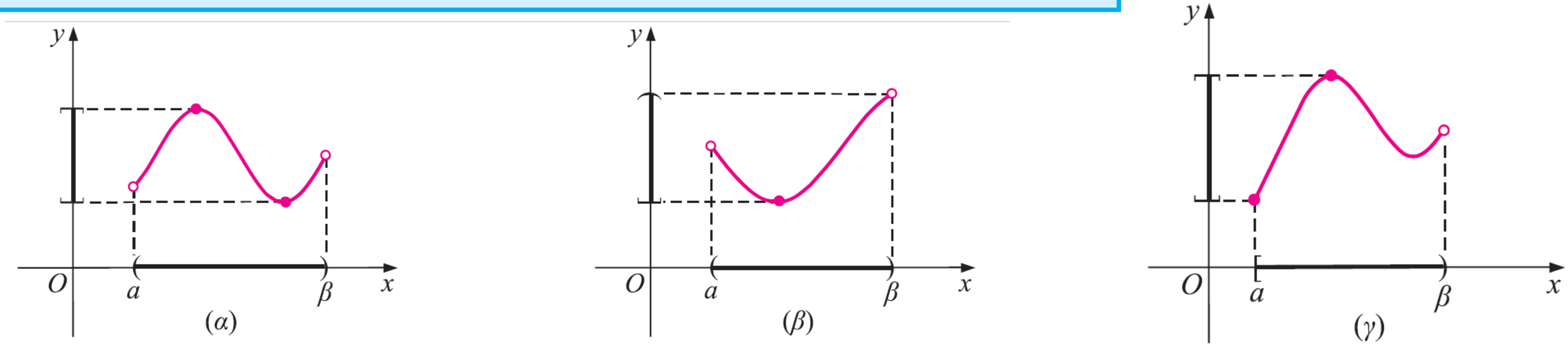
Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

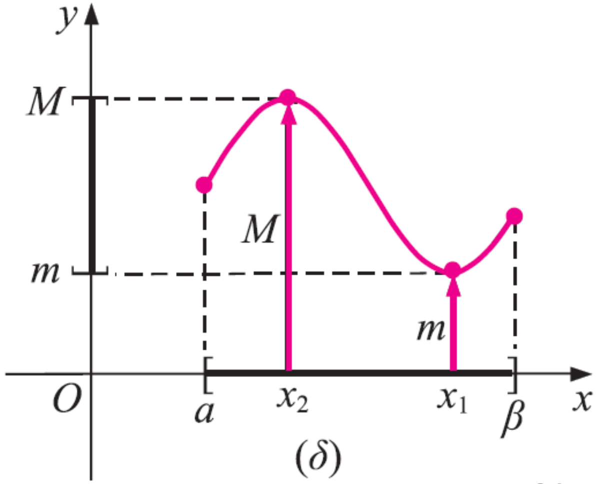
Συναρτήσεις: συνέχεια

> Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

> Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. δ)



Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής*, 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος. *ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου*, 22-0207 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ζαφειροπούλου-Καρατζόγλου (2020). *Σημειώσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για το Τμήμα Φαρμακευτικής*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
- WIKIPEDIA The Free Encyclopedia https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions