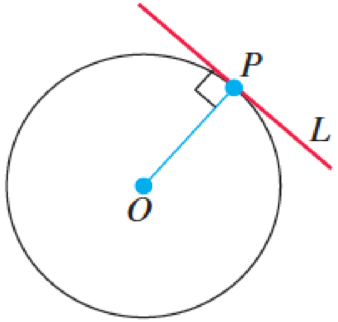
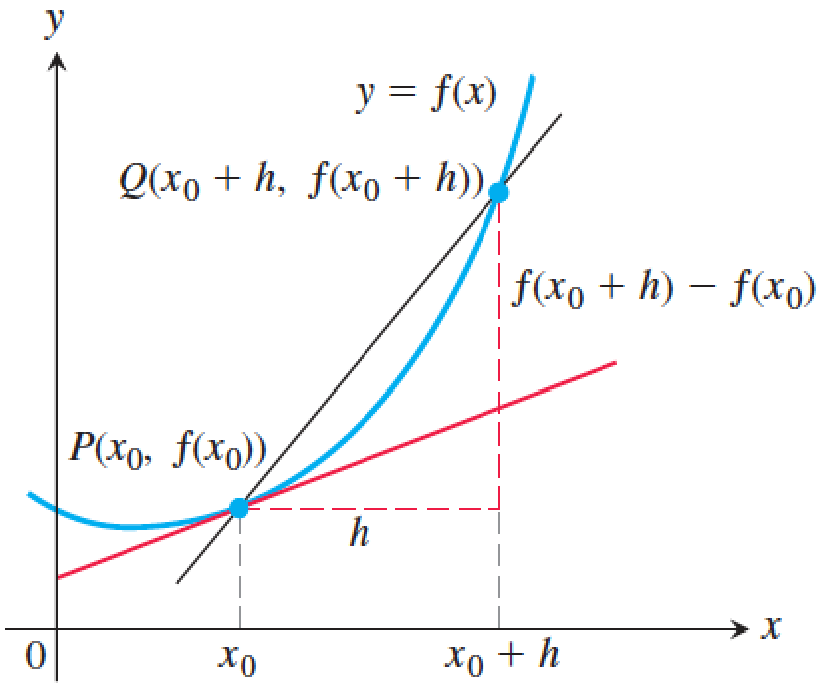
ΡΗΑ-Α13 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Συναρτήσεις: η έννοια της παραγώγου και οι εφαρμογές της

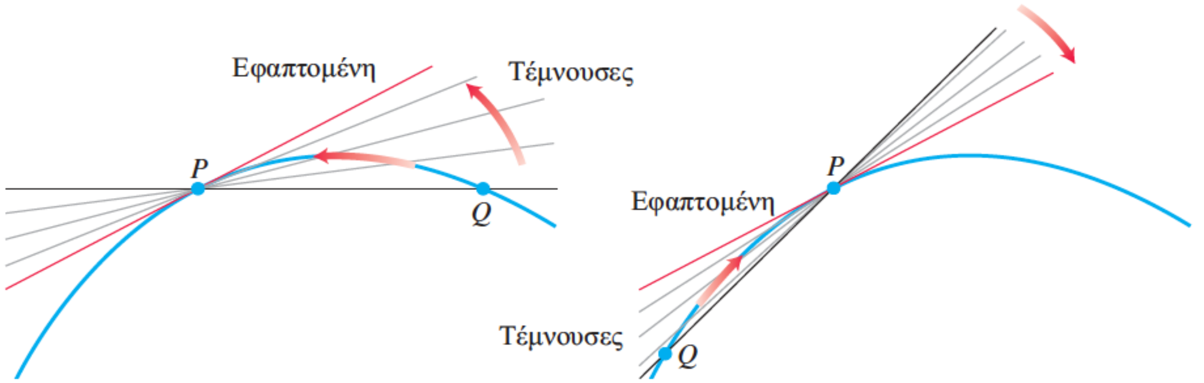
Συναρτήσεις: παράγωγος



ΣΧΗΜΑ Η L είναι εφαπτομένη του κύκλου στο P αν διέρχεται από το P κάθετα στην ακτίνα OP.



ΣΧΗΜΑ Η κλίση της εφαπτομένης στο P ισούται με $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.



ΣΧΗΜΑ Η εφαπτομένη της καμπύλης στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση το όριο των κλίσεων των τεμνουσών καθώς $Q \to P$ από οποιαδήποτε πλευρά.

Συναρτήσεις: παράγωγος

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Για παράδειγμα,

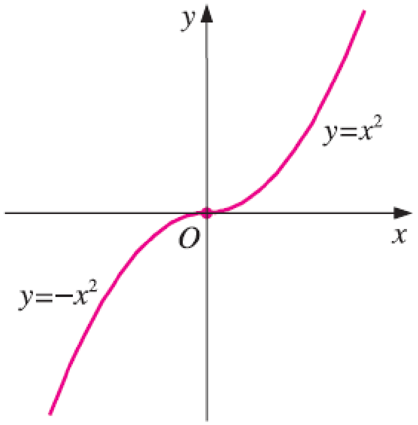
— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$, αφού

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2-0}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-0}{x} = 0,$$



ενώ

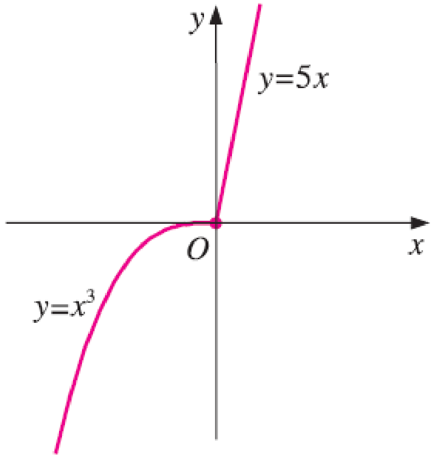
— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<0 \\ 5x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3-0}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{5x-0}{x} = 5.$$



Συναρτήσεις: παράγωγος

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ (ή $-\infty$)

β) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$,

γ) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$,

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x=x_0$.

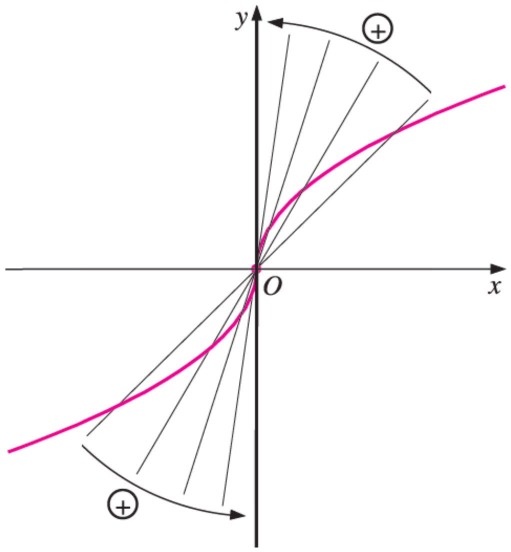
Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}\,, & x<0\\ \sqrt{x}\,, & x\geq 0\end{cases}$$

δέχεται στο σημείο της $O(0,0)$ κατακόρυφη εφαπτομένη, την $x=0$, αφού είναι συνεχής στο 0 και ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

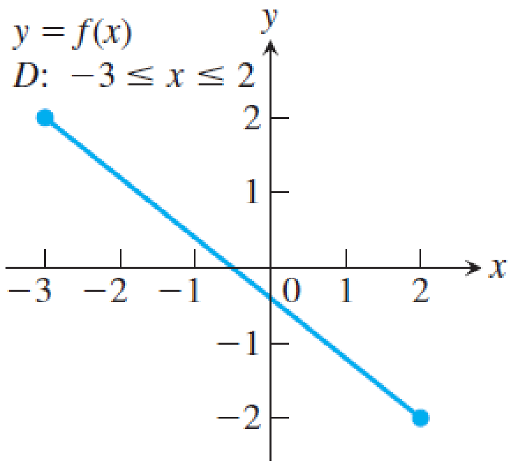


a. differentiable?

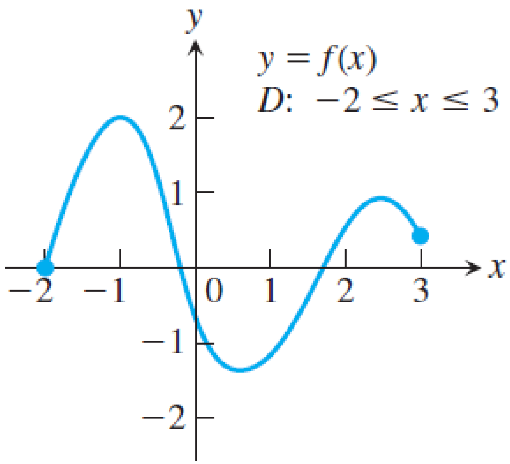
b. continuous but not differentiable?

c. neither continuous nor differentiable?

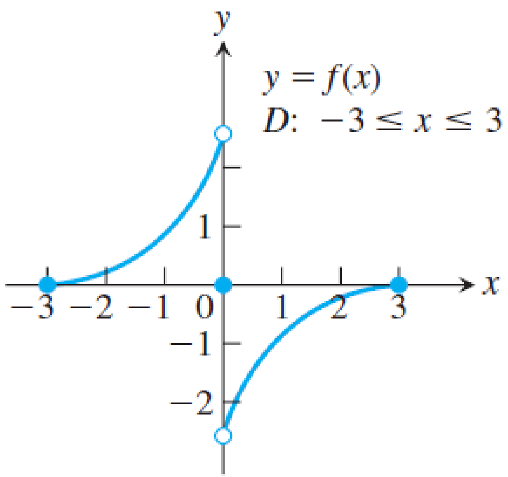
45.



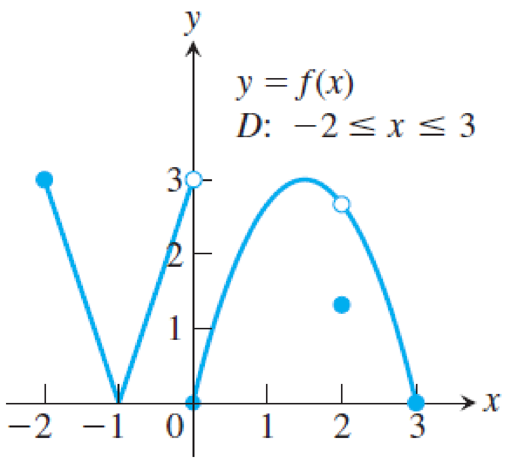
46.



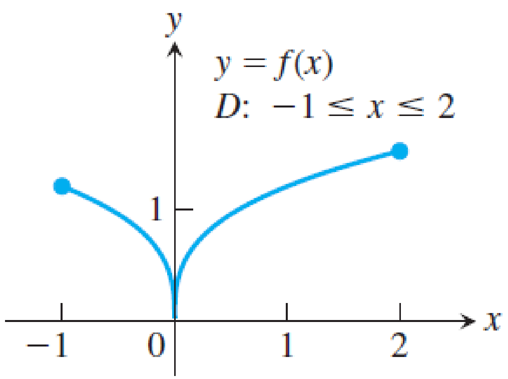
47.



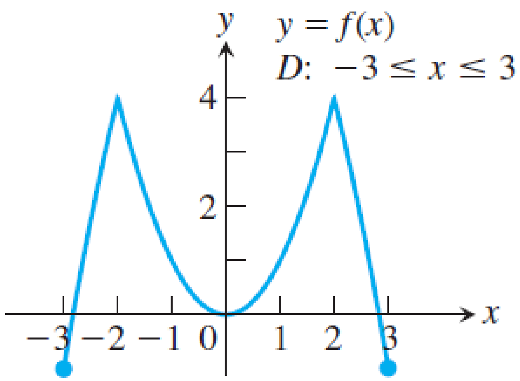
48.



49.



50.



Συναρτήσεις: παράγωγος συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)} \qquad \frac{1}{a^2-b^2} = \frac{1}{(a-b)(a+b)}$$

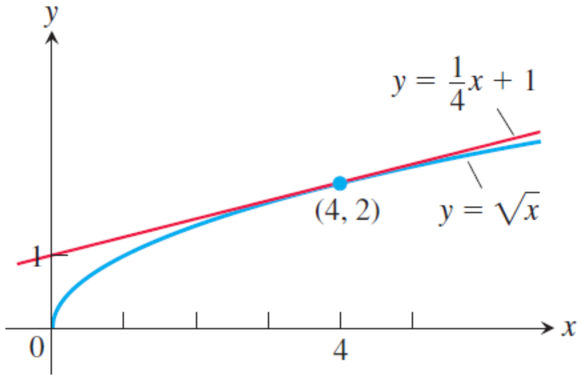
$$= \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$



Συναρτήσεις: παράγωγος

Η $f'(x)$ είναι μια καινούργια συνάρτηση (η παράγωγος συνάρτηση) του x. Αυτή μπορούμε να την ξαναπαραγωγίσουμε: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$, f''', …, $f^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu f}{dx^\nu}$

Κανόνες Παραγώγισης (αποδεικνύονται από τον ορισμό)

- $\frac{dc}{dx} = 0$ (c = σταθερή)
- $\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$ $\left(\Rightarrow \frac{dx}{dx} = 1\right)$
- $\frac{d}{dx}\left(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_\nu(x)\right) = f_1' \pm f_2' \pm \ldots \pm f_\nu'(x)$
- $\frac{d}{dx}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)$
- $\frac{d}{dx}\left(c f(x)\right) = c f'(x)$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)}$ $(f_2 \neq 0)$

(γενικεύεται για ν συναρτήσεις)

- $(e^x)' = e^x$ (ορισμός)(μοναδική)
- $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Συναρτήσεις: παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$y = f(x) \qquad f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x) \qquad f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

$\boxed{(c)' = 0}$ για $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

$\boxed{(x)' = 1}$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

$\boxed{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}}$ $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

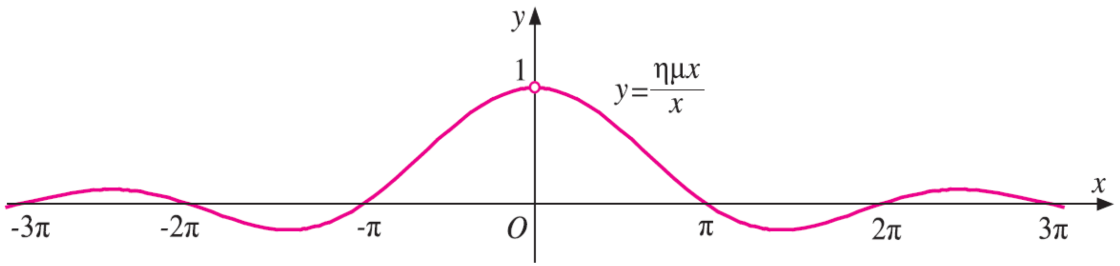
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}$$

$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Συναρτήσεις: παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$\boxed{(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h - \eta\mu x}{h}$$

$$= \eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x\cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x\cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)' = -\,\eta\mu x}$$

$$\boxed{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

$$\boxed{(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

$$\frac{d(\arcsin u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\arccos u)}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\arctan u)}{du} = \frac{1}{1+u^2}$$

Συναρτήσεις: παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

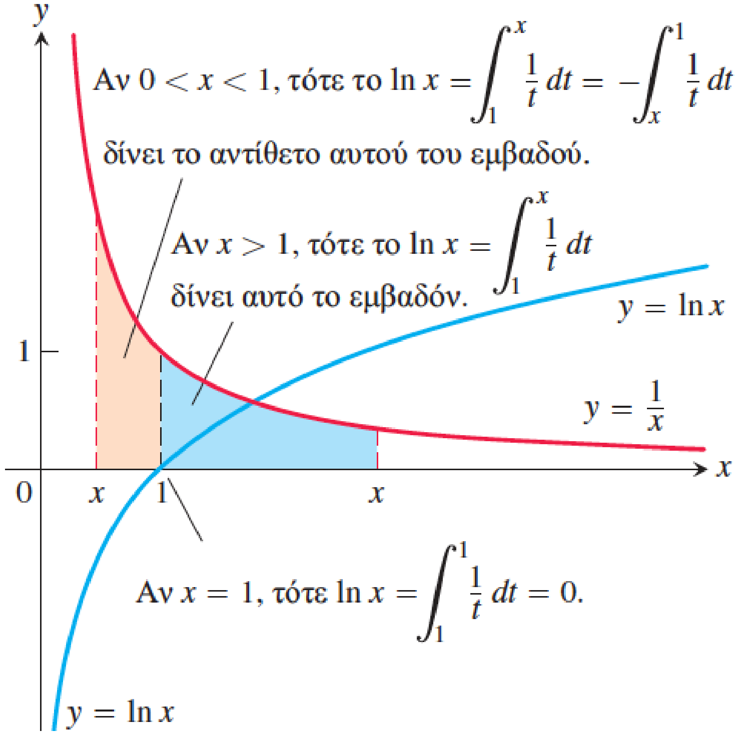
$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt,\ x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$(\eta\mu x+x^2+e^x+3)'=(\eta\mu x)'+(x^2)'+(e^x)'+(3)'=\sigma\upsilon\nu x+2x+e^x$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$(e^x\ln x)'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x},\ x>0$$

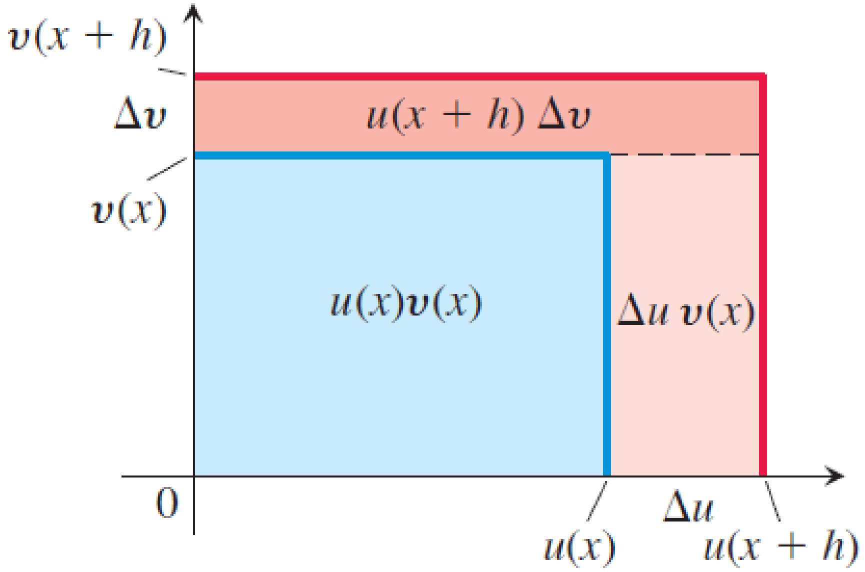
$$(cf(x))'=cf'(x)$$

$$(6x^3)'=6(x^3)'=6\cdot 3x^2=18x^2$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$



$$\Delta(uv) = u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)$$
$$= u(x+h)\Delta v + \Delta u\, v(x)$$

$$\frac{\Delta(uv)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + \frac{\Delta u}{h}v(x)$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$\boxed{(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}}$ $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$ $\quad$ στο $\mathbb{R}^*$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

Παραδείγματα

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}$$

$$= x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

$$y = \frac{t^2-1}{t^3+1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^3+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}$$

$$= \frac{2t^4+2t-3t^4+3t^2}{(t^3+1)^2}$$

$$= \frac{-t^4+3t^2+2t}{(t^3+1)^2}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

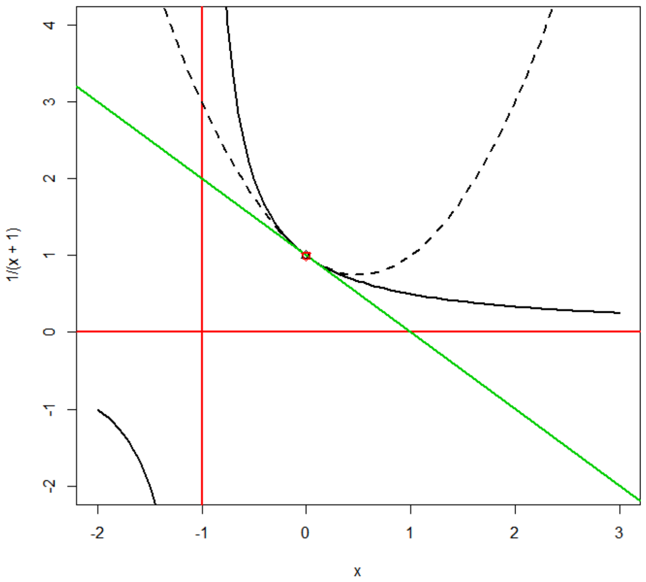
Παραδείγματα

παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$$

Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ **και** $g(x)=x^2-x+1$ **έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο** $A(0,1)$ **και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.**



να δείξουμε ότι $f'(0)=g'(0)$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{(1)'(x+1)-1(x+1)'}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x)=(x^2-x+1)'=2x-1$$

$f'(0)=-1=g'(0)$ η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση: $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,1)$ είναι: $y-1=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+1$

κανόνας της αλυσίδας

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$ $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ στο $(0, +\infty)$

αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\boxed{(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \ln \alpha}$ $\alpha > 0$ στο $\mathbb{R}$

αν $y = \alpha^{x} = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^{u}$

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^{x} \ln \alpha$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$ στο $\mathbb{R}^*$

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Εάν η f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και υπάρχει η $f'(x)$ η οποία δεν είναι μηδέν στα σημεία του Δ, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και ισχύει:

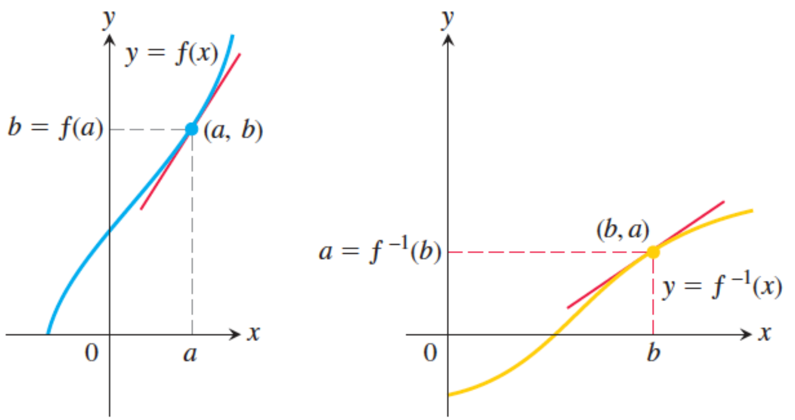
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = 1$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



Οι κλίσεις είναι μεταξύ τους αντίστροφες: $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ ή $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Παραδείγματα **Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων**

i) $f(x) = (3x^2+5)^9$ **ii)** $g(x) = e^{-x^2+1}$ **iii)** $h(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$

η συνάρτηση $y = f(x)$ γράφεται

$$y = u^9, \qquad u = 3x^2+5,$$

$$\begin{aligned} y' = (u^9)' &= 9u^8 \cdot u' \\ &= 9(3x^2+5)^8 \cdot (3x^2+5)' \\ &= 9(3x^2+5)^8 \cdot 6x \\ &= 54x(3x^2+5)^8 \end{aligned}$$

$$u = -x^2+1$$

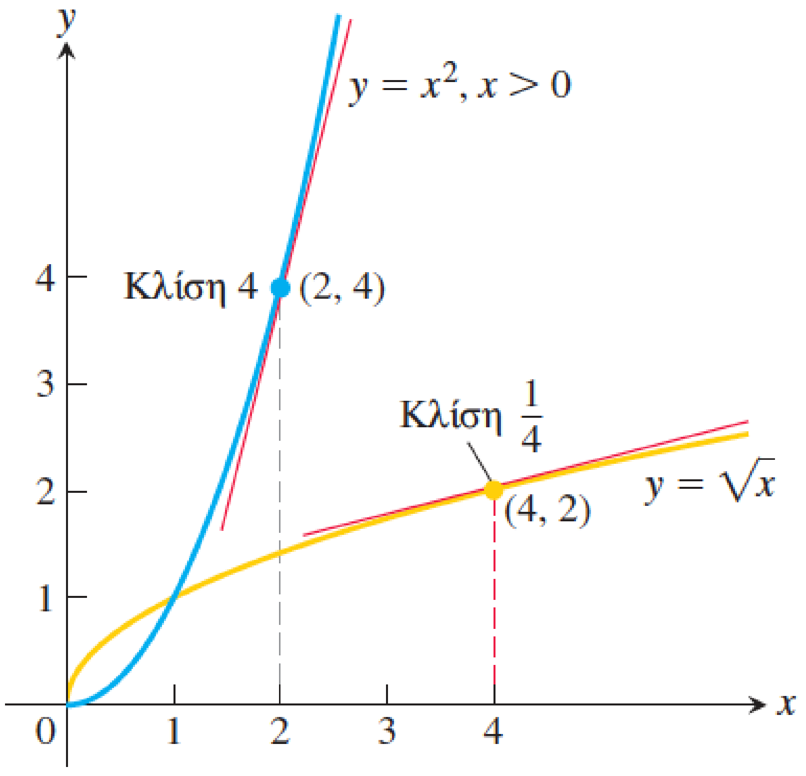
$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-x^2+1})' \\ &= e^{-x^2+1}(-x^2+1)' \\ &= e^{-x^2+1}(-2x) = -2xe^{-x^2+1} \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\ln(\sqrt{x^2+1}))' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

η περίπτωση της αντίστροφης συνάρτησης



ΣΧΗΜΑ Η παράγωγος της συνάρτησης $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ στο σημείο (4, 2) είναι η αντίστροφη της παραγώγου της $f(x) = x^2$ στο (2, 4)

$$f(x) = x^2, x > 0 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 2x \qquad (f^{-1})'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2(\sqrt{x})}$$

$$x = 2 \qquad f(2) = 4 \qquad f^{-1}(4) = 2$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(4)\right)} = \frac{1}{f'(2)} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2} = \frac{1}{4}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

η περίπτωση της αντίστροφης συνάρτησης

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = \sin x \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad f'(u) = \cos u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \qquad \cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = \tan x \qquad f^{-1}(x) = \arctan x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} \qquad f'(u) = \sec^2 u$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \qquad \sec^2 u = 1 + \tan^2 u$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}. \qquad \tan(\arctan x) = x$$

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ζαφειροπούλου-Καρατζόγλου (2020). *Σημειώσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για το Τμήμα Φαρμακευτικής*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ