Συναρτήσεις: η έννοια της παραγώγου και οι εφαρμογές της

BASIC PROPERTIES

$$(cf(x))' = c(f'(x))$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

PRODUCT RULE

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

QUOTIENT RULE

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

POWER RULE

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

CHAIN RULE

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

COMMON DERIVATIVES

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

Παραδείγματα **Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

i) $f(x) = (3x^2+5)^9$ **ii)** $g(x) = e^{-x^2+1}$ **iii)** $h(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$

η συνάρτηση $y = f(x)$ γράφεται

$$y = u^9, \qquad u = 3x^2+5,$$

$$\begin{aligned} y' = (u^9)' &= 9u^8\cdot u' \\ &= 9(3x^2+5)^8\cdot(3x^2+5)' \\ &= 9(3x^2+5)^8\cdot 6x \\ &= 54x(3x^2+5)^8 \end{aligned}$$

$$u = -x^2+1$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-x^2+1})' \\ &= e^{-x^2+1}(-x^2+1)' \\ &= e^{-x^2+1}(-2x) = -2xe^{-x^2+1} \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\ln(\sqrt{x^2+1}))' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(\sqrt{x^2+1})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

CHAIN RULE AND OTHER EXAMPLES

$$\frac{d}{dx}([f(x)]^n) = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln[f(x)]) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin[f(x)]) = f'(x)\cos[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\cos[f(x)]) = -f'(x)\sin[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan[f(x)]) = f'(x)\sec^2[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\sec[f(x)]) = f'(x)\sec[f(x)]\tan[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}[f(x)]) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)^{g(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + \ln(f(x))\,g'(x)\right)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$ αν $u = g(x)$, τότε $$(f(u))' = f'(u)\cdot u'$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Συναρτήσεις: κανόνες παραγώγισης

η περίπτωση της αντίστροφης συνάρτησης

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^u\, du/dx + e^{-u}\, du/dx}{2}$$

$$= \cosh u \frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f(x) = \cosh x \qquad f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1} x)} \qquad f'(u) = \sinh u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}} \qquad \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1, \quad \sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \cosh(\cosh^{-1} x) = x$$

Derivatives of inverse hyperbolic functions

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1 - u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1 - u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{1 + u^2}}\frac{du}{dx}, \quad u \neq 0$$

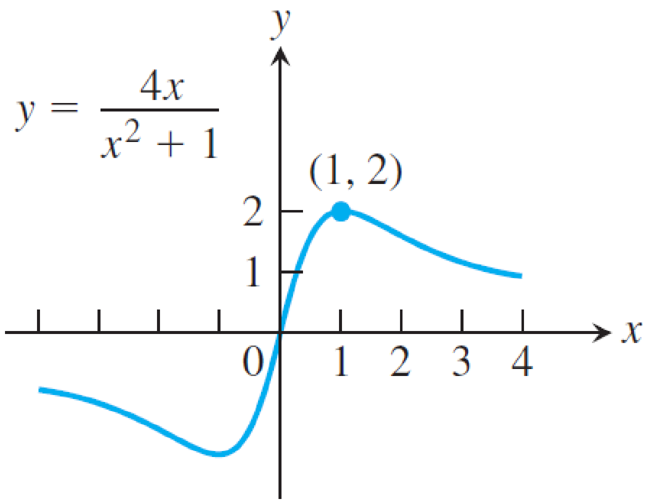
$$y = (2x + 1)^5$$

$$y = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^{-10}$$

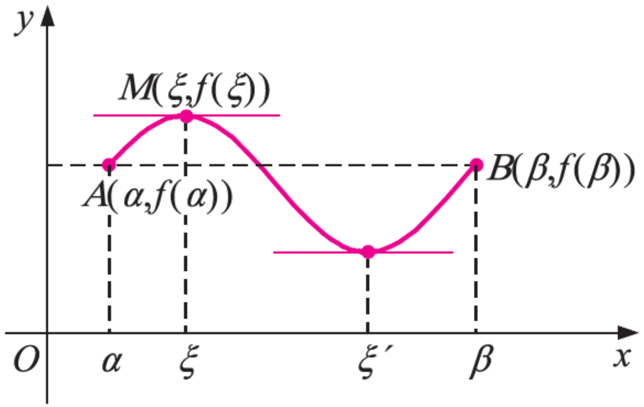
$$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 6}$$

$$y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$$

Find the tangent lines to *Newton's serpentine* (graphed here) at the origin and the point (1, 2).



ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

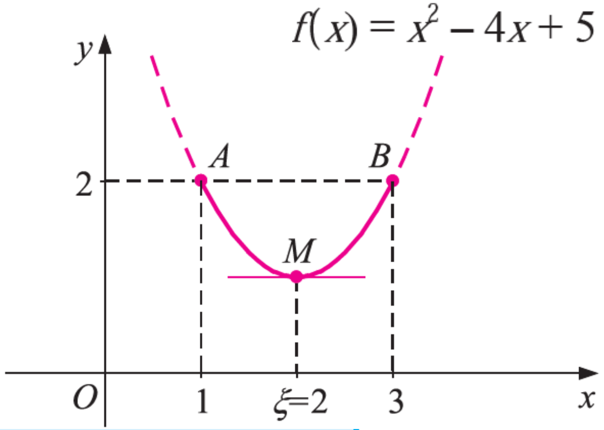


Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

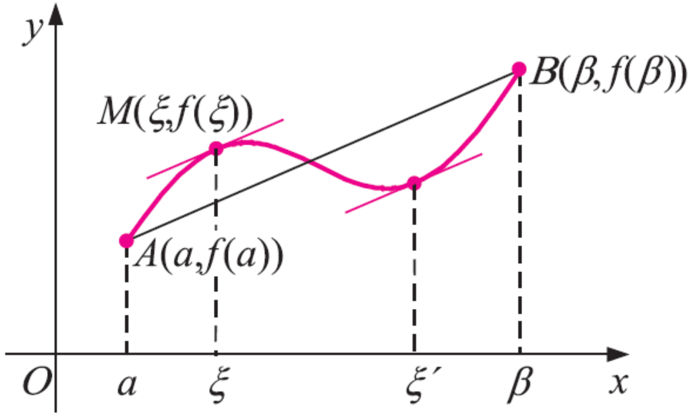


$f'(x) = 2x - 4$

$f'(\xi) = 0$

$2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

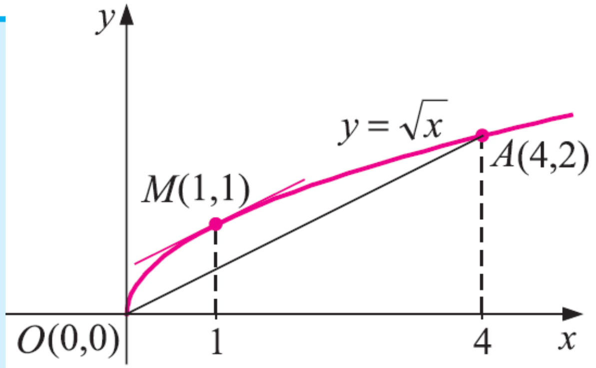


Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$



$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = 1 \Leftrightarrow \xi = 1$$

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

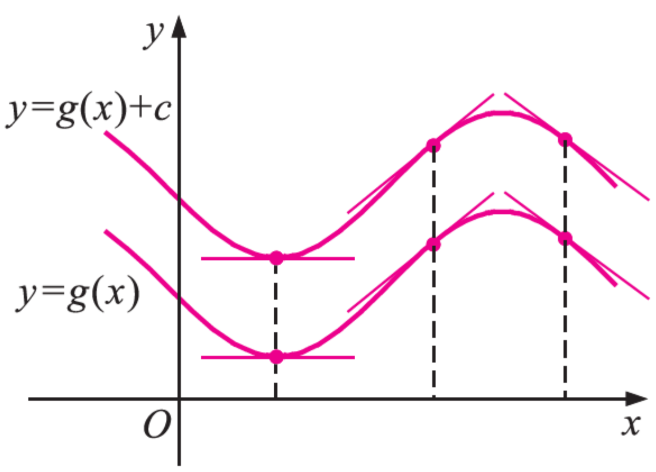
Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

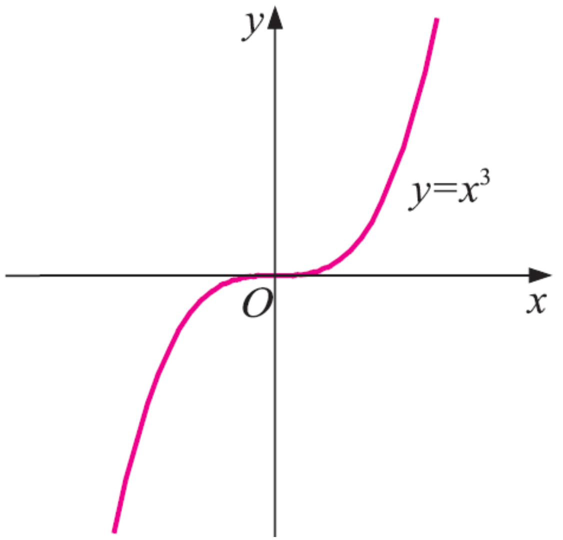
$$f(x) = g(x) + c$$



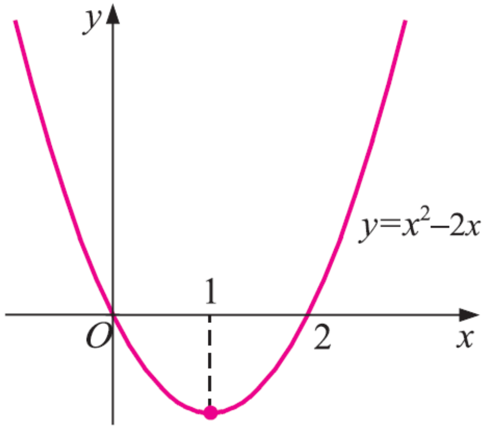
Μονοτονία συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα Δ.

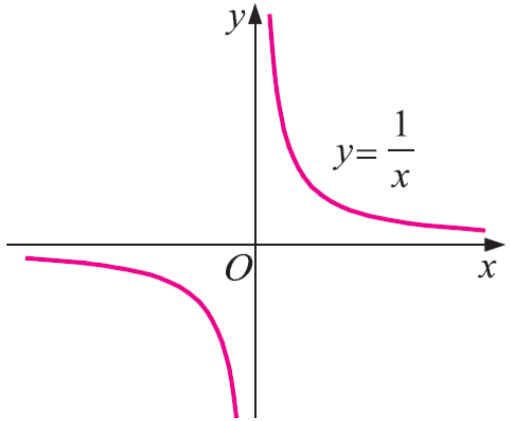
- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.



Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

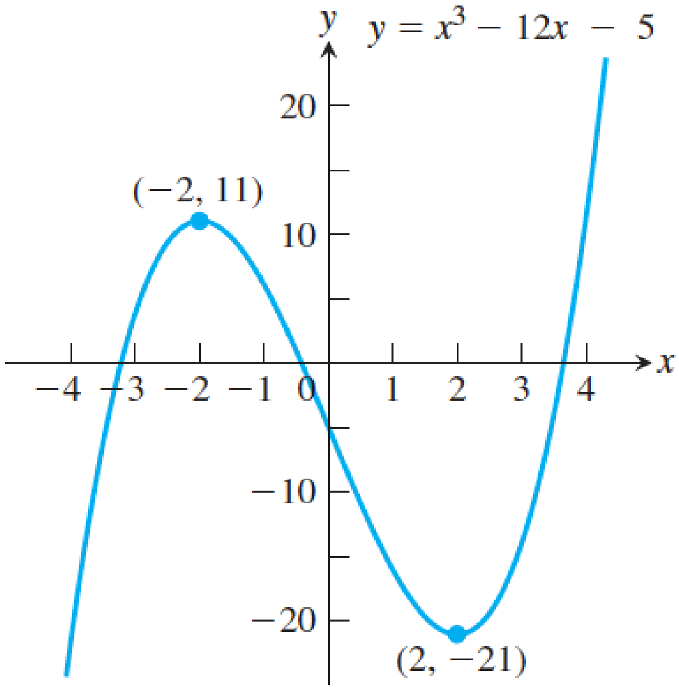


— η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x) = 2(x-1) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ και $f'(x) = 2(x-1) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$.



— η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, και $(0,+\infty)$, αφού $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$ και για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Παράδειγμα Μονοτονία συνάρτησης

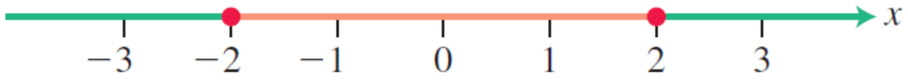


ΣΧΗΜΑ Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x - 5$ είναι μονότονη σε τρία ξεχωριστά διαστήματα

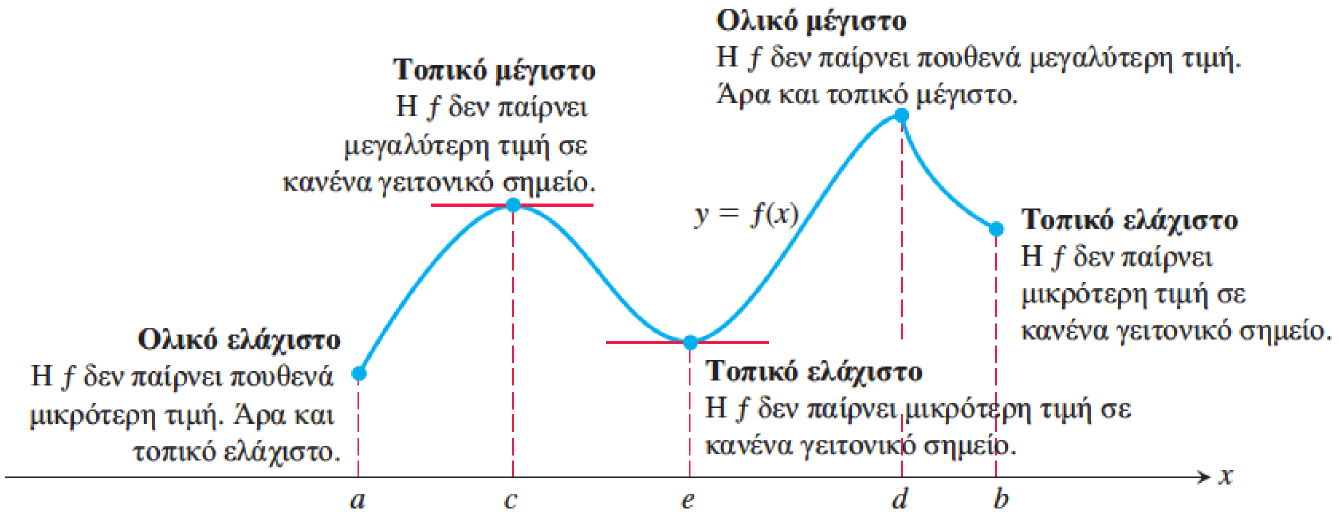
Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x - 5$ να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x + 2)(x - 2)$$

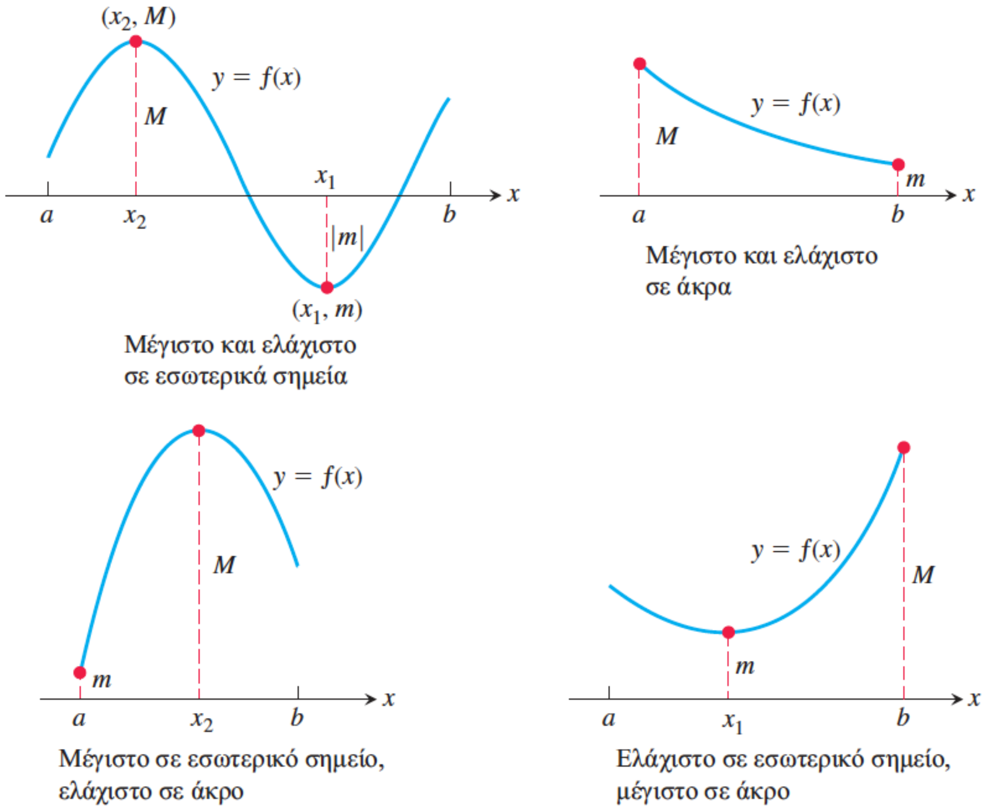
Interval	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluated	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Sign of f'	$+$	$-$	$+$
Behavior of f	increasing	decreasing	increasing



Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων



ΣΧΗΜΑ 4.5 Προσδιορισμός τύπων μεγίστων και ελαχίστων για μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $a \le x \le b$.



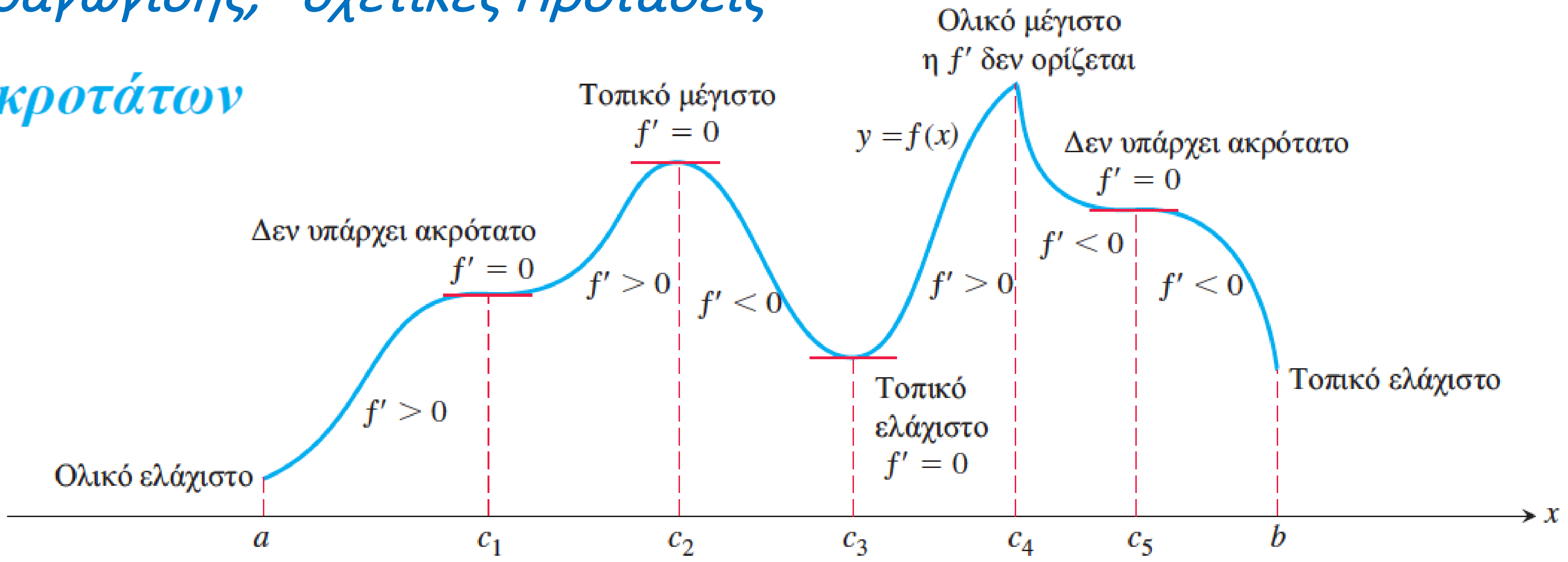
λάχιστα μιας συνεχούς

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων



ΣΧΗΜΑ 4.21 Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης βρίσκονται εκεί όπου η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Η πρώτη παράγωγος αλλάζει πρόσημο σε κάθε κρίσιμο σημείο όπου εμφανίζεται τοπικό ακρότατο.

οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**

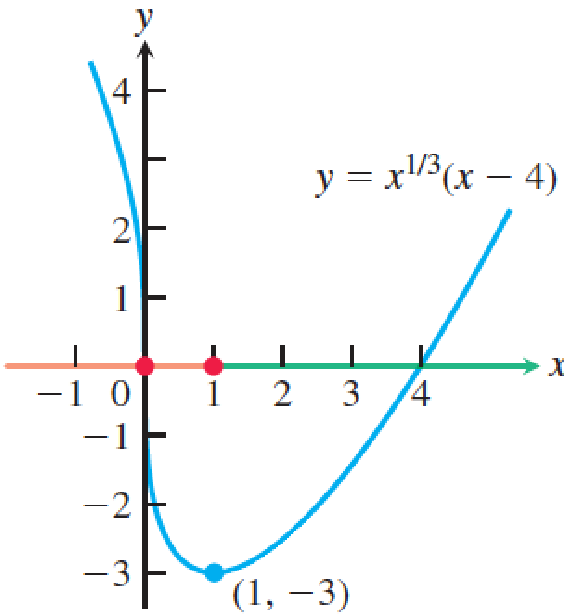
2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**

3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Συναρτήσεις: εφαρμογές της παραγώγισης

Παράδειγμα　　Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων



ΣΧΗΜΑ Η συνάρτηση $f(x) = x^{1/3}(x-4)$ είναι φθίνουσα για $x < 1$ και αύξουσα για $x > 1$

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$ να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

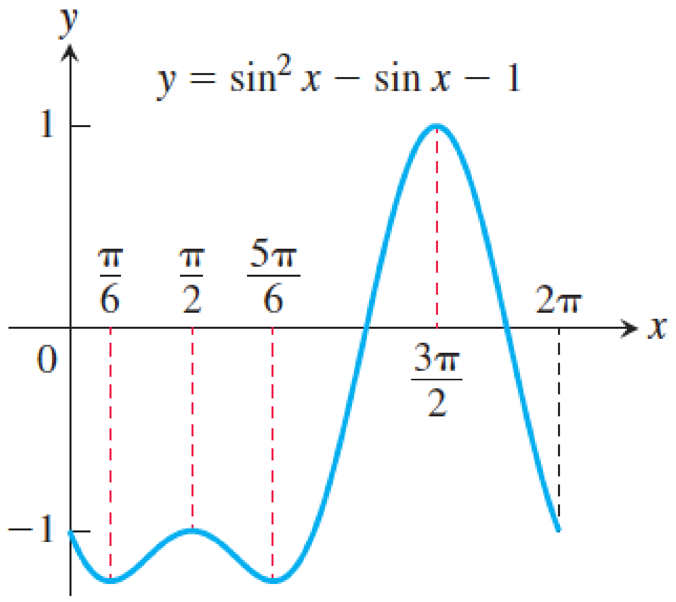
$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

$x = 1$　　　$x = 0$　　　$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

Interval	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sign of f'	$-$	$-$　0	$+$
Behavior of f	decreasing	decreasing	increasing

Παράδειγμα **Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων**

Για τη συνάρτηση $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1$, για $0 \le x \le 2\pi$ να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία, να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και να βρεθούν τα ακρότατα.



$$f'(x) = 2\sin x \cos x - \cos x = (2\sin x - 1)(\cos x)$$

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \qquad \cos x = 0.$$

$$x = \pi/6, x = 5\pi/6 \qquad x = \pi/2, \qquad x = 3\pi/2$$

$$f(\pi/6) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{5}{4}$$

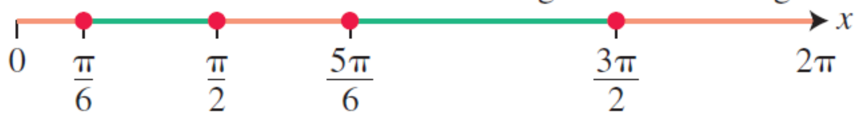
$$f(5\pi/6) = -\tfrac{5}{4}$$

$$f(\pi/2) = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$f(3\pi/2) = 1 - (-1) - 1 = 1$$

$$f(0) = f(2\pi) = -1$$

Interval	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Sign of f'	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
Behavior of f	dec	inc	dec	increasing	decreasing

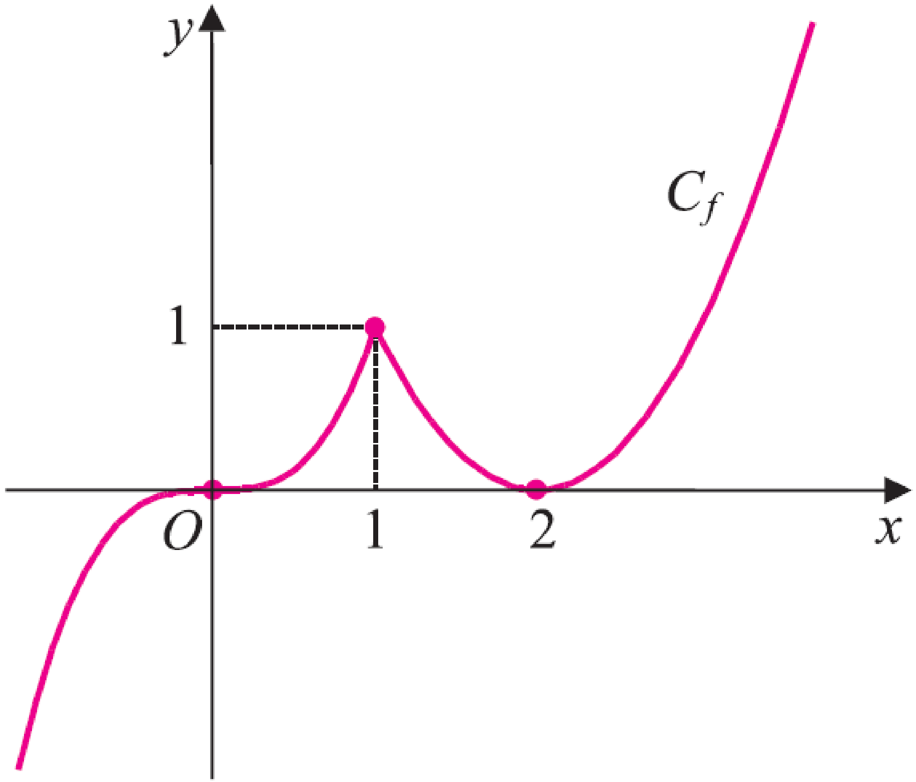


κρίσιμα σημεία $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^2 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο R και παραγωγίσιμη σε όλο το R εκτός από το 1, με:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \quad x<1 \\ 2(x-2) & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.



Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ζαφειροπούλου-Καρατζόγλου (2020). *Σημειώσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για το Τμήμα Φαρμακευτικής*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ