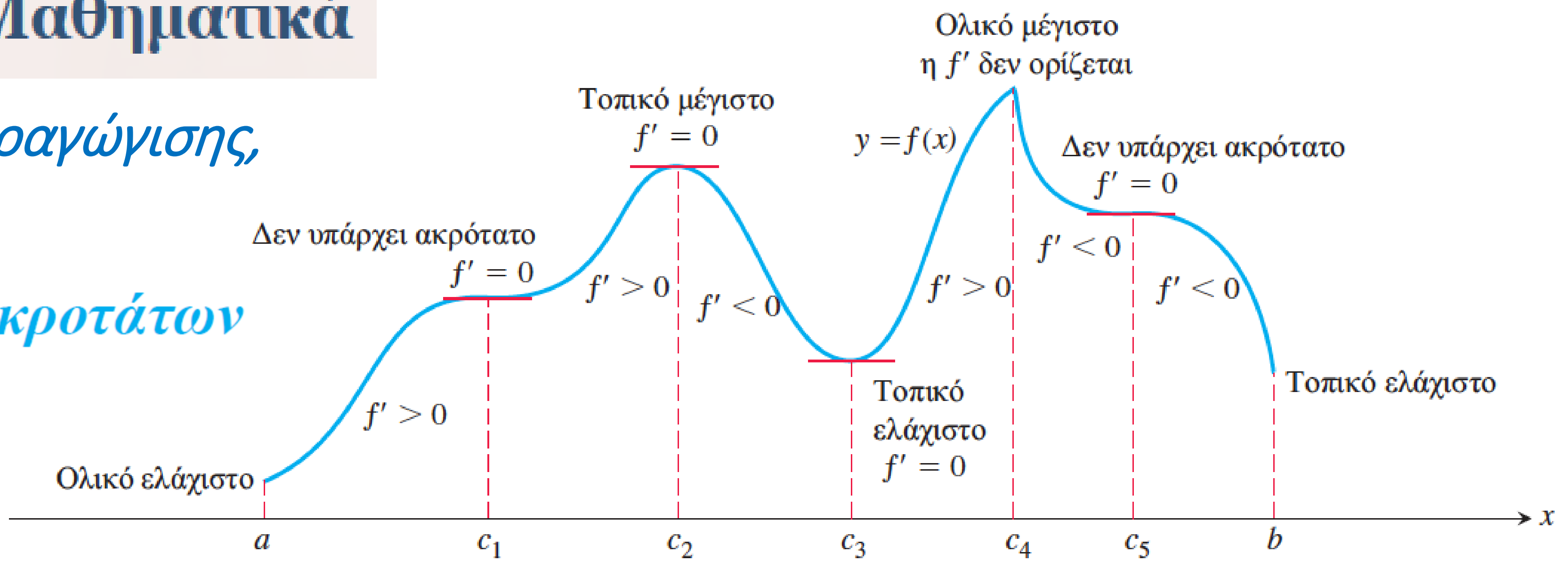
PHA-A13 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Συναρτήσεις: εφαρμογές της παραγώγισης, σχετικές Προτάσεις

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων



ΣΧΗΜΑ 4.21 Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης βρίσκονται εκεί όπου η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Η πρώτη παράγωγος αλλάζει πρόσημο σε κάθε κρίσιμο σημείο όπου εμφανίζεται τοπικό ακρότατο.

οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

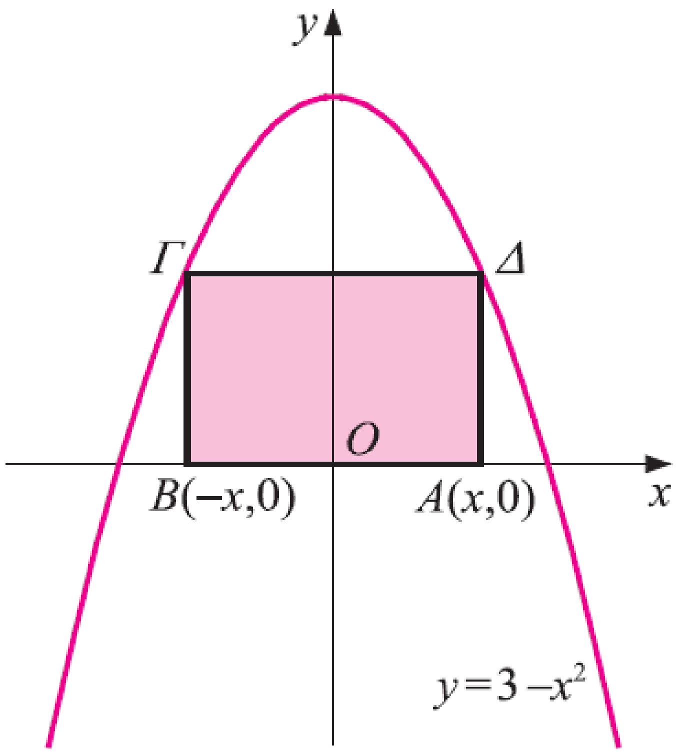
1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**

2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**

3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Να βρεθεί το $x \in [0, \sqrt{3}]$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο *ΑΒΓΔ* του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.



ΛΥΣΗ

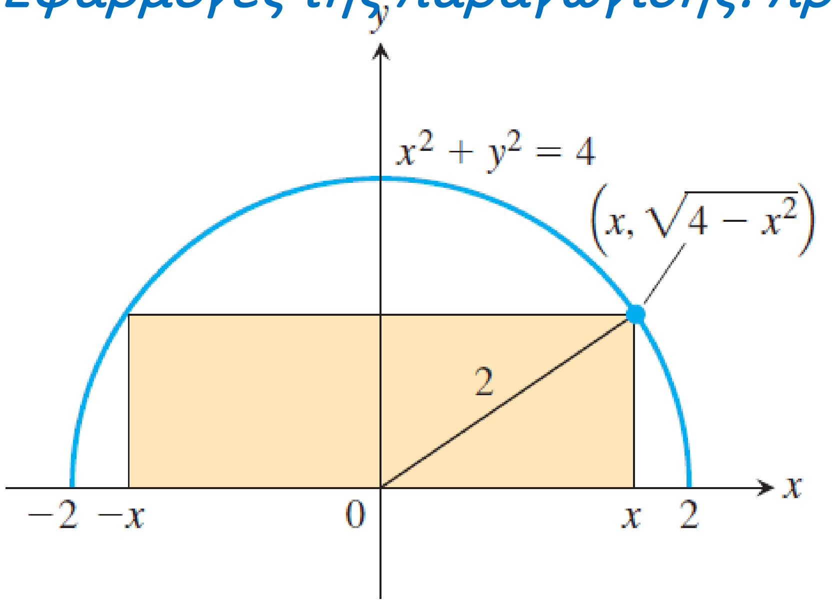
Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$$E(x) = (AB)(A\Delta) = 2x(3 - x^2) = -2x^3 + 6x.$$

Έχουμε $E'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$. Οι ρίζες της $E'(x) = 0$ είναι οι $x = -1$, $x = 1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$	0 min	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	0 min

Εφαρμογές της παραγώγισης: προβλήματα βελτιστοποίησης



Length: $2x$, Height: $\sqrt{4 - x^2}$, Area: $2x\sqrt{4 - x^2}$.

Notice that the values of x are to be found in the interval $0 \le x \le 2$, where the selected corner of the rectangle lies.

Our goal is to find the absolute maximum value of the function

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

on the domain $[0, 2]$.

The derivative

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

is not defined when $x = 2$ and is equal to zero when

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4 - x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

Critical point value: $A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4$

Endpoint values: $A(0) = 0, \quad A(2) = 0.$

Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$, σε ευρώ, κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 40000 - 6x$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + 40000x.$$

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι

$$K(x) = 4000x.$$

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι:

$$K_{ολ}(x) = 4000x + 1200x = 5200x.$$

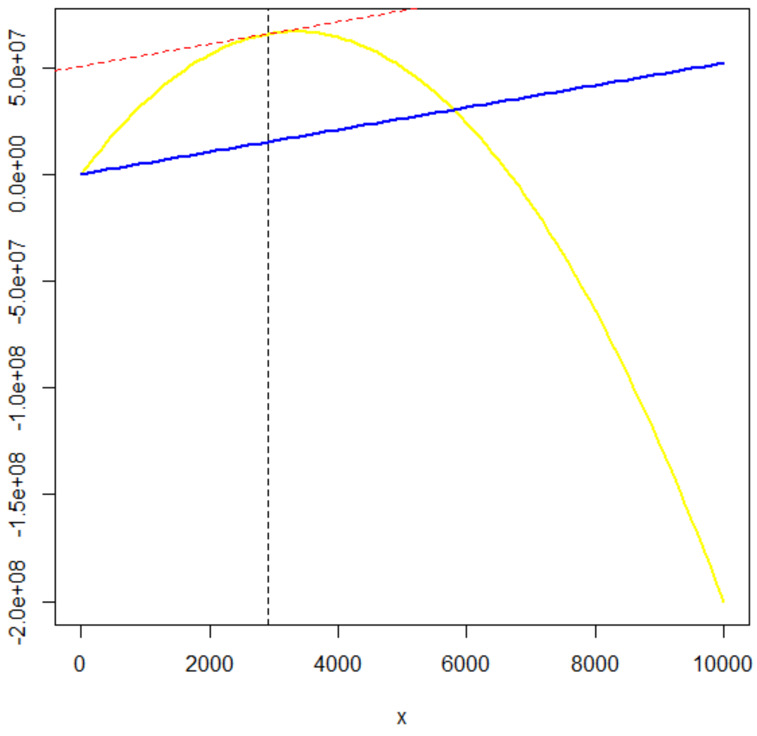
Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= E(x) - K_{ολ}(x) \\ &= -6x^2 + 40000x - 5200x \\ &= -6x^2 + 34800x. \end{aligned}$$

Έχουμε $P'(x) = -12x + 34800$, οπότε η $P'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = 2900$.

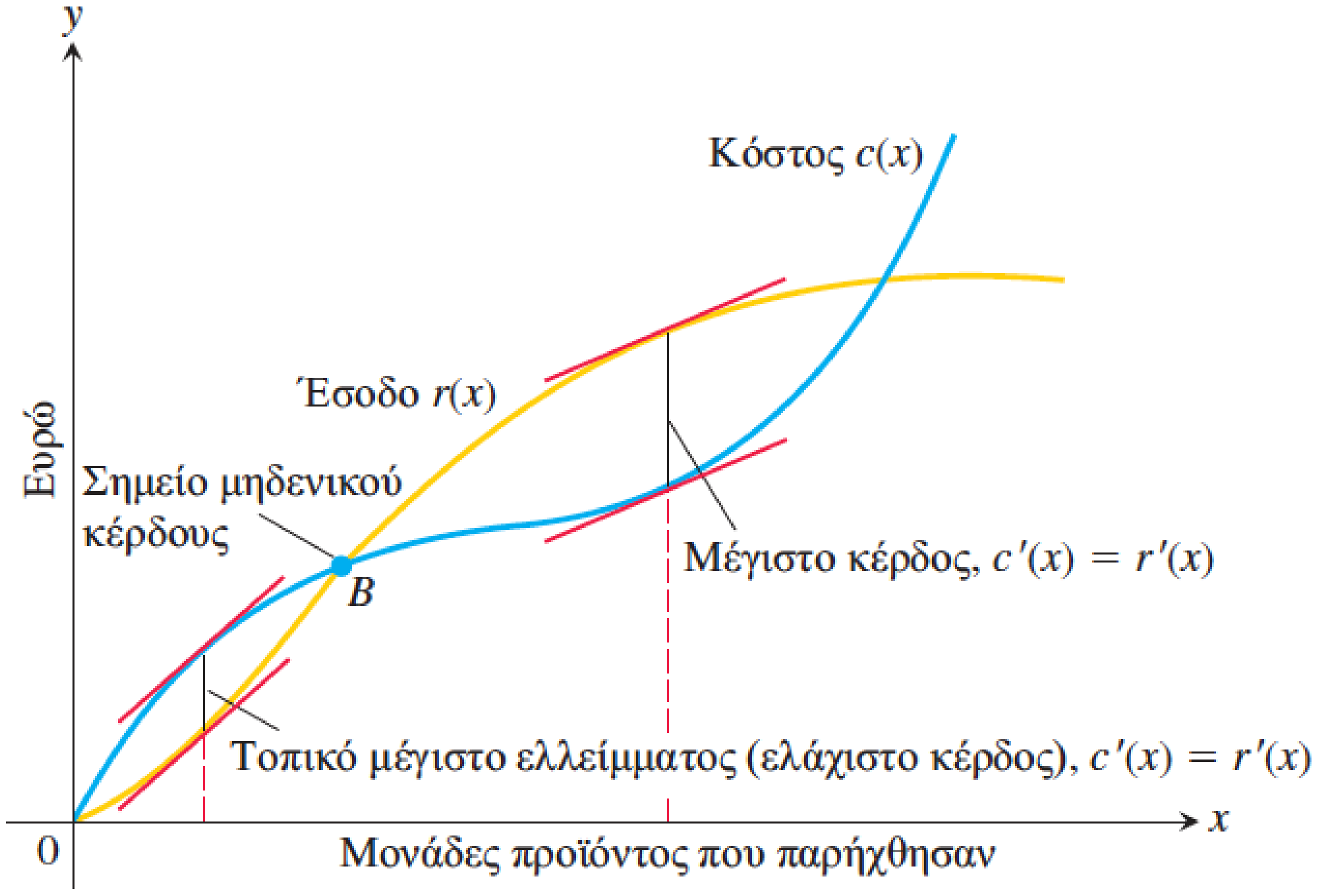
Η μονοτονία και τα ακρότατα της P στο $(0, +\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	



Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

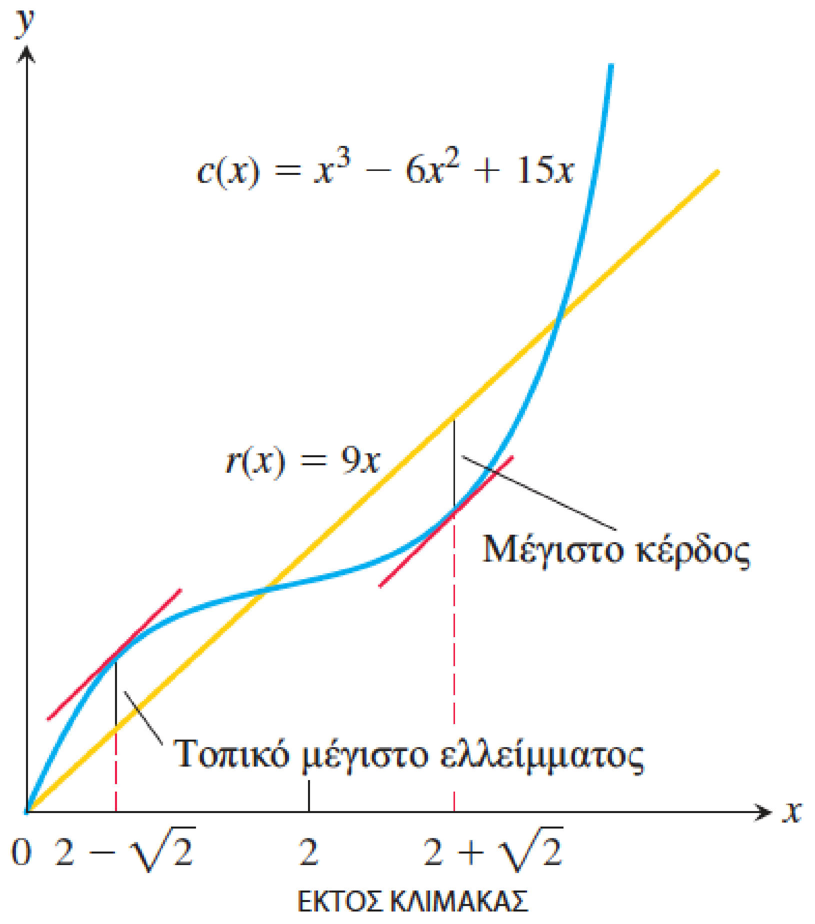
Εφαρμογές της παραγώγισης: προβλήματα βελτιστοποίησης



ΣΧΗΜΑ Η γραφική παράσταση μιας τυπικής συνάρτησης κόστους ξεκινά με τα κοίλα κάτω και αργότερα στρέφει τα κοίλα άνω. Διαπερνά την καμπύλη εσόδου στο σημείο μηδενικού κέρδους B. Στα αριστερά του B, η επιχείρηση παρουσιάζει έλλειμμα. Στα δεξιά, η επιχείρηση είναι κερδοφόρα, με το μέγιστο κέρδος να προκύπτει για $c'(x) = r'(x)$. Ακόμα δεξιότερα, το κόστος υπερβαίνει το έσοδο (ίσως εξαιτίας ενός συνδυασμού αύξησης κόστους εργατικών και πρώτων υλών και κορεσμού της αγοράς) και η παραγωγή γίνεται πάλι ασύμφορη.

Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Suppose that $r(x) = 9x$ and $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, where x represents millions of MP3 players produced. Is there a production level that maximizes profit? If so, what is it?



ΣΧΗΜΑ Οι καμπύλες κόστους και εσόδου

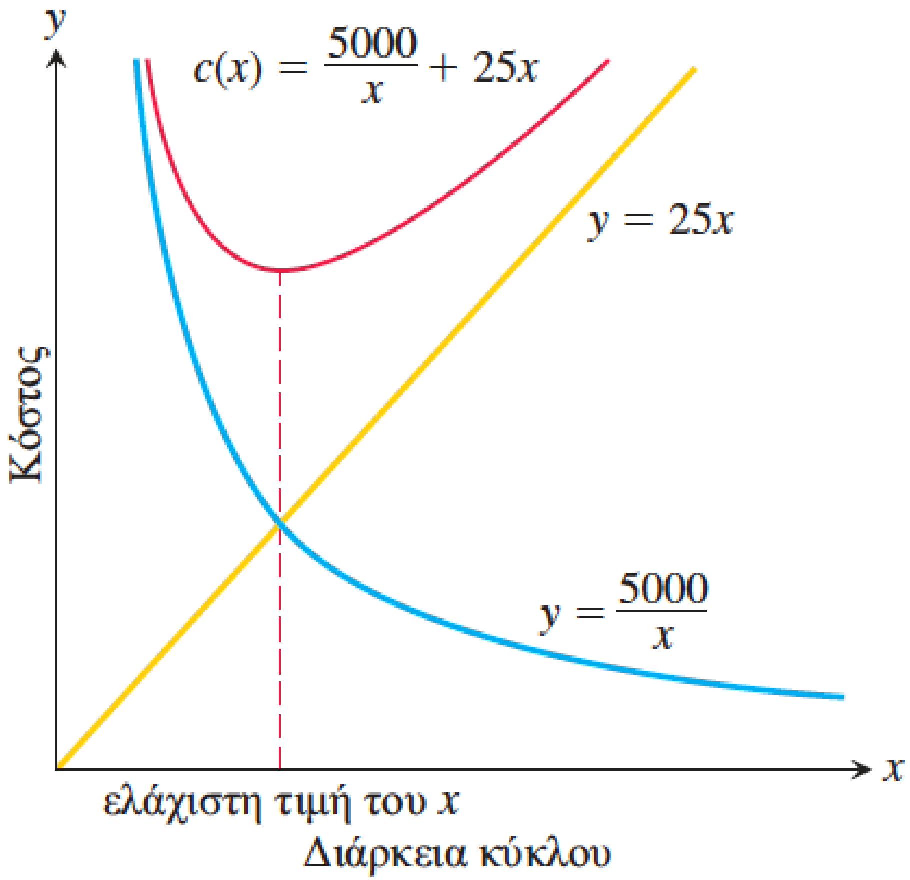
$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad \text{Set } c'(x) = r'(x).$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

The two solutions of the quadratic equation are

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586 \quad \text{and}$$
$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414.$$

Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

A cabinetmaker uses cherry wood to produce 5 desks each day. Each delivery of one container of wood is \$5000, whereas the storage of that material is \$10 per day per unit stored, where a unit is the amount of material needed by her to produce 1 desk. How much material should be ordered each time, and how often should the material be delivered, to minimize her average daily cost in the production cycle between deliveries?



ΣΧΗΜΑ Το μέσο ημερήσιο κόστος $c(x)$ είναι το άθροισμα μιας υπερβολής και μιας γραμμικής συνάρτησης

$$\text{Cost per cycle} = \text{delivery costs} + \text{storage costs}$$

$$\text{Cost per cycle} = \underbrace{5000}_{\substack{\text{delivery}\\\text{cost}}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\substack{\text{average}\\\text{amount stored}}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{number of}\\\text{days stored}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{storage cost}\\\text{per day}}}$$

average daily cost c(x)

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \qquad x > 0.$$

$$c'(x) = -\frac{500}{x^2} + 25 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14.14$$

$$c(\sqrt{200}) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx \$707.11$$

Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

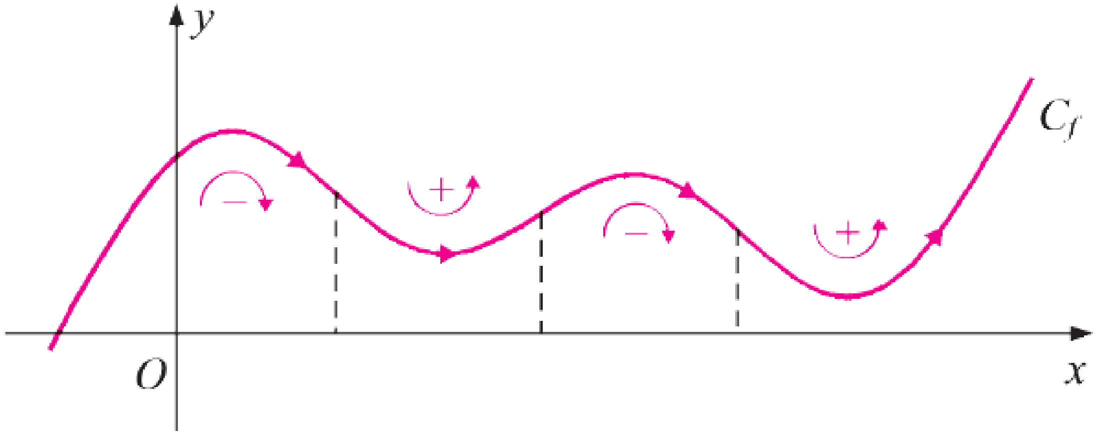
Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $0 < x < 3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x, να γίνει μέγιστος.

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα Δ και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του Δ.

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του Δ.

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά.



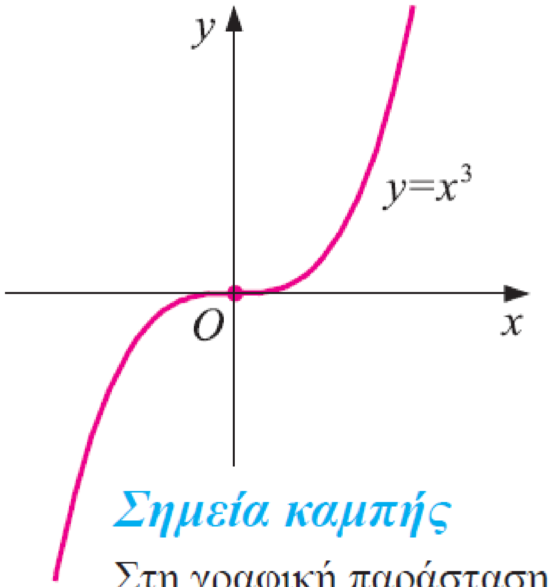
ΘΕΩΡΗΜΑ

> Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του Δ.
>
> - Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
> - Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (Σχ. 41),

— είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, αφού $f''(x) = 6x < 0$, για $x \in (-\infty, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ενώ,

— είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, αφού $f''(x) = 6x > 0$, για $x \in (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.



Σημεία καμπής

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ παρατηρούμε ότι,

(α) στο σημείο $O(0, 0)$ η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη και

(β) εκατέρωθεν του $x_0 = 0$, η κυρτότητα της καμπύλης αλλάζει.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη. Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ

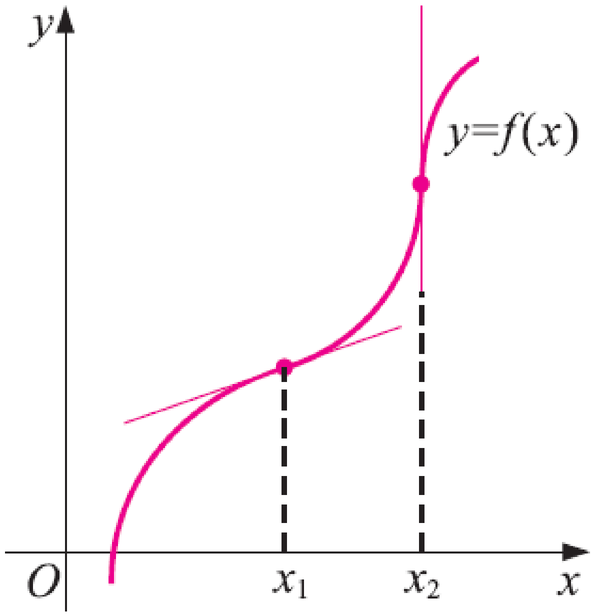
Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Συναρτήσεις: εφαρμογές της παραγώγισης

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως, *οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**

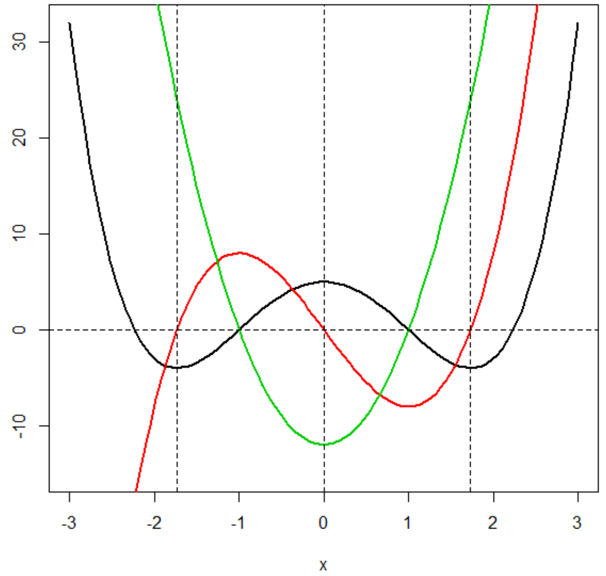
ii) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''**



Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

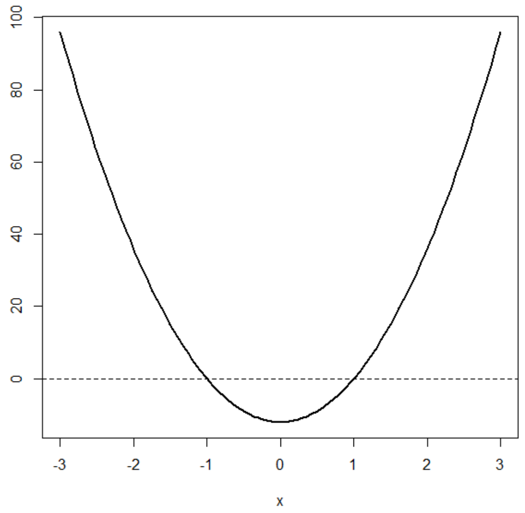
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5,$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.



Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0 Σ.Κ		0 Σ.Κ		

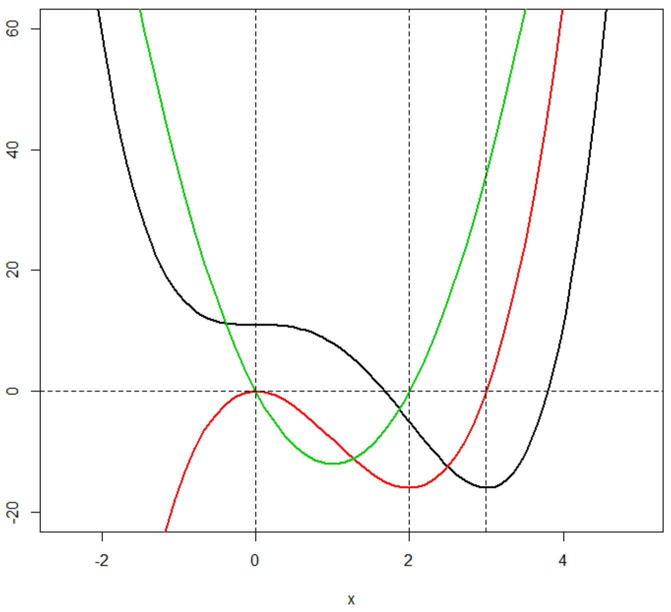


Επομένως, η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-1,1]$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία -1, 1 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$ είναι σημεία καμπής της C_f.

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11.$$



1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x = 3$, $x = 0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Οι ρίζες της f'' είναι οι $x = 0$, $x = 2$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	11 Σ.Κ.	$\cap$	-5 Σ.Κ.	$\cup$	

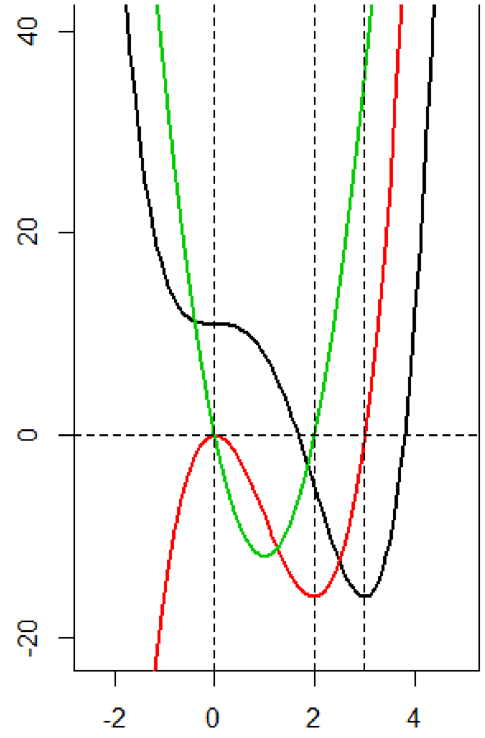
4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4-4x^3+11)=\lim_{x\to+\infty}x^4=+\infty$$

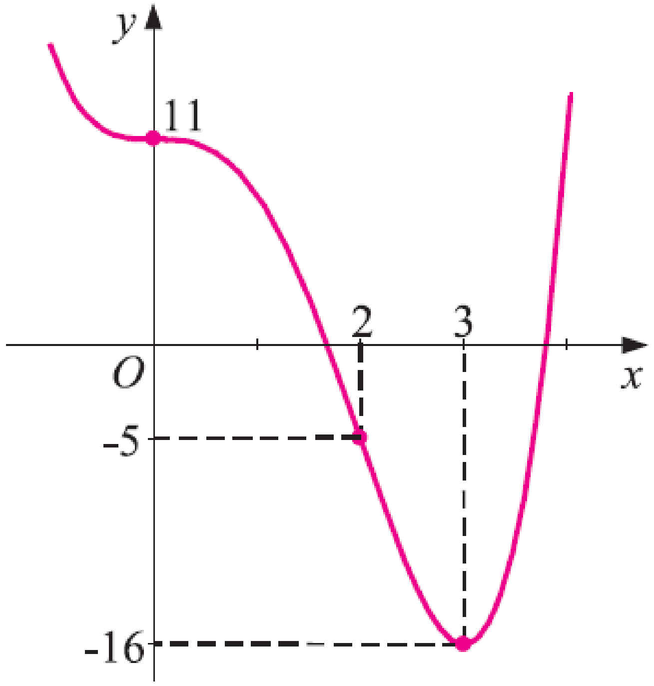
και

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4-4x^3+11)=\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty.$$

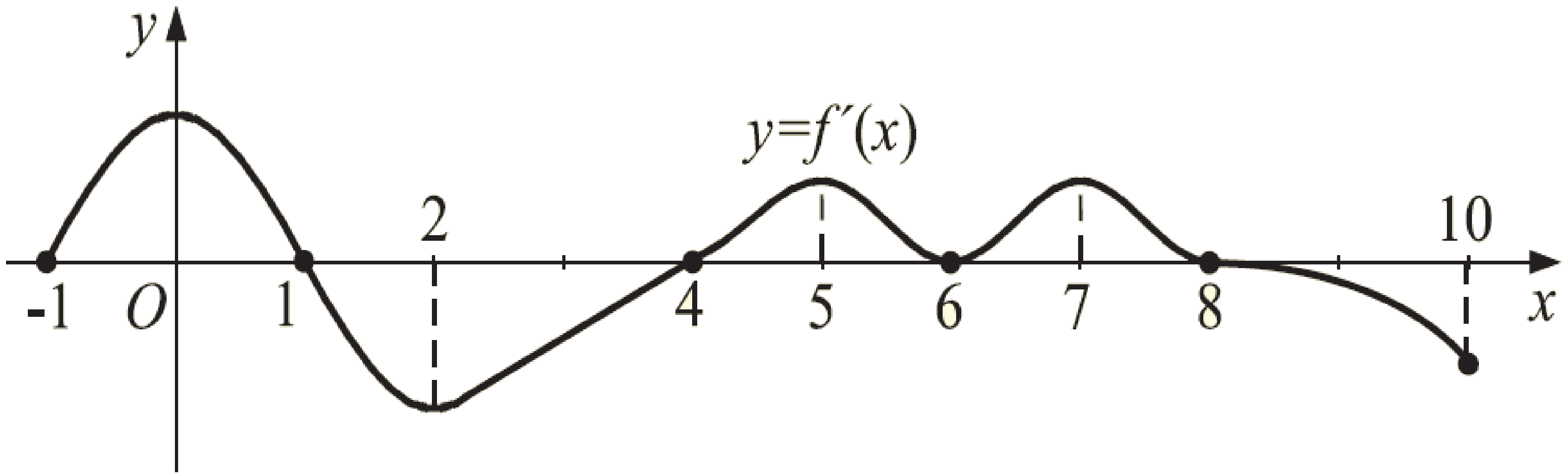
5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.



x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	11 Σ.Κ.	$\searrow$	-5 Σ.Κ.	$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$



Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

Κανόνες de L' Hospital

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$

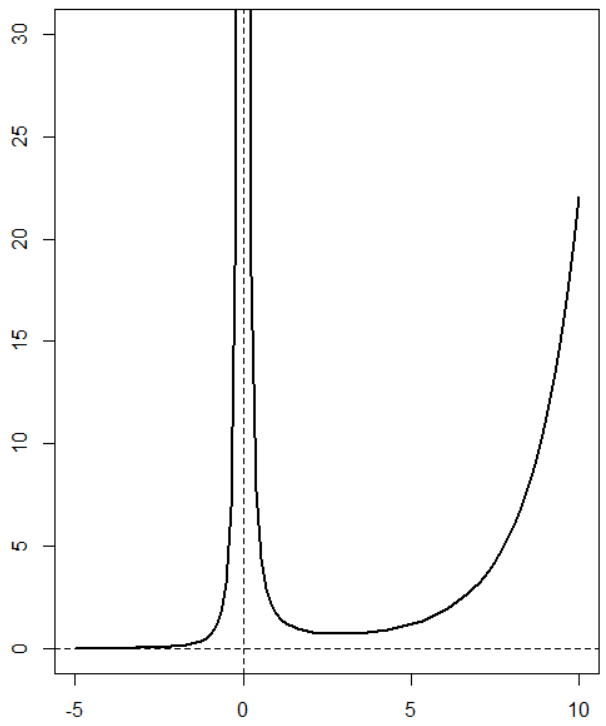
Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0,\quad \lim_{x\to 0}x^3=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2}=+\infty$$



η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης

Κανόνες de L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$ ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

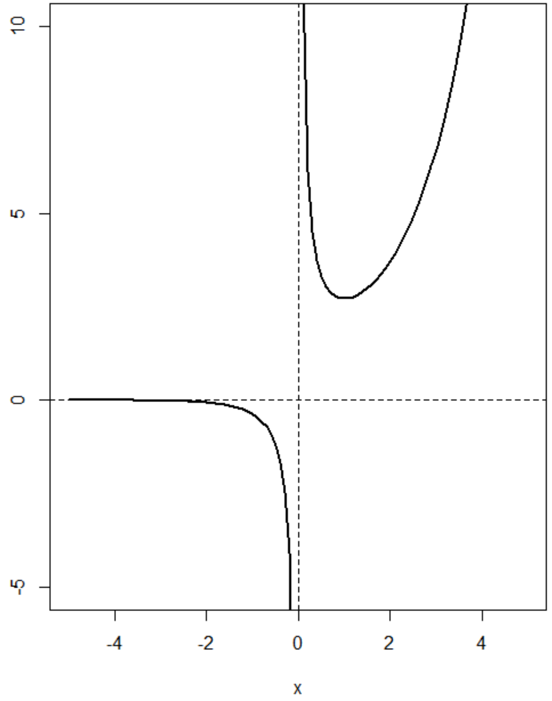
(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

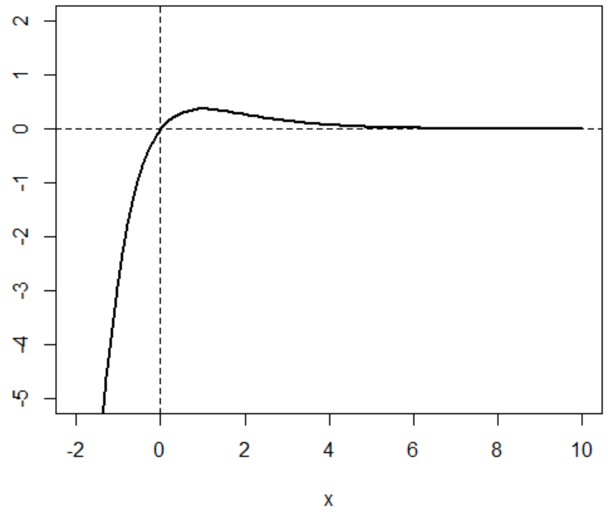


- Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $\begin{matrix}-\infty\\ +\infty\end{matrix}$, αρκεί τα όρια $\lambda=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\to+\infty}}\dfrac{f(x)}{x}$ και

$\beta=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\to+\infty}}[f(x)-\lambda x]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x}{e^x}.$$



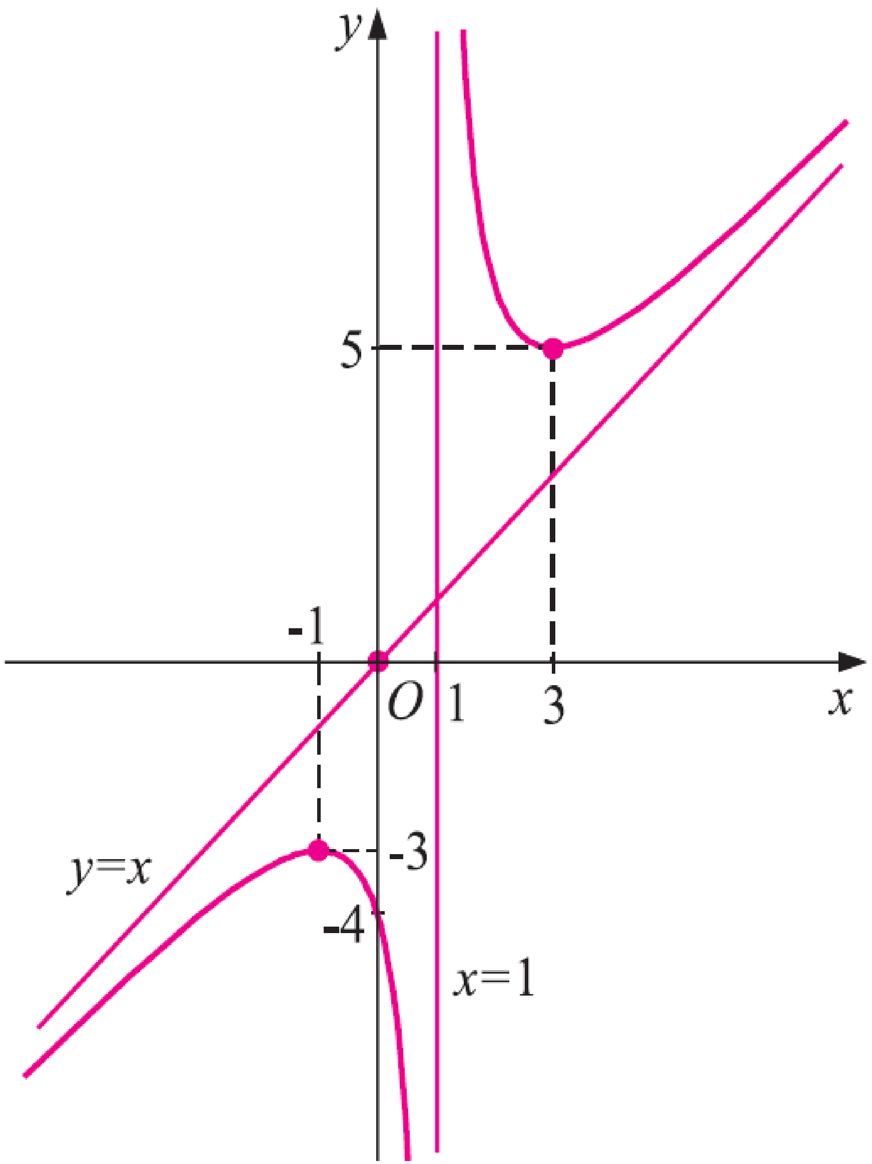
Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση



$$f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1}.$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} \right)' = \frac{(2x-1)(x-1) - x^2 + x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

Οι ρίζες της f' είναι $-1, 3$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

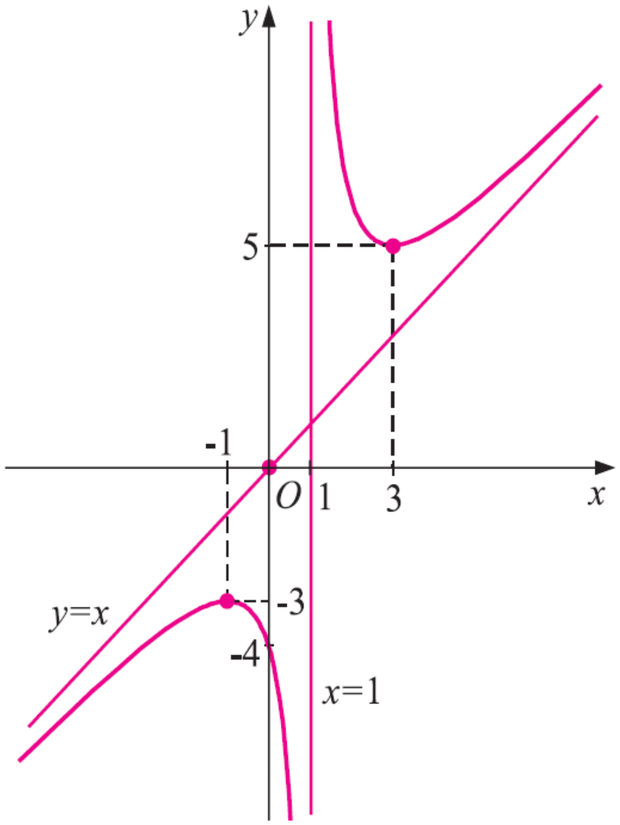
x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-3 T.M.	$\searrow$	‖	$\searrow$	5 T.E.	$\nearrow$	

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\frown$	‖	$\smile$	

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	-3 T.M.	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5 T.E.	↗ $+\infty$	



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1, \text{ οπότε } \lambda=1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0, \text{ οπότε } \beta=0.$$

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Ζαφειροπούλου-Καρατζόγλου (2020). *Σημειώσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για το Τμήμα Φαρμακευτικής*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ