Συναρτήσεις: Αντιπαράγωγος ή αόριστο ολοκλήρωμα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**[1] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ**, συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα εφ του x ντε x”. Δηλαδή,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

Για παράδειγμα,

$$\int \text{συν}x\,dx = \text{ημ}x + c,\ \text{αφού}\ (\text{ημ}x)' = \text{συν}x.$$

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται **ολοκλήρωση**. Η σταθερά c λέγεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.

- $\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$
- $\int a \, \mathrm{d}x = ax + C$
- $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \; n \neq -1$
- $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C; \; a > 0, \; a \neq 1$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \sqrt{x-a} \quad dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \quad dx = 2\sqrt{x \pm a}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\int \frac{a}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (x > a > 0)$$

Κανόνες Ολοκλήρωσης

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε

- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$$\int (3\eta\mu x - 2e^x)dx = \int 3\eta\mu x dx - \int 2e^x dx$$
$$= 3\int \eta\mu x dx - 2\int e^x dx$$
$$= -3\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + c$$

Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και να ισχύει $f'(x) = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\int f'(x)dx = \int (2x-1)dx$$

$$f(x) + c_1 = x^2 - x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - x + c_2 - c_1,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Για να διέρχεται η f από το σημείο $A(2, 3)$ πρέπει και αρκεί $f(2) = 3$ ή $2^2 - 2 + c = 3$, δηλαδή $c = 1$. Επομένως, $f(x) = x^2 - x + 1$.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$
όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

$F'(u) = f(u) \qquad F'(g(x)) = f(g(x))$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx$$
$$= \int (F(g(x)))'dx$$
$$= F(g(x)) + c$$

$\left(\text{αφού } (F(g(x))\,' = F'(g(x))g'(x)\right)$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du$$

Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και

$$= \int u^{1/2}du$$

$du = (x^2 + 1)'dx = 2xdx$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ **ii)** $\int \varepsilon\varphi x dx$

i) Θέτουμε $u = 1 + e^x$, οπότε $du = (1 + e^x)' dx = e^x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{1+e^x} + c$$

ii) Έχουμε $\int \varepsilon\varphi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$. Επομένως, αν θέσουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $du = (\sigma\upsilon\nu x)' dx$ $= -\eta\mu x dx$, έχουμε:

$$\int \varepsilon\varphi x dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c.$$

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{antiderivative}} + \underbrace{C}_{\text{arbitrary constant}}.$$

$$\int (7x - 2)^3\, dx = \frac{(7x - 2)^4}{28} + C$$

$$\int (3x + 5)^{-2}\, dx = -\frac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$$

$$\int \sec^2 (5x - 1)\, dx = \frac{1}{5} \tan (5x - 1) + C$$

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = -\frac{1}{x + 1} + C$$

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \frac{x}{x + 1} + C$$

$$\int \frac{1}{1 - 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln |1 - 2x| + c$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + c$$

$$\int x\eta\mu 2x dx = \frac{1}{2}\int x(-\sigma\upsilon\nu 2x)'dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)e^{\alpha x}dx} \quad \boxed{\int P(x)\eta\mu(\alpha x)dx,} \quad \boxed{\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx}$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - \int 2x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$\int 2x^2 \eta\mu 2x dx \qquad \int 4x \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int P(x)\ln(\alpha x)\,dx,}$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\int (4x^3+1)\ln x\,dx = \int (x^4+x)'\ln x\,dx = (x^4+x)\ln x - \int (x^4+x)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (x^4+x)\ln x - \int (x^3+1)\,dx = (x^4+x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + c$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx,}$$

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx}$$

$I = \int e^x \eta\mu(2x)dx$, οπότε έχουμε

$$I = \int (e^x)'\eta\mu(2x)dx = e^x\eta\mu(2x) - 2\int e^x\sigma\upsilon\nu(2x)dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2\int (e^x)'\sigma\upsilon\nu(2x)dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) - 4\int e^x\eta\mu 2x dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) - 4I.$$

$$5I = e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) + c_1,$$

$$I = \frac{1}{5}e^x\eta\mu(2x) - \frac{2}{5}e^x\sigma\upsilon\nu(2x) + c.$$

$$\boxed{\int \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx, \text{ με } \beta^2-4\alpha\gamma>0}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} \qquad \mathbb{R}-\{2,3\}$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά:

$$(A+B-2)x=3A+2B+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2,3\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A+B-2=0 \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \text{ ή, ισοδύναμα, } \begin{cases} A=-5 \\ B=\ \ 7 \end{cases}.$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)dx=\int\frac{-5}{x-2}dx+\int\frac{7}{x-3}dx \quad =-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c$$

$$\int \frac{P(x)}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx,$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 και $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $x^2 - 3x + 7$ με το πολυώνυμο $x^2 - 5x + 6$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 1 dx + \int \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$= x - 5\ln|x - 2| + 7\ln|x - 3| + c$$

- Ρητές ως προς ημx, συνx (μορφή R(ημx, συνx))

Θέτουμε: $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\tau o\xi\varepsilon\varphi t$ οπότε $\eta\mu x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

Παράδειγμα

$$I=\int\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}dx \Rightarrow \mathrm{I}=\int\frac{2(1-t)^2}{(1+t)^2(1+t^2)}dt$$ που είναι ρητή και δίνει:

$$\mathrm{I}=\int\frac{4}{(1+t)^2}dt-\int\frac{2}{1+t^2}dt=-\frac{4}{1+t}-\tau o\xi\varepsilon\varphi t+c=-\frac{4}{1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}-x+c$$

Ρητές ως προς $\sqrt[n]{\alpha x+\beta}$ (μορφή R($\sqrt[n]{\alpha x+\beta}$))

Θέτουμε: $\sqrt[n]{\alpha x+\beta}=t \Rightarrow \quad x=\dfrac{t^n-\beta}{\alpha}$ και $dx=\dfrac{n}{\alpha}t^{n-1}dt$

$$I=\int \frac{x}{x+\sqrt[5]{(x+1)^3}+1}dx \Rightarrow \int \frac{5(t^6-t)}{(t^2+1)}dt \quad (\text{όπου } \sqrt[5]{x+1}=t, \Rightarrow x=t^5-1)$$

που δίνει $$I=\int t^4dt-\int t^2dt+\int dt-\int \frac{t}{t^2+1}dt-\int \frac{1}{1+t^2}dt=\ldots$$

Ρητές ως προς $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ (μορφή R($\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$))

Αν για κατάλληλα t, k ισχύει ένα από τα παρακάτω τρία :

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\begin{cases}\sqrt{k^2-t^2}\,,\ \theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ t=k\,\sigma\upsilon\nu z\ \ \acute{\eta}\ \ t=k\,\eta\mu z\\ \sqrt{t^2-k^2}\,,\ \theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ t=\dfrac{k}{\eta\mu z},\ \ \acute{\eta}\ t=k\cosh z\\ \sqrt{t^2+k^2}\,,\ \theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ t=k\,\varepsilon\varphi z,\ \ \acute{\eta}\ t=k\sinh z\end{cases}$$

$$I=\int\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx\ .\ \text{Θέτουμε}\ x-1=t\ \ \text{οπότε}\ \ I=\int\frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}dx$$

Α΄ τρόπος   Θέτουμε $t=\varepsilon\varphi z\ \Rightarrow dt=\dfrac{dz}{\sigma\upsilon\nu^2 z}$

$$I=\int\frac{\eta\mu^3 z}{\sigma\upsilon\nu^4 z}dz=-\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 z}{\sigma\upsilon\nu^4 z}d\sigma\upsilon\nu z=\frac{-1}{\sigma\upsilon\nu z}+\frac{1}{3\sigma\upsilon\nu^3 z}+c=$$

$$=\ldots=\frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{3/2}-(x^2-2x+2)^{1/2}+c$$

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Μωυσιάδης (2016). *Ανώτερα Μαθηματικά, Αφοι Κυριακίδη Εκδόσεις α.ε.*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ