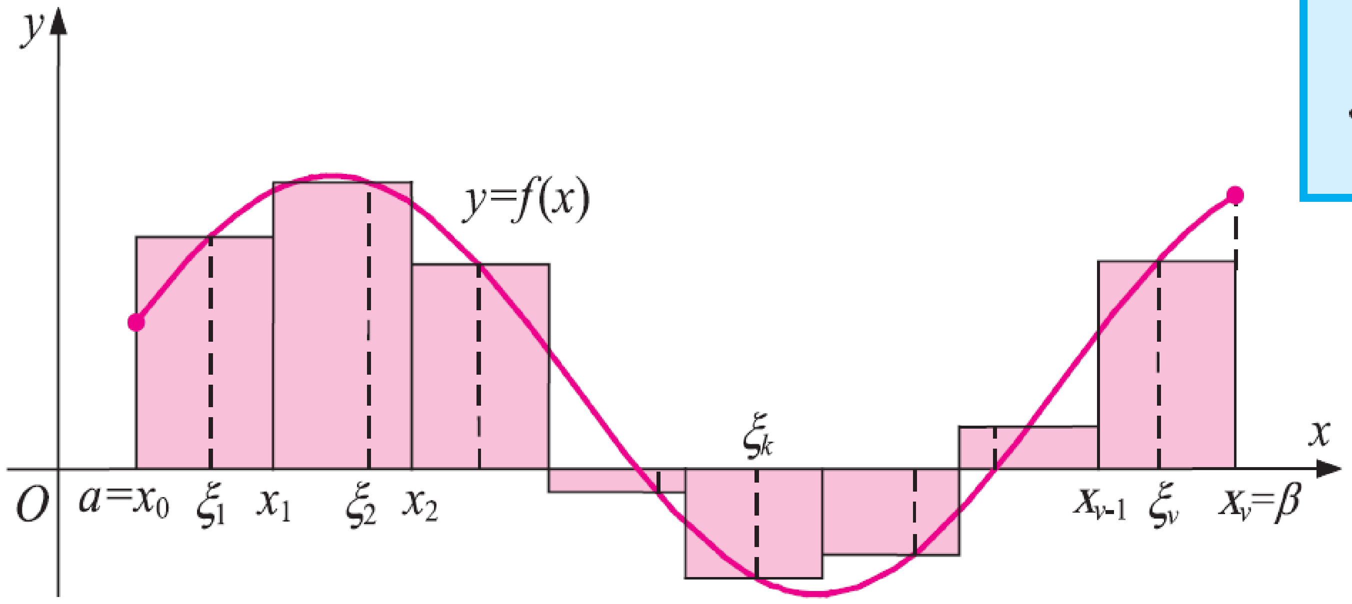
Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

ορισμένο ολοκλήρωμα

της συνεχούς συνάρτησης f

από το α στο β

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x \qquad S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$$

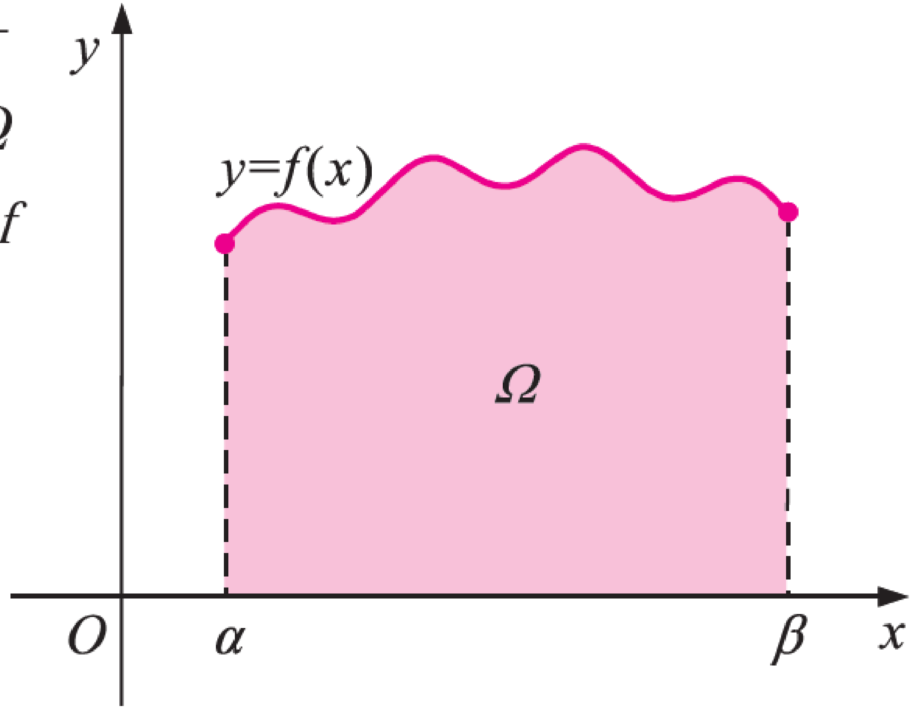
Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$

Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{f(x)dx = E(\Omega)}.$$



Επομένως,

$$\boxed{\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0.}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\,,\ x\in\Delta,$$

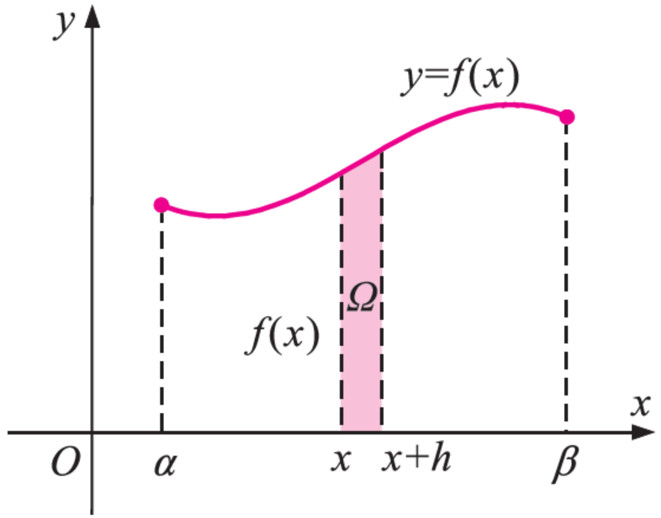
είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x),\ \text{για κάθε } x\in\Delta.$$

$$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

$$= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega$$

$$\approx f(x)\cdot h,\ \text{για μικρά } h>0.$$



Άρα, για μικρά $h>0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)\,,$$

οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

$$\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \tag{1}$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f, g *συνεχείς* συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

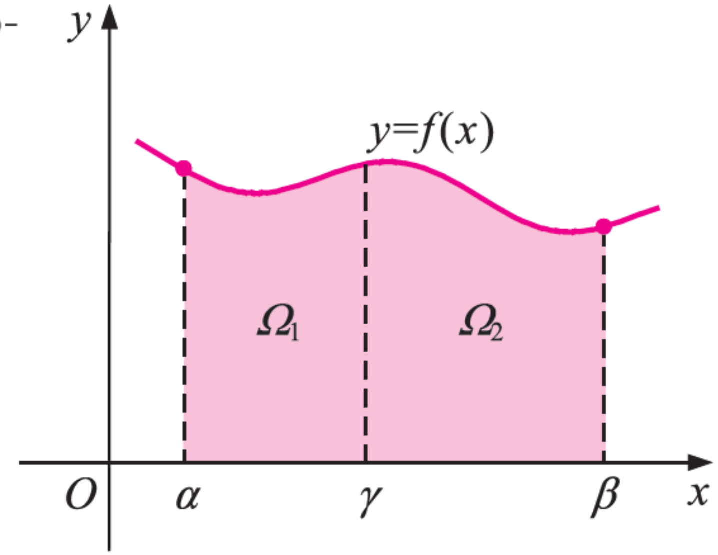
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx\,,\; E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

και

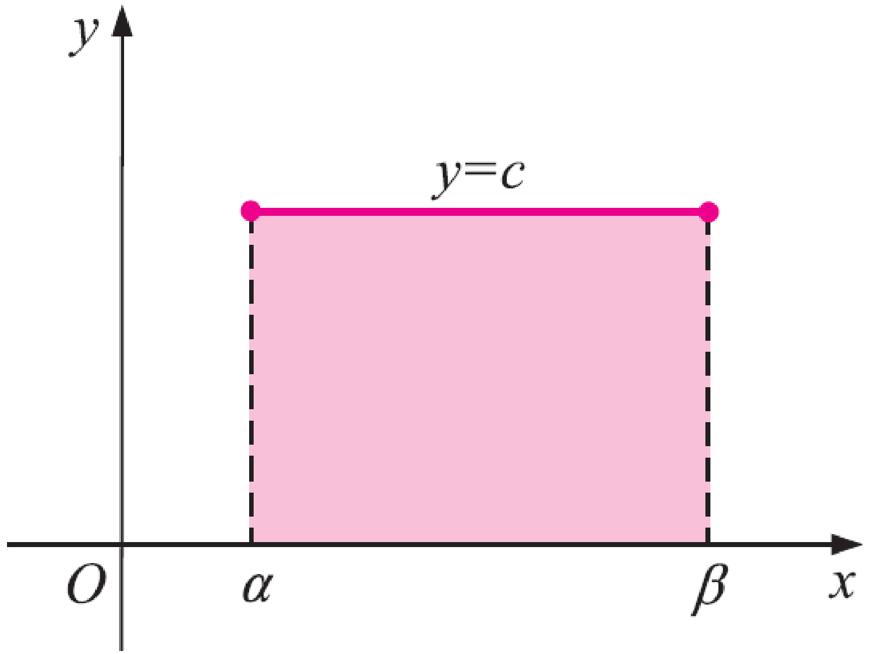
$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$



Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3 + 7 = 4$$

Αν $c > 0$, τότε το $\int_\alpha^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c



Μέθοδοι ολοκλήρωσης

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_1^{e} \frac{\ln x}{x} dx$.

Έχουμε:

$$I = \int_1^e \ln x(\ln x)' dx$$

Αν θέσουμε $u = \ln x$, τότε $du = (\ln x)' dx$, $u_1 = \ln 1 = 0$ και $u_2 = \ln e = 1$. Επομένως,

$$I = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu x dx$. Έχουμε:

$$I = \int_0^{\pi/2} x(\eta\mu x)'dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x)'\eta\mu x dx$$

$$= [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$$

$$= [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx$ ii) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ iii) $\int_{-1}^5 |x-2| dx$

$$\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{x} dx + \int_1^2 \frac{x}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2 - [\ln x]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2$$

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx + \int_1^4 x^{-1/2} dx$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 + \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4 + [2\sqrt{x}]_1^4 = \frac{20}{3}$$

Επειδή $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x \le 2 \\ x-2, & x \ge 2 \end{cases}$, έχουμε

$$\int_{-1}^5 |x-2| dx = \int_{-1}^2 (2-x) dx + \int_2^5 (x-2) dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^5$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $F'(x) = f(x)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

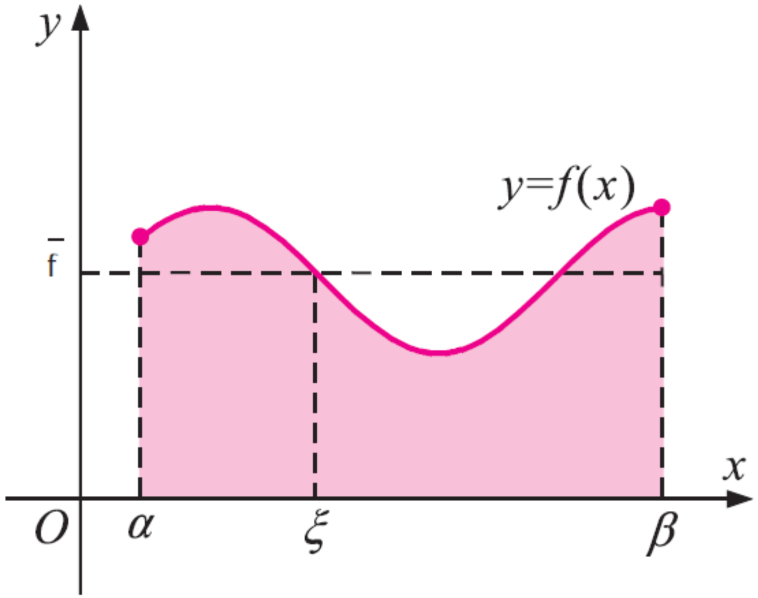
$$F'(\xi) = f(\xi),\ F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \text{ και } F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = f(\xi)(\beta - \alpha) \qquad f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt}{\beta - \alpha}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ο αριθμός $f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$ λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται με $\overline{\mathrm{f}}$.

Γεωμετρικά, η μέση τιμή $\overline{\mathrm{f}}$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου που έχει βάση το $[\alpha,\beta]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του χωρίου $\boldsymbol{\Omega}$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$



Αν f(x), g(x) είναι συνεχείς στο [α, β] και g(x)>0 στο [α, β], τότε:

$$m\int_\alpha^\beta g(x)dx \le \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \le M\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

όπου M η μέγιστη και m η ελάχιστη τιμή της f(x) στο [α, β]

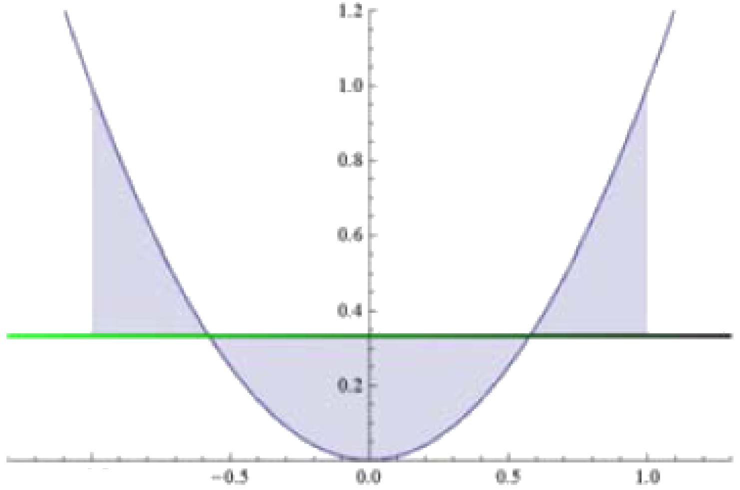
για g(x)≡1
στο [α, β]

$$\boxed{m \le \frac{1}{\beta-a}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le M}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ποια η μέση τιμή της $y=x^2$, στο $-1 \le x \le 1$;

$$\mu = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$



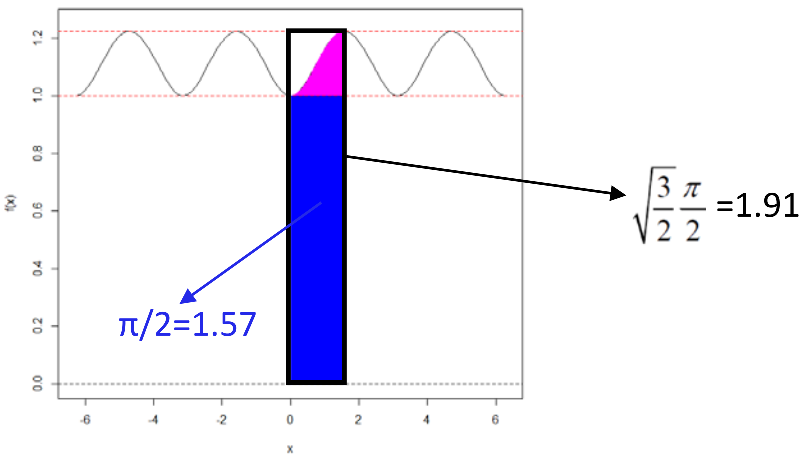
(Κατά προσέγγιση υπολογισμός)

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\eta\mu^2 x}\,dx$

$$0 \le \eta\mu^2 x \le 1 \qquad \Rightarrow 1 \le 1+\frac{1}{2}\eta\mu^2 x \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} 1\cdot dx \le I \le \int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{3}{2}}dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \le I \le \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2} \qquad \text{ή } 1.57 \le I \le 1.91$$



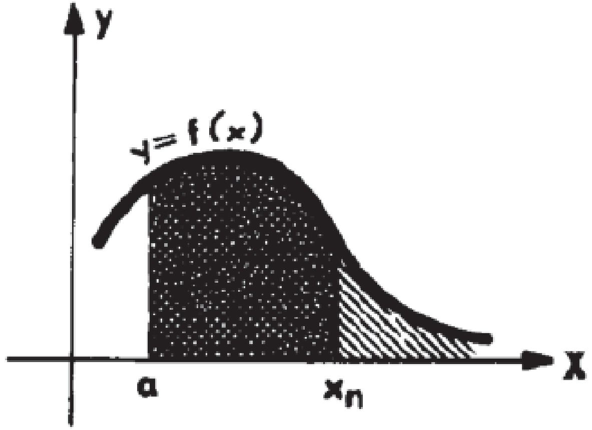
$I \approx 1.74$

```
> f<-function(x){sqrt(1+sin(x)^2/2)}
> integrate(f,lower=0,upper=pi/2)
1.751771 with absolute error < 1.9e-14
```

Ακριβής τιμή 1.75177

Μη-γνήσια ολοκληρώματα

Α΄ είδους



$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_{\alpha}^{M} f(x)dx$$

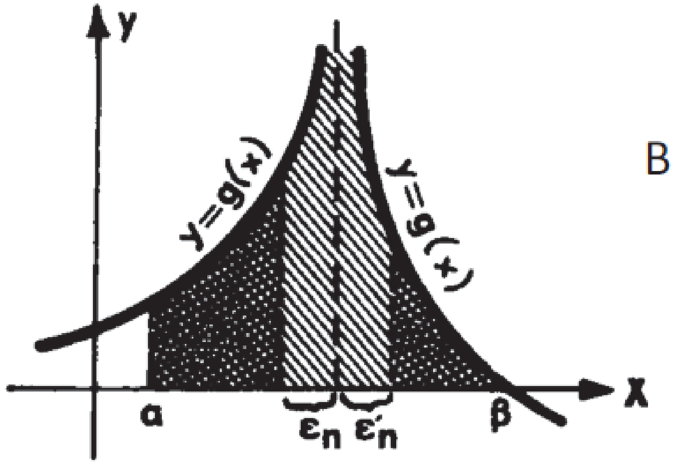
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$$

υπολογίζονται ξεχωριστά

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)dx$$

πρωτεύουσα τιμή

Β΄ είδους



Αν $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$

$$\int_{\alpha}^{c} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)dx$$

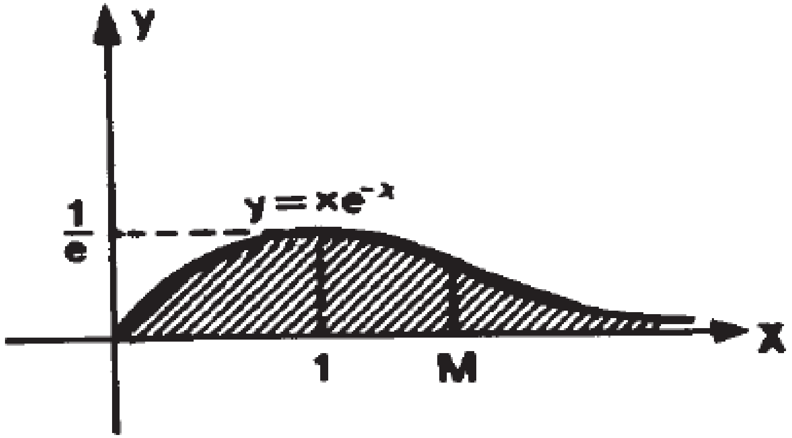
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\beta} f(x)dx$$

υπολογίζονται ξεχωριστά

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c-\varepsilon}^{\beta} f(x)dx\right\}$$

πρωτεύουσα τιμή

Παράδειγμα:
Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

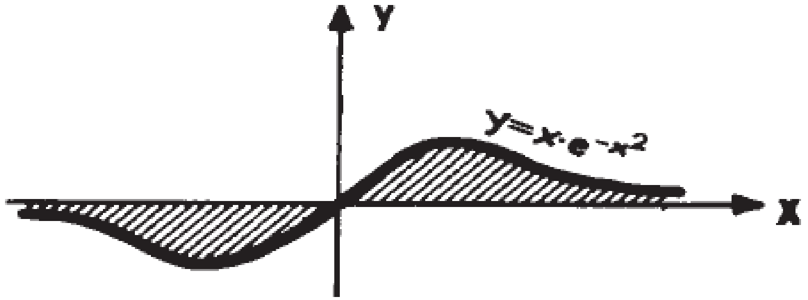


$$\int_0^M xe^{-x}\,dx = -\int_0^M x\,de^{-x} =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^M + \int_0^M e^{-x}\,dx = -Me^{-M} - e^{-M} + 1$$

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(Me^{-M} - e^{-M} + 1\right) = 1$$

Παράδειγμα:
Δείξτε ότι υπάρχει το: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx,$

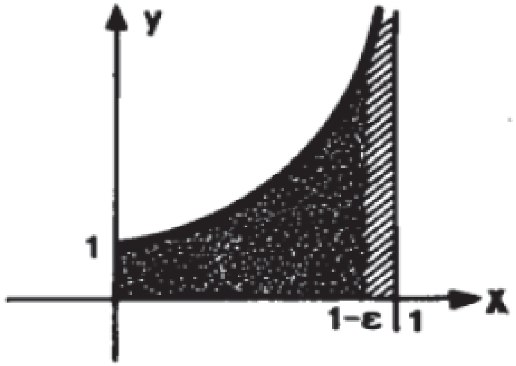


$$\int_0^M xe^{-x^2}\,dx = \ldots = \frac{1-e^{-M^2}}{2} \underset{M\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx = -\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx \Rightarrow \mathbf{I_1 = 0}$$

Παράδειγμα:

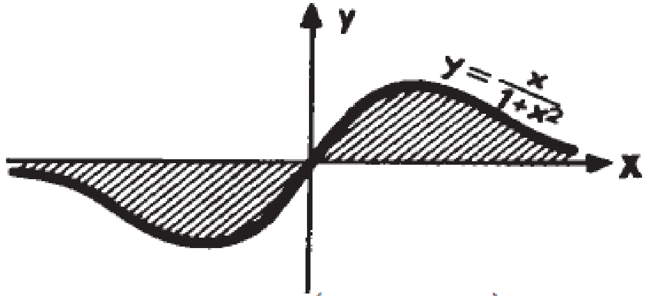
Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$



$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \tau o\xi\eta\mu x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \tau o\xi\eta\mu(1-\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \tau o\xi\eta\mu(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

ενώ δεν υπάρχει το $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$



$$\int_0^{M} \frac{x}{1+x^2}dx = \ldots = \frac{\ln\left(1+M^2\right)}{2} \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

$\nexists$ $\mathbf{I_2}$

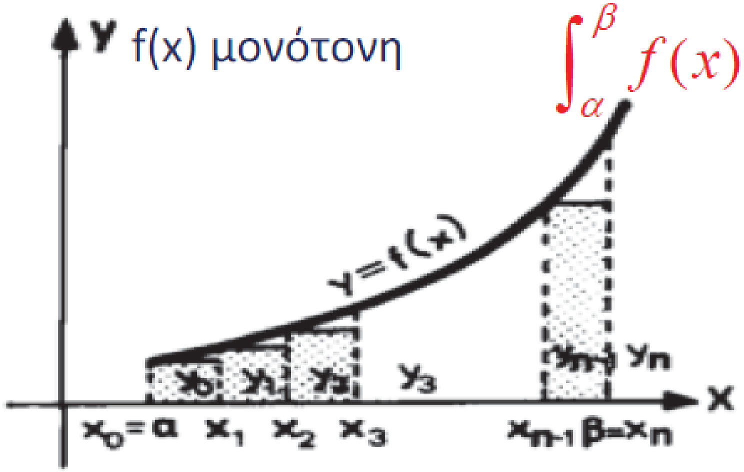
Η πρωτεύουσα τιμή υπάρχει και είναι 0

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Κανόνας Τραπεζίου

f(x) μονότονη

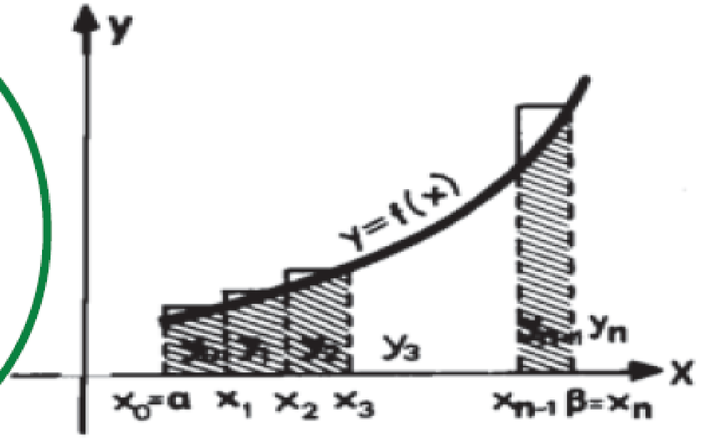
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$



$$x_i = \alpha + ih$$

$$h = \frac{\beta-\alpha}{n}$$

$$y_i = f(x_i)$$



$$h\cdot\left(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}\right) \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le h\cdot\left(y_1+y_2+\ldots+y_n\right)$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\cdot\left(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right)} = \frac{y_0+y_1}{2}h+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}h$$

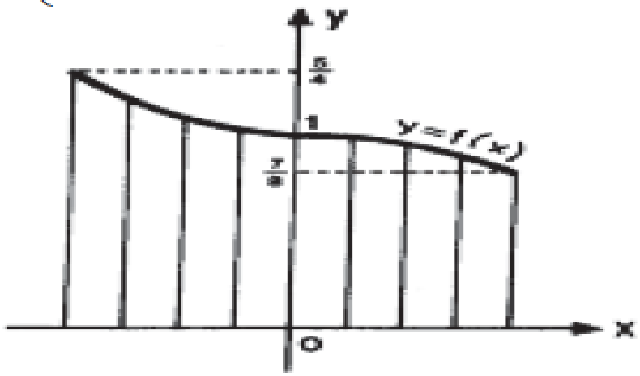
Σφάλμα

Αν f(x) μονότονη: $|E| \le |f(\beta)-f(\alpha)|\,h$

Αν f(x) οποιαδήποτε: $|E| \le \frac{\beta-\alpha}{12}h^2M_2$, όπου $|f''(x)| \le M_2$ για α<x<β

Για επιθυμητή ακρίβεια **ε** $h \le \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(\beta-\alpha)M_2}}$

Παράδειγμα:
Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το: $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx$, όπου $f(x)=\begin{cases}1+x^2\,, x<0\\ 1-x^2\,, x\geq 0\end{cases}$



$$I=\frac{h}{2}\cdot\left(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right)=1.064$$

Σφάλμα
E<|f(β)-f(α)| h = |0.875 - 1.25| (1/8) = 0.0469

ή σφάλμα

$$|E|\leq\frac{\beta-\alpha}{12}h^2M_2=\frac{1}{12}(0.125)^2\cdot 2=0.0026$$

Ακριβής τιμή

$$I=\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx=$$

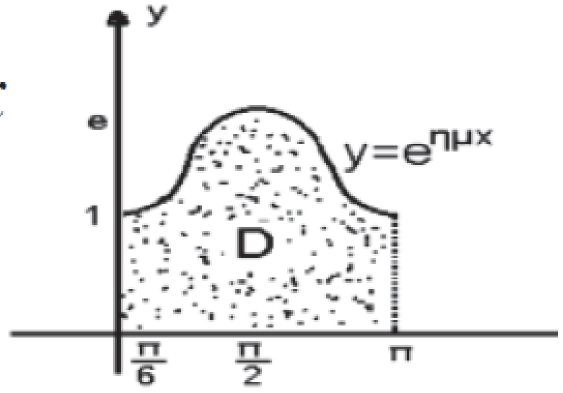
$$=\int_{-1/2}^{0}(1+x^2)\,dx+\int_{0}^{1/2}(1-x^2)\,dx=1.0260$$

Πραγματικό σφάλμα E=0.0004 < 0.0026

κ	$x_κ$	$y_κ$
0	−0.500	1.25
1	−0.375	1.141
2	−0.250	1.063
3	−0.125	1.016
4	0.000	1.000
5	0.125	0.998
6	0.250	0.984
7	0.375	0.947
8	0.500	0.875

Παράδειγμα:
Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το:

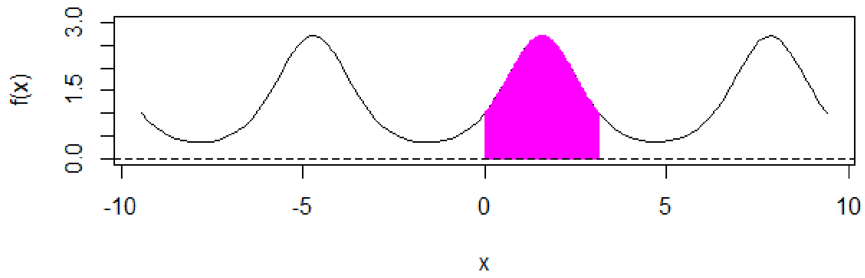
$$\int_0^{\pi} e^{\eta\mu x}\, dx$$



Κ. Τραπεζίου D=6.1630 Κ. Simpson D=6.2086

k	x_k	y_k
0	0	1
1	$\pi/6$	1.6470
2	$\pi/3$	2.3774
3	$\pi/2$	2.7183
4	$2\pi/3$	2.3774
5	$5\pi/6$	1.6487
6	π	1

Παίρνοντας n=18 σημεία βρίσκουμε D=6.2088

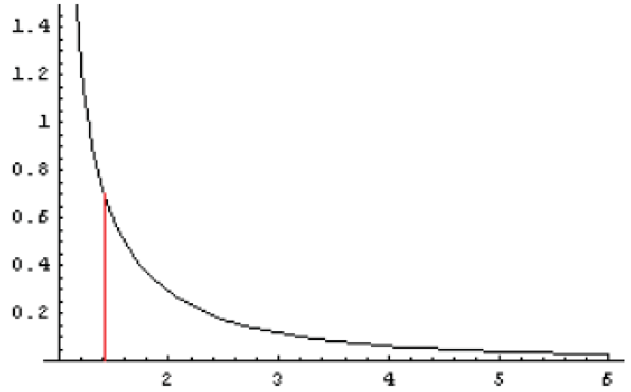


Στη γλώσσα R υπολογίζεται με τις ακόλουθες εντολές

```
> f<-function(x){exp(sin(x))}
> integrate(f,lower=0,upper=pi)
6.208758 with absolute error < 4.1e-10
```

ΕΝΑ ΜΗ-ΓΝΗΣΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$\boxed{I=\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}}$$



Δόθηκαν οι επόμενες λύσεις:

Αντικατάσταση $x=\sqrt{t+1}$ $\quad I=\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{2(t+1)\sqrt{t}}=\ldots=\frac{\pi}{4}$

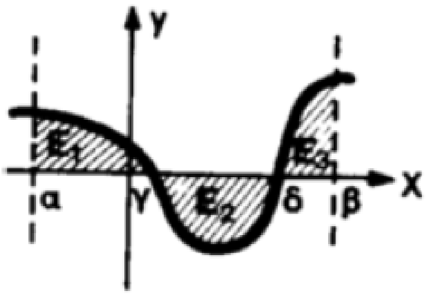
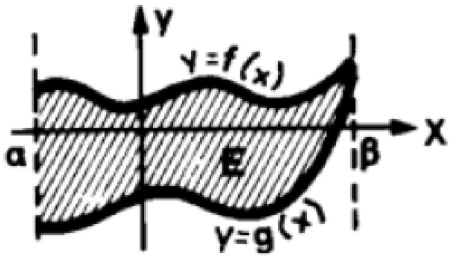
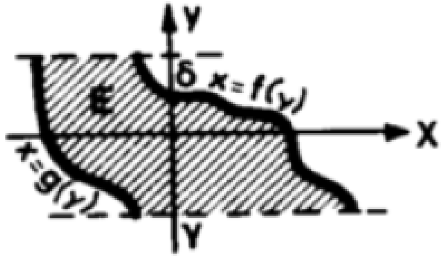
Αντικατάσταση

$\sqrt{x^2-1}=u-x$ $\quad I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\infty}\frac{2du}{1+u^2}=\lim_{M\to\infty}2\tau o\xi\varepsilon\phi u\Big|_{1+\sqrt{2}}^{u}=\ldots=\frac{\pi}{4}$

ή πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα (την αρχική) που εδώ είναι:

$G_1(x)=2\tau o\xi\varepsilon\phi(x+\sqrt{x^2-1})$ και $I=\lim_{M\to\infty}\left(G_1(M)-G_1(\sqrt{2})\right)=\ldots=\frac{\pi}{4}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

<table>
<tr><th>Εφαρμογή</th><th>Σχήμα</th><th>Τύπος</th></tr>
<tr><td>Εμβαδό χωρίου που περικλείεται μεταξύ της y=f(x) του άξονα των x και των ευθειών x=α και x=β</td><td>
</td><td>$$E=E_1+E_2+E_3= \\ =\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx- \\ -\int_{\gamma}^{\delta}f(x)dx+\int_{\delta}^{\beta}f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>Εμβαδό χωρίου Ε που περικλείεται μεταξύ των y=f(x) και y=g(x) και των ευθειών x=α και x=β</td><td>
</td><td>$$E=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$</td></tr>
<tr><td>Εμβαδό χωρίου Ε που περικλείεται μεταξύ των x=f(y) και x=g(y) και των ευθειών y=γ και y=δ</td><td>
</td><td>$$E=\int_{\gamma}^{\delta}\left(f(y)-g(y)\right)dy$$</td></tr>
</table>

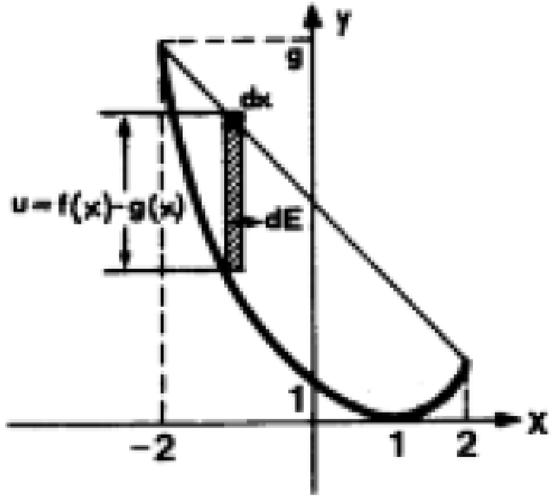
Παράδειγμα

Ποιο το εμβαδό του χωρίου που ορίζουν οι:

f(x)=5-2x   g(x)=(x-1)^2

$$E=\int_{-2}^{2} dE=\int_{-2}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=10.67$$

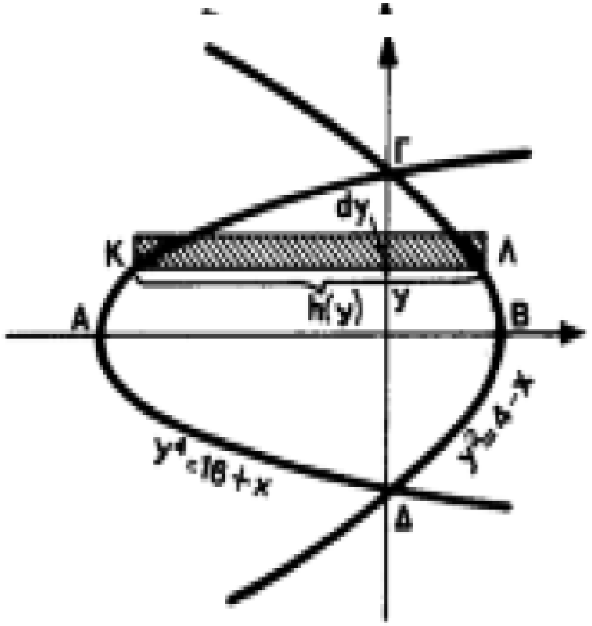


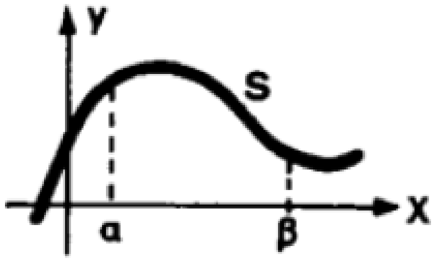
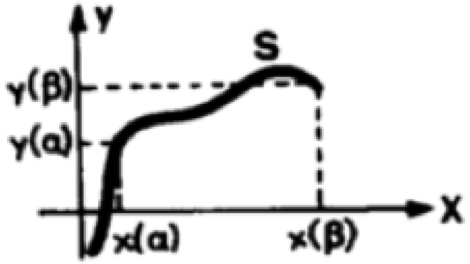
Παράδειγμα

Όμοια οι: $y^4 = x + 16$ $y^2 = 4 - x$

$$E=\int_{-2}^{2} dE=\int_{-2}^{2} h(y)\,dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(20-y^2-y^4\right)dy=61.87$$



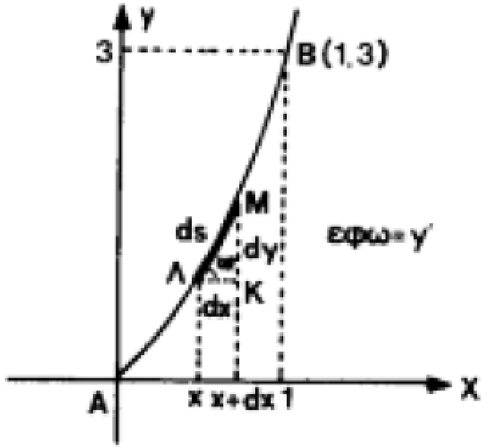
Εφαρμογή	Σχήμα	Τύπος
Μήκος καμπύλης y=f(x) από x=α μέχρι x=β		$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ όπου $y'=\dfrac{dy}{dx}$
Μήκος καμπύλης x=x(t), y=y(t) από t=α μέχρι t=β		$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ όπου $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$

(2) Μήκος τόξου

Παράδειγμα.
Το τόξο ΑΒ
επί της:
$y=3x^{3/2}$

$$dx = ds\,\sigma\upsilon\nu\omega \qquad y' = \varepsilon\varphi\omega$$

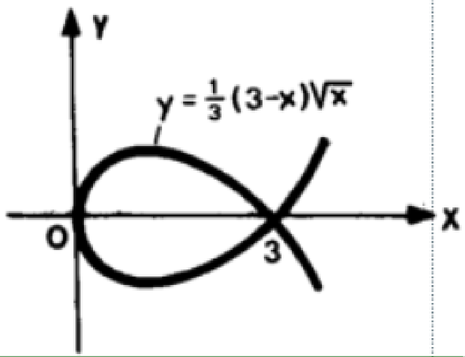
$$ds = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}dx = \sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}\,dx = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$



$$s = \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{81}{4}x}\,dx = \ldots = \frac{8}{243}\left((85/4)^{3/2}-1\right) = 3.192$$

Παράδειγμα.
Το κλειστό τόξο
επί της:
$9y^2 = x\,(3-x)^2$

$$y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$$

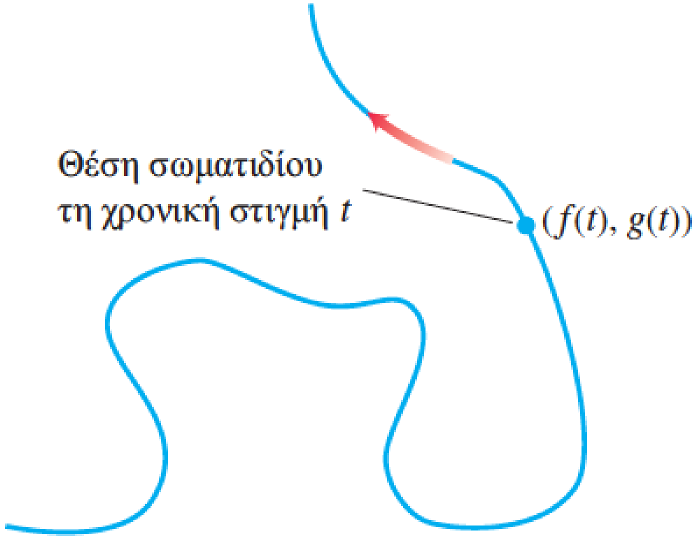


$$s = 2\int_0^3 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^3 \frac{1+x}{2\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt = 4\sqrt{3} = 3.46$$

$$t = \sqrt{x}$$

Παραμετρικές εξισώσεις

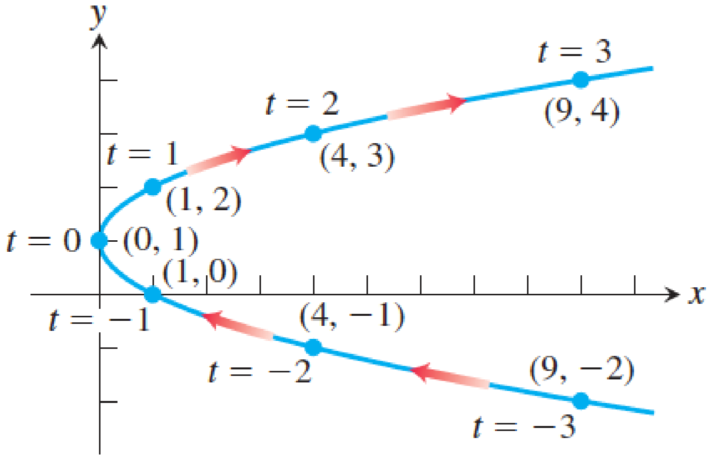
$$(x, y) = (f(t), g(t))$$



Η καμπύλη ή τροχιά που διανύει ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο xy δεν είναι πάντοτε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ή μιας μόνο εξίσωσης.

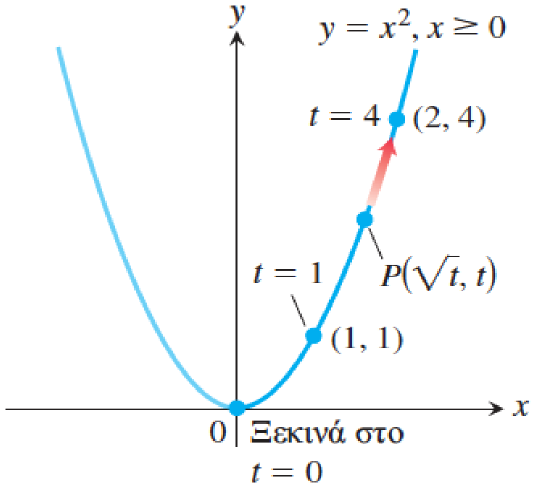
$$x = t^2, \qquad y = t + 1, \qquad -\infty < t < \infty$$

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4



Η καμπύλη που δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2$ και $y = t + 1$

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0$$

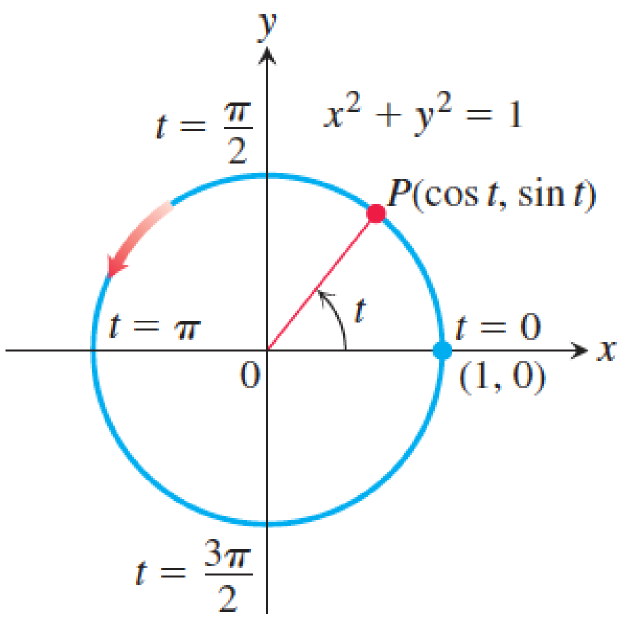


Οι εξισώσεις $x = \sqrt{t}$ και $y = t$ και το διάστημα $t \geq 0$ περιγράφουν την τροχιά ενός σωματιδίου που διαγράφει το δεξιό ήμισυ της παραβολής $y = x^2$

Παραμετρικές εξισώσεις: πολικές συντεταγμένες

(a) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

(b) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$



Οι εξισώσεις $x = \cos t$ και $y = \sin t$ περιγράφουν κίνηση επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Το βέλος δείχνει τη φορά αύξησης του t (φορά διαγραφής του κύκλου).

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

the total arc length is

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\Big[t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Ολοκληρώματα στην R

σελ.14

```
> f<-function(x){x*exp(-x)}
> integrate(f,lower=0,upper=Inf)
1 with absolute error < 6.4e-06
```

```
> f<-function(x){x*exp(-x^2)}
> integrate(f,lower=0,upper=Inf)
0.5 with absolute error < 2.7e-06
> integrate(f,lower=-Inf,upper=Inf)
0 with absolute error < 0
```

σελ.15

```
> f<-function(x){x/(1+x^2)}
> integrate(f,lower=0,upper=Inf)      # indeterminate form ∞
Error in integrate(f, lower = 0, upper = Inf) :
  maximum number of subdivisions reached
> integrate(f,lower=-Inf,upper=Inf)   # don't do this, it is not correct here
0 with absolute error < 0
```

σελ.19

```
> f<-function(x){1/(x*sqrt(x^2-1))}
> integrate(f,lower=sqrt(2),upper=Inf)
0.7853982 with absolute error < 1.9e-11
> pi/4
[1] 0.7853982
```

Βιβλιογραφία

- Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος. *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής,* 22-0273 Αναθεωρημένη έκδοση
- Μωυσιάδης (2016). *Ανώτερα Μαθηματικά, Αφοι Κυριακίδη Εκδόσεις α.ε.*
- [Thomas], Hass, Heil, Weir (2018). *THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, ΙΤΕ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ