Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$$y' = h(y)\cdot f(x) \Rightarrow \left(h(y) \neq 0\right)$$

ιδιάζουσες λύσεις

$$\frac{y'}{h(y)} = f(x) \Rightarrow$$ ολοκλήρωση ως προς x

$$\int \frac{y'}{h(y)}\,dx = \int f(x)\,dx \Rightarrow \quad dy = y'dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

Δ.Ε. ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma) \Rightarrow$

$z = \alpha x + \beta y + \gamma \Rightarrow z' = \alpha + \beta y' \Rightarrow y' = \frac{z' - \alpha}{\beta}$

x: ανεξάρτητη $\longrightarrow x$

y: εξαρτημένη $\longrightarrow z$

$\frac{z' - \alpha}{\beta} = f(z) \Rightarrow z' = \beta f(z) + \alpha \Rightarrow$

Χωριζομένων μεταβλητών (Δεν εμφανίζεται η ανεξ. μετ. x)

$\beta f(z) + \alpha \neq 0$ ιδιάζουσες λύσεις

$$\frac{z'}{\beta f(z) + \alpha} = 1 \Rightarrow$$

$$\int \frac{z'}{\beta f(z) + \alpha}\, dx = \int 1\, dx \Rightarrow dz = z'\, dx$$

$$\int \frac{1}{\beta f(z) + \alpha}\, dz = x + c$$

(αντικατάσταση $z = \alpha x + \beta y + \gamma$)

ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ης τάξεως

Μια Δ.Ε. ονομάζεται πλήρης εάν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{d}{dx}G(x,y)=0$

$P(x,y)y'+Q(x,y)=0$ πλήρης $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$$

• ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. 1ης τάξεως

$$y'+f(x)y+g(x)=0 \quad \acute{\eta} \quad y'+f(x)y=g(x)$$

$e^{\int f(x)dx}$: πολλαπλασιαστής Euler

$$\left[e^{\int f(x)dx}\right]'=e^{\int f(x)dx}\cdot\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$$

$$e^{\int f(x)dx}y'+f(x)e^{\int f(x)dx}y=-g(x)e^{\int f(x)dx}$$

$$\left[e^{\int f(x)dx}y\right]'=-g(x)e^{\int f(x)dx}$$

$$\int\left[e^{\int f(x)dx}y\right]'dx=-\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

$$e^{\int f(x)dx}y=-\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. 2ης ΤΑΞΕΩΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

- $\Delta > 0$ Δύο πραγματικές ρίζες λ_1, λ_2

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \tau_1 = 1 \quad \tau_2 = 1$$

- $\Delta = 0$ μια διπλή πραγματική ρίζα λ_1

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \qquad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 \qquad \tau_1 = 2$$

- $\Delta < 0$ Δύο συζυγείς μιγαδικές $\lambda_1 = \alpha + bi$

$$\tau_1 = \tau_2 = 1 \qquad \lambda_2 = \alpha - bi$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \operatorname{συν} bx + c_2 \operatorname{ημ} bx)$$

τ_i : πολλαπλότητα λ_i

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. $2^{ης}$ ΤΑΞΕΩΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x)$$

Έστω ότι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$$

δίδεται από τον τύπο $y_{ομ}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

c_1, c_2

$$y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μμ}(x)$$ → ανεξάρτητες σταθερές.

όπου $y_{μμ}(x)$ είναι μια <u>μερική</u> λύση της μη ομογενούς, τρόπος εύρεσης

μέθοδος μεταβολής των σταθερών κατά Lagrange

$$y_{μμ}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

όπου τα $c_1(x)$, $c_2(x)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$$

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

- $f(x)$ ειδικής μορφής

  - $f(x) = \alpha_\kappa x^\kappa + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

    Εαν το 0 είναι ρίζα του χαρακ. πολυωνύμου πολλαπλ. τ δηλ. $P(\lambda) = \lambda^\tau \cdot p(\lambda) : p(0) \neq 0$

    Τότε: $y_{\mu\mu}(x) = x^\tau (A_\kappa x^\kappa + \dots + A_1 x + A_0)$

  - $f(x) = \alpha \cdot e^{\kappa x}$

    Εαν το κ είναι ρίζα του χαρακτηρ. πολυων. πολλαπλ. τ δηλ $P(\lambda) = (\lambda - \kappa)^\tau p(\lambda) : p(\kappa) \neq 0$

    Τότε: $y_{\mu\mu}(x) = A x^\tau e^{\kappa x}$

  - $f(x) = \alpha$ συνκx ή $\alpha \cdot$ημκx

    και $P(\kappa i) \neq 0$

    Τότε: $y_{\mu\mu}(x) = A$συν$(\kappa x) + B$ημ(κx)

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. $n^{\text{ης}}$ ΤΑΞΕΩΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

$$y^{(n)}+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}+\alpha_{n-2}y^{(n-2)}+\dots+\alpha_2 y''+\alpha_1 y'+\alpha_0 y=0$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P(\lambda)=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\alpha_{n-2}\lambda^{n-2}+\dots+\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0=0$$
$$=(\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\tau_k}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$

με $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\tau_i \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = n$ (προφανώς $k \leq n$)

- $\lambda_i \in \mathbb{R}$ πραγματική ρίζα πολλαπλότητος τ_i

αντιστοιχεί μια λύση της μορφής

$$(c_{i1}+c_{i2}x+\dots+c_{i\tau_i}x^{\tau_i-1})e^{\lambda_i x}$$

π.χ. εαν $\tau_i=1$ $\quad c_{i1}e^{\lambda_i x}$

$\tau_i=2$ $\quad (c_{i1}+c_{i2}x)e^{\lambda_i x}$

$\tau_i=3$ $\quad (c_{i1}+c_{i2}x+c_{i3}x^2)e^{\lambda_i x}$

- $\lambda_i = a + b\cdot i$ μιγαδική ρίζα πολλαπλότητος τ_i

[όταν το $P(\alpha+bi)=0 \Rightarrow P(\alpha-bi)=0$

Δηλ. η $\bar{\lambda}_i = \alpha - bi$ (ο συζυγής του λ_i)

είναι επίσης ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

αντιστοιχεί μια λύση της μορφής

$$e^{\alpha x}\Big[(C_{i1}+C_{i2}x+\dots+C_{i\tau_i}x^{\tau_i-1})\,\text{συν}(bx) +$$
$$(C^*_{i1}+C^*_{i2}x+\dots+C^*_{i\tau_i}x^{\tau_i-1})\,\text{ημ}(bx)\Big]$$

οι σταθερές είναι $2*\tau_i$ τω πλήθος

μιας και αντιστοιχούν τόσο στην λ_i όσο $\lambda_{i+1}=\bar{\lambda}_i$

π.χ. εαν $P(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+2)q(x)$

$\Delta = 4-4\cdot 2 = -4 \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$

$\tau_i = 1 \quad \lambda_i = -1+i$

$$e^{-x}(C_{i1}\,\text{συν}\,x + C^*_{i1}\,\text{ημ}\,x)$$

$P(\lambda) = (\lambda^2+4)^2 q(x)$

$\Delta = -4\cdot 4 = -16 \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{0 \pm i\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$

$\tau_i = 2 \quad \lambda_i = 2i = 0 + 2i$

$$e^{0\cdot x}\big[(C_{i1}+C_{i2}x)\,\text{συν}(2x)+(C^*_{i1}+C^*_{i2}x)\,\text{ημ}(2x)\big]$$
$$=(C_{i1}+C_{i2}x)\,\text{συν}(2x)+(C^*_{i1}+C^*_{i2}x)\,\text{ημ}(2x)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. $n^{ης}$ ΤΑΞΕΩΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x)$$

Λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$$

και έστω ότι η λύση της είναι της μορφής

$$y_{ομ}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

η λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής

$$y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μμ}(x)$$

όπου $y_{μμ}(x)$ είναι μια <u>μερική</u> λύση της μη ομογενούς που <u>δεν</u> εξαρτάται από σταθερές

Προσδιορισμός της μερικής λύσης της μη ομογενούς

- Μέθοδος μεταβολής των σταθερών κατά Lagrange

$$y_{μμ}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$$

όπου $c_i'(x)$ $i=1,\dots,n$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned}
&c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \dots + c_n'(x) y_n(x) = 0 && 1^{η} \\
&c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \dots + c_n'(x) y_n'(x) = 0 && 2^{η} \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&c_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0 && (n-1)^{η} \\
&c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) && n^{η}
\end{aligned}$$