Πράξεις με σύνολα

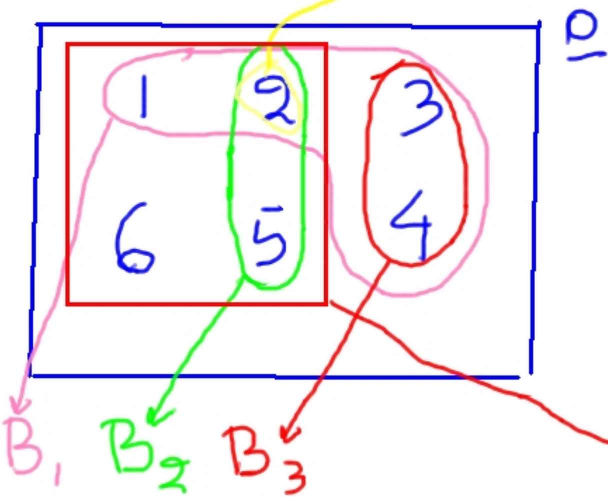
$B_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

$B_2 = \{2, 5\}$

$B_3 = \{3, 4\}$

Θεωρώ

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Παρατηρούμε ότι:

$B_3 \subseteq B_1 \Rightarrow B_1 \cap B_3 = B_3$

τα κοινά στοιχεία

$B_1 \cup B_3 = B_1$

όλα τα στοιχεία

$B_1 \setminus B_3 = B_1 \cap B_3' = \{1, 2\}$

$B_1 \cap B_2 = \{2\}$ $B_1 \cup B_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

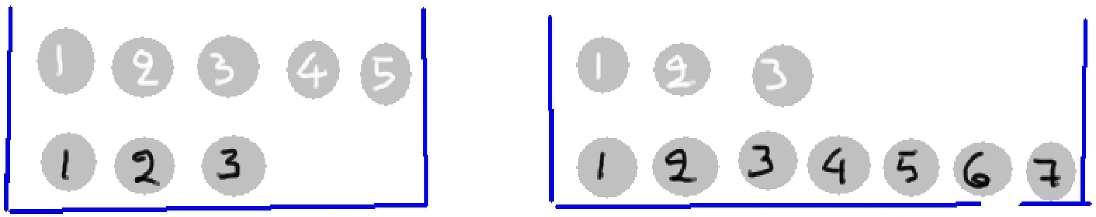
$B_1 \setminus B_2 := B_1 \setminus (B_2 \cap B_1) = B_1 \cap B_2' = \{1, 3, 4\}$

όπου

$\boxed{B_3'} = \Omega \setminus B_3 = \{1, 2, 5, 6\}$, $B_2' = \Omega \setminus B_2 = \{1, 3, 4, 6\}$

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε δύο κάλπες

Στο πρόβλημα με τις κάλπες, ας δούμε τον δειγματικό χώρο:



Κάλπη Ι   Κάλπη ΙΙ

5Λ 3Μ   3Λ 7Μ

$$\Omega = \{ I\Lambda_1, I\Lambda_2, I\Lambda_3, I\Lambda_4, I\Lambda_5, IM_1, IM_2, IM_3, II\Lambda_1, II\Lambda_2, II\Lambda_3, IIM_1, IIM_2, IIM_3, IIM_4, IIM_5, IIM_6, IIM_7 \}$$

(οι σφαίρες θεωρούμε ότι είναι διακριτές)

Αν τα στοιχειώδη αυτά 18 ενδεχόμενα ήταν ισοπίθανα τότε:

$P(A) = P(\text{επιλογής λευκής σφαίρας}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ Laplace ορισμός

$P(\text{επιλέξω κάλπη Ι}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \neq P(\text{επιλέξω κάλπη ΙΙ}) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

με χρήση θ ΟΠ $\boxed{P(A) = 37/80}$ Το ορθό αποτέλεσμα

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε δύο κάλπες (συνέχεια…)

A: να επιλέξω λευκή σφαίρα

KI/A: η επιλογή να έγινε από την Κάλπη I, όταν γνωρίζω ότι επέλεξα λευκή σφαίρα

KII/A: αυτό είναι το συμπληρωματικό του προηγούμενου ενδεχομένου

$$P(KI/A)=\frac{P(A|KI)\,P(KI)}{P(A)} \qquad \text{τύπος Bayes}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}}{\frac{37}{80}}=\frac{5\times 8\times 10}{8\times 2\times 37}=\frac{25}{37}=0.6757\neq P(KI)$$

Τα ενδεχόμενα: επιλογή κάλπης και επιλογή σφαίρας είναι εξαρτημένα.

Επίσης $P(KII/A)=1-0.6757<P(KI/A)$ επειδή $P(A|KII)<P(A|KI)$

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε τρεις κάλπες

I	II	III
1Μ 1Π	1Μ 2Π	2Μ 2Π

Η μαμά διαλέγει στην τύχη ένα καλάθι και στη συνέχεια από αυτό διαλέγει στην τύχη ένα φρούτο. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξει μήλο;

$$\Omega = \{(I\ M), (I\ \Pi), (II\ M), (II\ \Pi_1), (II\ \Pi_2), (III\ M_1), (III\ M_2), (III\ \Pi_1), (III\ \Pi_2)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(I) = \frac{2}{9} \\ P(II) = 3/9 \\ P(III) = 4/9 \end{array}\right\} ;;$$

P(M)=4/9 ;

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε τρεις κάλπες (συνέχεια…)

$$P(M) = P(M|I)\,P(I) + P(M|II)\,P(II) + P(M|III)\,P(III)$$

διαλέγει στην τύχη $\quad P(I) = P(II) = P(III)$

και $\quad P(I) + P(II) + P(III) = 1 \quad \Big\} \Rightarrow$

$$P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$$

$$P(M|I) = \frac{1}{2} \qquad P(M|II) = \frac{1}{3} \qquad P(M|III) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(M) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{8}{2\times 9} = \frac{4}{9}$$

έτυχε!

Διαγνωστικός Έλεγχος (test)

$P(Y\gamma \mid T^+)$ υποβάλλω το άτομο σε θεραπεία χωρίς να την χρειάζεται

|| τύπος Bayes

$$\frac{P(T^+ \mid Y\gamma)\,P(Y\gamma)}{P(T^+)}$$ Θα ήθελα να είναι πολύ μικρή

$$P(A\sigma \mid T^+) = 1 - P(Y\gamma \mid T^+)$$

$P(Y\gamma \mid T^-)$ δεν υποβάλλω το άτομο σε θεραπεία και πράγματι δεν την χρειάζεται

κοινός χώρος

Θα ήθελα να είναι μεγάλο

$$P(A\sigma \mid T^-) = 1 - P(Y\gamma \mid T^-)$$

Διαγνωστικός Έλεγχος (test για τον διαβήτη, συνέχεια…)

$P(T^+)$ "περίπου" $P(A\sigma)$

$$P(T^+) \overset{\theta o\pi}{=} P(T^+ | Y\gamma)\,P(Y\gamma) + P(T^+ | A\sigma)\,P(A\sigma)$$

η σύνθεση του πληθυσμού ως προς την ασθένεια $P(Y\gamma) = 1 - P(A\sigma)$

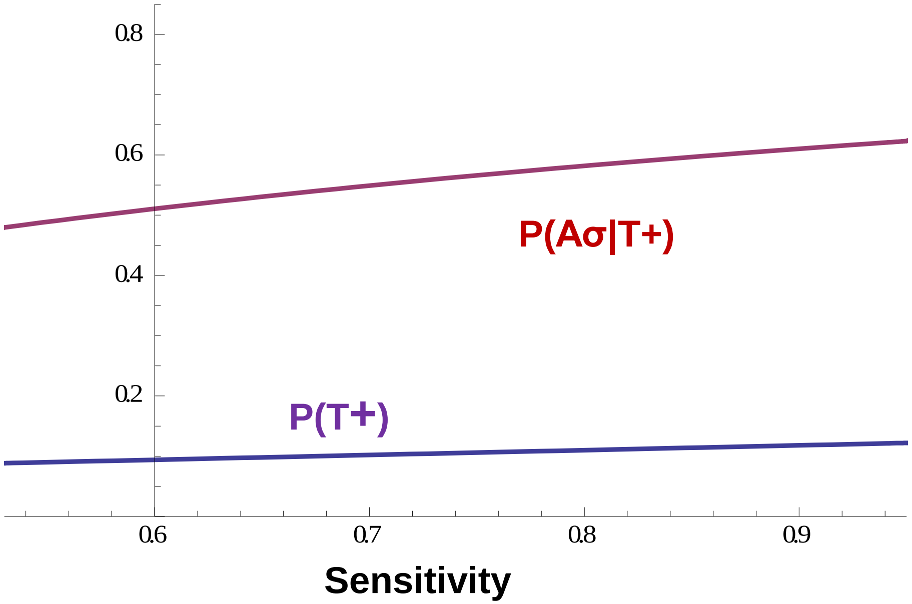
$$P(Y\gamma | T^-) \overset{Bayes}{=} \frac{P(T^- | Y\gamma)\,P(Y\gamma)}{P(T^-)} = \frac{0.95 \times 0.92}{1 - P(T^+)}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.99}{0.9116} = 0.9587$$ μεγάλο

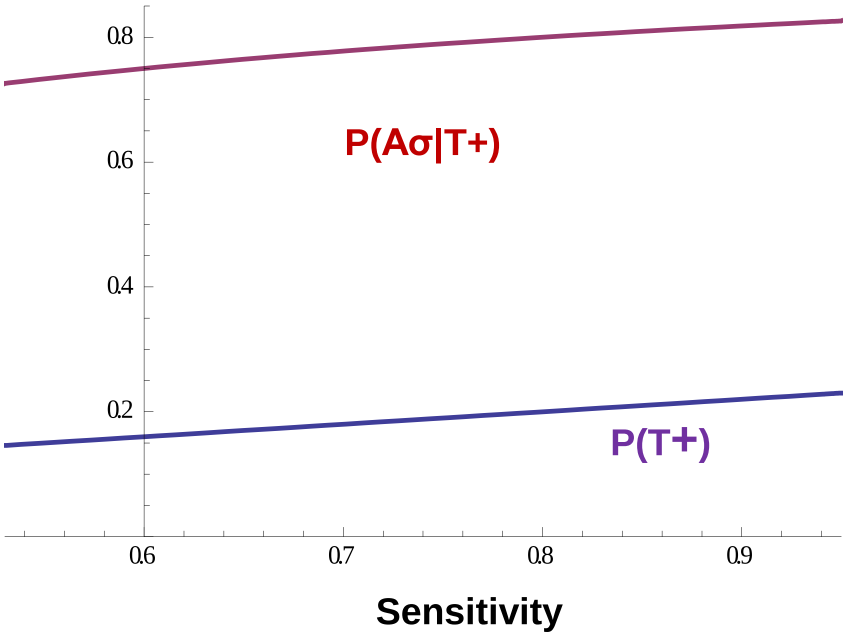
specificity

Διαγνωστικός Έλεγχος (test για τον διαβήτη, συνέχεια…)

όταν P(Ασ)=0.08



όταν P(Ασ)=0.20



Χρησιμοποιούμε ένα test (διαγνωστικό έλεγχο) για την ανίχνευση μιας ασθένειας.

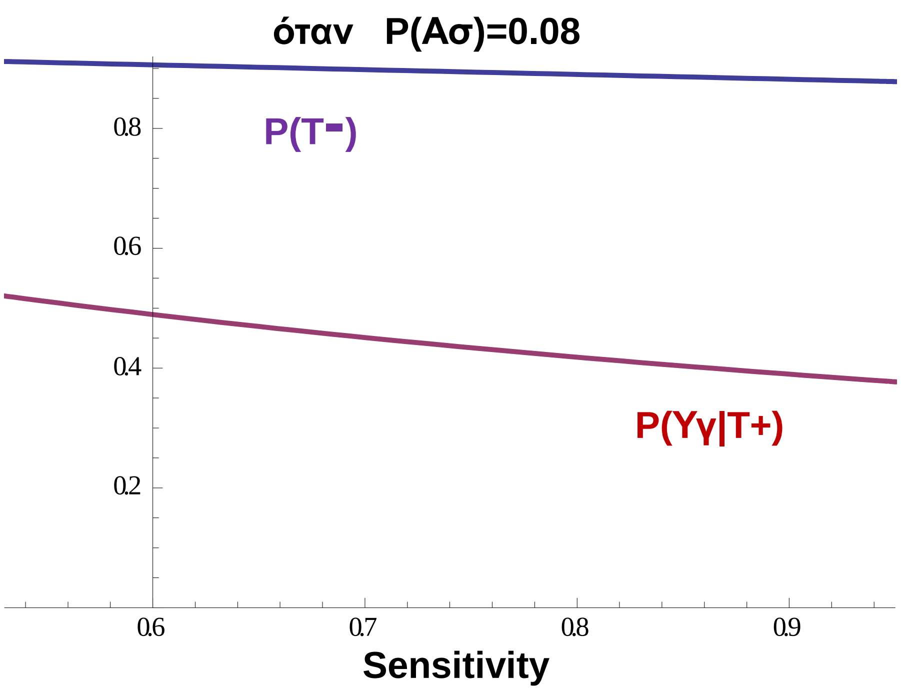
Στο διάγραμμα παρουσιάζονται η μεταβολή της πιθανότητα

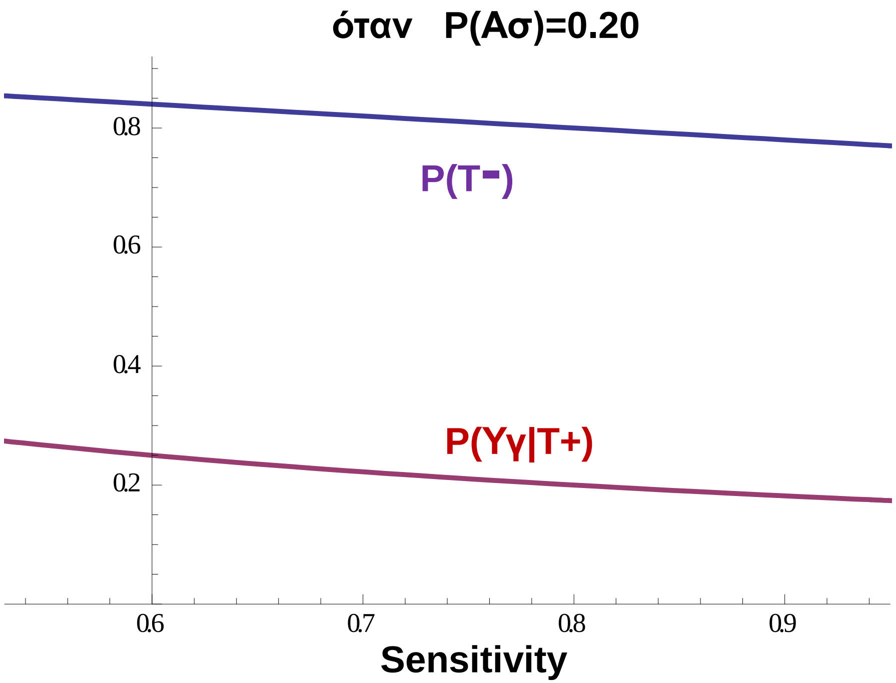
1. **ένα άτομο να διαγνωστεί, με βάση το test, με την ασθένεια, P(T+)**
2. **ορθής διάγνωσης, P(Ασ|T+), σε ένα άτομο της ασθένειας**

καθώς μεταβάλλεται η ευαισθησία (Sensitivity) του test, για εξειδίκευση (specificity) 0.95.

Το διάγραμμα δίνεται για δύο διαφορετικές τιμές της διάδοσης της ασθένειας, P(Ασ), στον υπό μελέτη πληθυσμό.

Διαγνωστικός Έλεγχος (test για τον διαβήτη, συνέχεια…)





Στο διάγραμμα παρουσιάζονται η μεταβολή της πιθανότητα

1. **ένα άτομο να διαγνωστεί, με βάση το test, ότι δεν έχει την ασθένεια, P(T-)**
2. **λανθασμένης διάγνωσης, P(Yγ|T+), σε ένα άτομο της ασθένειας**

καθώς μεταβάλλεται η ευαισθησία (Sensitivity) του test, για εξειδίκευση (specificity) 0.95.

Το διάγραμμα δίνεται για δύο διαφορετικές τιμές της διάδοσης της ασθένειας, P(Ασ), στον υπό μελέτη πληθυσμό.

Διαγνωστικός Έλεγχος (test Παπανικολάου)

- Το "test Παπανικολάου" κάνει σωστή διάγνωση σε 95% των περιπτώσεων (δηλ. το test είναι θετικό με πιθανότητα 0,95 αν μια γυναίκα πράγματι πάσχει από καρκίνο κ' είναι αρνητικό με πιθανότητα 0.95 αν μια γυναίκα δεν έχει την ασθένεια)

  Αν το test για μια κυρία είναι θετικό ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από την ασθένεια; Ποιά ερμηνεία έχει αυτό;

  Το ποσοστό των γυναικών που πάσχουν από την ασθένεια είναι $\frac{5}{10.000}$.

	Όταν Ασθενής	Όταν Υγιής
Test +	sensitivity 0.95	0.05
Test -	0.05	specificity 0.95
	1	1

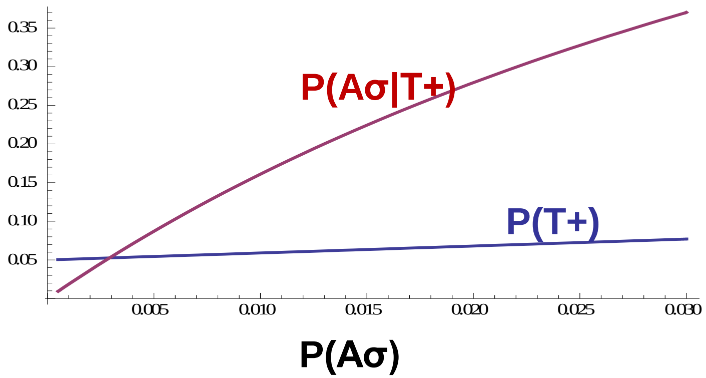
$P(A\sigma)=0.0005$ άρα $P(Y\gamma)=0.9995$

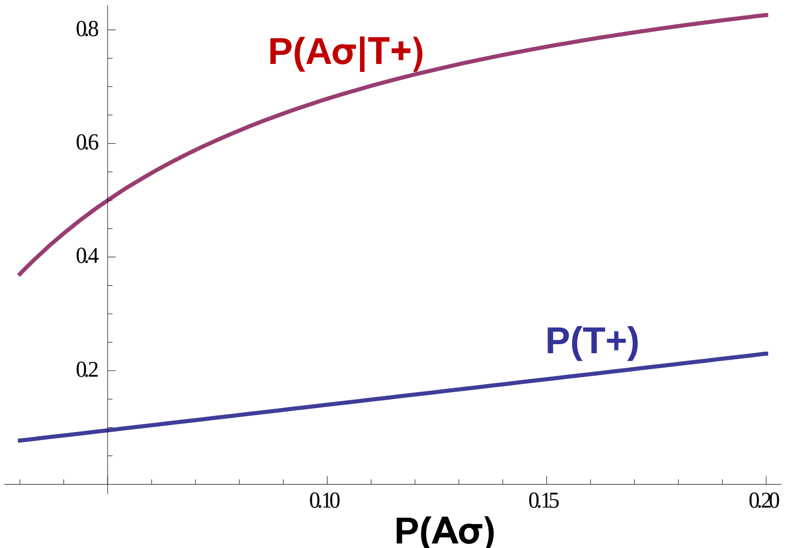
$$P(T+)=P(T+|\ A\sigma)\ P(A\sigma)+ P(T+|\ Y\gamma)\ P(Y\gamma)=0.95\text{x}0.0005+0.05\text{x}0.9995=0.05045$$

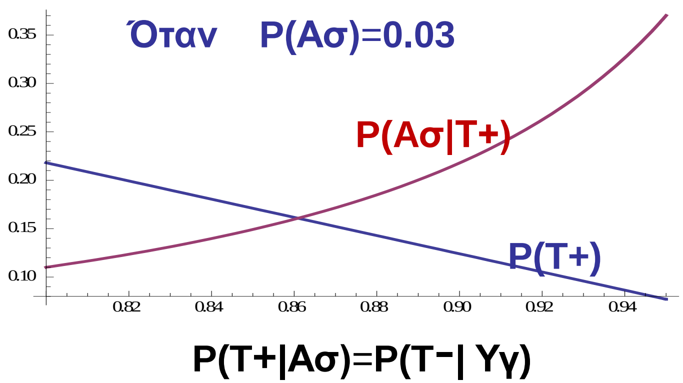
$$P(A\sigma|T+)= \frac{P(T+|\ A\sigma)\ P(A\sigma)}{P(T+)}= \frac{0.95\text{x}0.0005}{0.05045}=0.00941$$

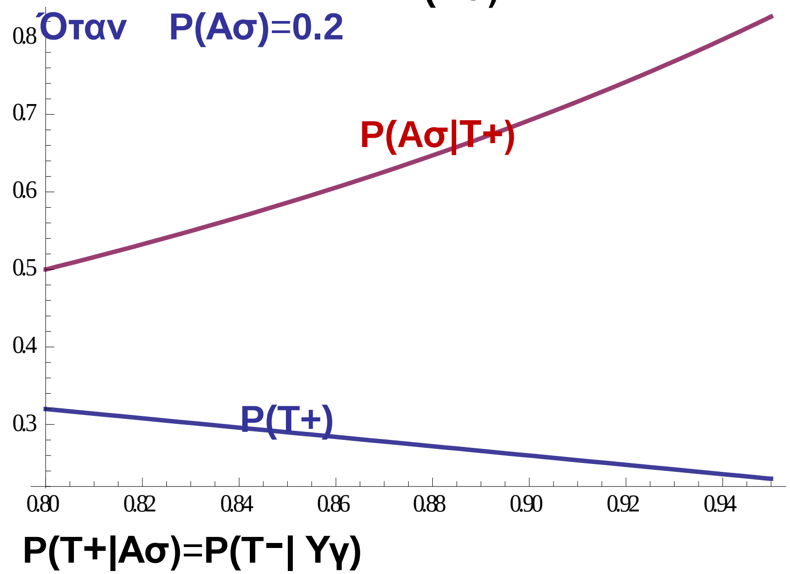
Διαγνωστικός Έλεγχος (test Παπανικολάου συνέχεια…)

Όταν P(T+|Aσ)=P(T⁻| Yγ) = 0.95









Ανεξαρτησία ενδεχομένων (παράδειγμα)

Έχουμε οικογένεια με τρία παιδιά (θεωρούμε ότι για ένα παιδί είναι ίδια η πιθανότητα να είναι κορίτσι ή αγόρι).

Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: παιδιά και των δύο φύλων

B: τουλάχιστον ένα κορίτσι

Γ: το πολύ ένα κορίτσι

$\Omega = \{ AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK \}$

Έχουμε 2^3 στοιχειώδη ισοπίθανα ενδεχόμενα

$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\quad P(B) = \frac{7}{8}$

παρατηρούμε $A \subset B$ $\quad A \cap B = A$

$P(A \cap B) = P(A) > P(A)P(B)$ $\quad$ A, B όχι ανεξάρτητα

$P(\Gamma) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad P(A \cap \Gamma) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = P(A)P(\Gamma)$ $\quad$ A, Γ ανεξάρτητα

Παράδειγμα (συνέχεια…)

X: πλήθος των κοριτσιών άρα $3-X$: πλήθος αγοριών

Οι δυνατές τιμές του X είναι $\{0,1,2,3\}$

το A αντιστοιχεί $(X \geq 1 \cap 3-X \geq 1) = (1 \leq X \leq 2)$

το B αντιστοιχεί $(X \geq 1) = (1 \leq X \leq 3)$

το Γ αντιστοιχεί $(X \leq 1) = (0 \leq X \leq 1)$

$$P(A) = P(X=1 \text{ ή } X=2) = P(X=1) + P(X=2) = 3 \times \frac{1}{2^3} + 3 \times \frac{1}{2^3}$$

$$P(B) = P(X=1 \text{ ή } X=2 \text{ ή } X=3) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$P(\Gamma) = P(X=0 \text{ ή } X=1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{2^3} + 3 \times \frac{1}{2^3}$$