- **Εκτιμητική**
  - **Διαστήματα Εμπιστοσύνης** για παραμέτρους δύο ανεξάρτητων πληθυσμών (ακριβή και ασυμπτωτικά)
    - για τη διαφορά μέσων τιμών δύο κανονικών (με ίσες, άγνωστες διασπορές)
    - για το πηλίκο των διασπορών δύο κανονικών
    - για τη τη διαφορά μέσων τιμών δύο οιασδήποτε κατανομών όταν τα μεγέθοι των δείγματος είναι μεγάλα (πχ. για διαφορά ποσοστών)
- **Έλεγχοι υποθέσεων**
  - για την παράμετρο ενός δείγματος
  - σύγκριση των αντίστοιχων παραμέτρων δύο δειγμάτων

Διαστήματα εμπιστοσύνης

	Παράμετρος πληθυσμού	Προϋποθέσεις	Μέγεθος δείγματος	$100(1-a)\%$ δ.ε.
κανονικές κατανομές	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x}-\bar{y}\pm z_{a/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ άγνωστο	$n,\ m<30$	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\, s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}$ όπου $s^2=\dfrac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}$ και $v=n+m-2$
		$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστο	$n,\ m<30$	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}$ και $v=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1}+\dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ όταν $n\neq m$ ενώ $v=2(n-1)$ όταν $n=m$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$n<30$	$\bar{z}\pm\dfrac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\,a/2}$ όπου $\bar{z}$ η μέση τιμή των x_i-y_i και s_z^2 η διασπορά των x_i-y_i
οποιεσδήποτε κατανομές		$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ άγνωστο	$n,\ m\geq 30$	$\bar{x}-\bar{y}\pm z_{a/2}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}$
κανονικές κατανομές	σ_1^2/σ_2^2			$\left(\dfrac{s_1^2}{s_2^2}/F_{n-1,\,m-1;\,a/2},\ \dfrac{s_1^2}{s_2^2}F_{m-1,\,n-1;\,a/2}\right)$
κατανομές Bernoulli	p_1-p_2		$n,\ m\geq 30$	$\hat{p}_1-\hat{p}_2\pm z_{a/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}+\dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$
			$n<30$	άβακες

Εκτίμηση παραμέτρων σε δύο δείγματα

1. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y_1, \dots, Y_m$ τ.δ. από $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ανεξάρτητα μεταξύ τους. Δ.Ε. για $\mu_1 - \mu_2$

$\widehat{\mu_1} = \bar{X}$

$\widehat{\mu_2} = \bar{Y}$

$\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y}$ είναι εκτιμητής του $\mu_1 - \mu_2$.

Ας βρούμε την κατανομή του

$\bar{X} \sim N\left(E(X_i) = \mu_1, \ \frac{var(X_i)}{n} = \frac{\sigma_1^2}{n}\right)$

$\bar{Y} \sim N\left(E(Y_i) = \mu_2, \ \frac{var(Y_i)}{m} = \sigma_2^2/m\right)$

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \ \sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m\right)$

$\downarrow$

ως γραμ συνδ ανεξ. καν.

Εκτίμηση παραμέτρου κοινής σε δύο δείγματα

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_1, \dots, Y_m$ τ.δ. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Εαν $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ $\quad N(\mu, \sigma_1^2)$ $\quad N(\mu, \sigma_2^2)$

$\hat{\mu}$ $\quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ $\quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i}{m}$ $\quad X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$

$\hat{\mu} = \frac{X_1 + \dots + X_n + Y_1 + \dots + Y_m}{n+m}$ εκτίμηση για την κοινή πληθυσμιακή μέση τιμή.

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i}{n+m} = \frac{n \frac{\sum X_i}{n} + m \frac{\sum Y_i}{m}}{n+m} = \frac{n\bar{X} + m\bar{Y}}{n+m}$$

$$\hat{\mu}_p = \frac{n}{n+m}\bar{X} + \frac{m}{n+m}\bar{Y}$$

(ένας εκτιμητής που λαμβάνει υπόψη και τα δύο δείγματα)

Εκτίμηση παραμέτρου κοινής σε δύο δείγματα

Εάν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ $\quad N(\mu_1, \sigma^2)$ $\quad N(\mu_2, \sigma^2)$

$\hat{\sigma}^2$ $\quad S_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ $\quad S_y^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2}{m-1}$

(για αμεροληψία)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2}{n+m-2}$$

(για την αμεροληψία του εκτιμητή)

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2} = \frac{n-1}{n+m-2} S_x^2 + \frac{m-1}{n+m-2} S_y^2$$

(σταθμισμένοι οι δύο εκτιμητές με βάρος ανάλογο με το μέγεθος εκάστου δείγματος)

Διαφορά μέσων τιμών, μικρά δείγματα, κανονικοί πληθυσμοί, ίσες διασπορές

Διεξάγουμε μια έρευνα για την επίδραση δύο ουσιών στην υπερκινητικότητα των αρουραίων ενός εργαστηρίου. Δύο τυχαία δείγματα αρουραίων χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη, στο ένα δείγμα μεγέθους $n = 18$ χορηγήθηκε η ουσία A και στο άλλο μεγέθους $m = 24$ η ουσία B. Μετά από δύο εβδομάδες, μετρήθηκε η υπερκινητικότητα των αρουραίων και πήραμε τα ακόλουθα αποτελέσματα $\overline{X_A} = 75.6$, $S_A^2 = 12.25$ και $\overline{X_B} = 72.8$, $S_B^2 = 10.24$. Να δώσετε διάστημα εμπιστοσύνης(δ.ε) συντελεστή εμπιστοσύνης(σ.ε) 95% για τη διαφορά $\mu_A - \mu_B$. (Υποθέστε ότι οι δυο πληθυσμοί έχουν την ίδια διασπορά)

κανονικές κατανομές

$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ άγνωστο	$n,\ m < 30$	$\overline{x} - \overline{y} \pm t_{v;\,a/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$ όπου $s^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}$ και $v = n+m-2$

Επειδή $n=18$ και $m=24$ (μικρά μεγέθη δείγματος) το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί μόνον εαν υποθέσουμε ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από κανονική κατανομή. Μας έχει δοθεί ότι οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι ίσες, έτσι η εκτίμηση για την κοινή διασπορά

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2} = \frac{17\times 12.25 + 23\times 10.24}{18+24-2} = 11.09$$

Για την εύρεση του δ.ε. σ.ε. $1-\alpha=0.95$ θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος

$$\left[\bar{X}_A-\bar{X}_B - t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)},\ \bar{X}_A-\bar{X}_B + t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\right]$$

εδώ $\bar{X}_A-\bar{X}_B = 75.6-72.8 = 2.8$

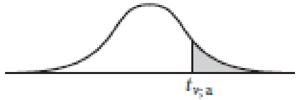
$t_{n+m-2}(0.025) = t_{40}(0.025) = 2.021$

$$\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt{11.09\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)} = 1.038$$

οπότε έχουμε

$$[2.8 - 2.021\times 1.038,\ 2.8+2.021\times 1.038] = [2.8-2.099,\ 2.8+2.099] = \underline{\underline{[0.70,\ 4.89]}}$$

Πίνακας: Τιμών $t_{v;\,a}$ της t_v -κατανομής ώστε
$P(t_v > t_{v;\,a}) = a$



β.ε.	a=0,10	a=0,05	a=0,025	a=0,010	a=0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

$t_{40}(0.025)$ (ή $t_{40;0.025}$) $= 2.021$

είναι η προσέγγιση της κατανομής t_v (όταν το $v \geq 30$) από την κανονική κατανομή.

Είναι ρεαλιστική η υπόθεση πως τα δύο δείγματα προέρχονται από κανονικές κατανομές με ίσες διασπορές;

κανονικές κατανομές				
	σ_1^2 / σ_2^2			$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} / F_{n-1,\, m-1;\, a/2},\ \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{m-1,\, n-1;\, a/2}\right)$

Διάστημα εμπιστοσύνης για σ_1^2/σ_2^2 όταν έχω κανονικά δείγματα.

$$\hat{\sigma}_1^2 = S_x^2 \qquad \hat{\sigma}_2^2 = S_x^2$$

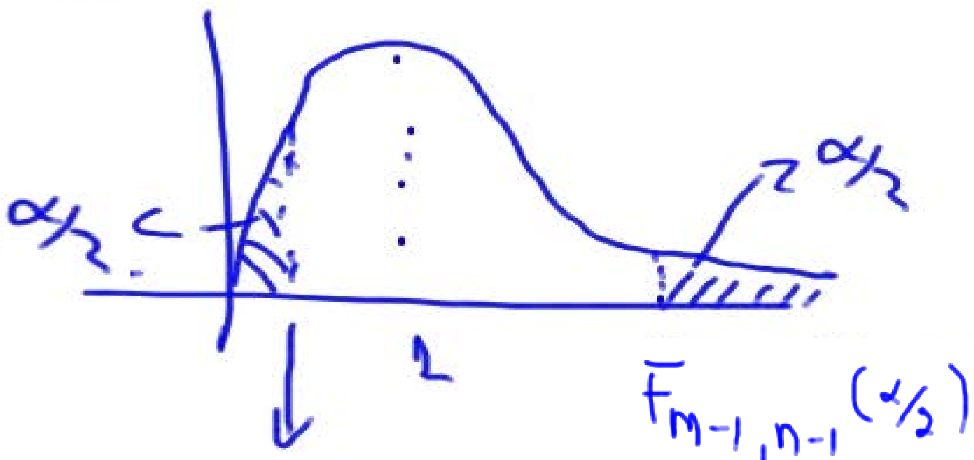
$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{(m-1)S_x^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

$$\frac{\dfrac{\chi^2_{m-1}}{m-1}}{\dfrac{\chi^2_{n-1}}{n-1}} \sim F_{m-1,n-1}$$

είναι ανεξάρτητες

$$\frac{\dfrac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \Big/ m-1}{\dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \Big/ n-1} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \, \frac{S_Y^2}{S_X^2} \sim F_{m-1,n-1}$$



$$F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2) = \frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha/2)}$$

$W \sim F_{m,n}$

$\frac{1}{W} \sim F_{n,m}$

Οπότε $$P\left(\frac{1}{F_{n-1,m-1}(a/2)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{S_y^2}{S_x^2} \le F_{m-1,n-1}(a/2) \right) = 1-a$$

$$P\left(\frac{S_x^2}{S_y^2} \frac{1}{F_{n-1,m-1}(a/2)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_x^2}{S_y^2} F_{m-1,n-1}(a/2) \right) = 1-\alpha$$

είναι ένα δ.ε. ίσων ουρών για το πηλίκο $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ συντελεστού εμπιστοσύνης $1-a$.

Στο παράδειγμα $\frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{12.25}{10.24} = 1.1962$

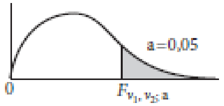
Εάν θέλω να κατασκευάσω διάστημα σ.ε. 90% χρειάζομαι

$F_{23,17}(0.05) = 2.1987$ και $F_{17,23}(0.05) = 2.091$

$\left[1.1962 \frac{1}{2.091},\ 1.1962 \times 2.1987\right] = [0.5721, 2.6301]$ Το διάστημα αυτό περιέχει το 1

Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1 \Rightarrow \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ σε επίπεδο σημαντικότητας 10%.

Πίνακας: Των τιμών $F_{\nu_1,\nu_2;a}$ της F-κατανομής για τις οποίες $P(F > F_{\nu_1,\nu_2;a}) = a$



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

Πίνακας *(συνέχεια)*

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ν_1 / ν_2
241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3	1
19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	2
8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53	3
5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63	4
4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36	5
4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67	6
3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23	7
3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93	8
3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71	9
2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	10
2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40	11
2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30	12
2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	13
2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13	14
2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07	15
2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	16
2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	17
2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92	18
2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88	19
2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84	20
2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81	21
2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78	22
2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76	23
2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73	24
2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	25
2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69	26
2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67	27
2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65	28
2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64	29
2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62	30
2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51	40
1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39	60
1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25	120
1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00	∞

$F_{23,17}(0.05) = 2.1987$

$F_{17,23}(0.05) = 2.091$

Διαφορά μέσων τιμών, μεγάλα δείγματα

Για τους 35 φοιτητές που εξετάστηκαν στο μάθημα της Βιοστατιστικής τον Ιούνιο του 2012 ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διασπορά των βαθμών τους ήταν $\overline{X_I}$ =4.04 και S_I^2=4.93 αντιστοίχως. Για τους 55 φοιτητές που εξετάσθηκαν τον Σεπτέμβριο του ιδίου έτους τα αντίστοιχα νούμερα ήταν $\overline{X_\Sigma}$ =4.45 και S_Σ^2=3.79. Να ελέγξετε εάν, σε επίπεδο σημαντικότητας α=10%, δεχόμαστε την υπόθεση ότι η μέση επίδοση των φοιτητών τον Σεπτέμβριο ήταν ίδια με τη μέση επίδοσή τους τον Ιούνιο ή όχι.

β. Ο έλεγχος $H_o : \mu_I = \mu_\Sigma$ έναντι της $H_1 : \mu_I \neq \mu_\Sigma$ είναι αμφίπλευρος (και σύνθετος) και ισοδύναμα γίνεται $H_o : \mu_I - \mu_\Sigma = 0$ έναντι της $H_1 : \mu_I - \mu_\Sigma \neq 0$.

(Τρόπος $1^{ος}$) Θα κατασκευάσω δ.ε., ίσων ουρών, για τη διαφορά $\mu_I - \mu_\Sigma$, σ.ε. $1 - \alpha = 0.90$. Απορρίπτουμε την H_o όταν το διάστημα δεν περιέχει το μηδέν.

οποιεσδήποτε κατανομές	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	$n, m \geq 30$	$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}$

Διαφορά μέσων τιμών $\mu_1-\mu_2$ μεγάλα δείγματα από άγνωστες κατανομές ανεξάρτητα

Εκτιμητής του $\mu_1-\mu_2$ $\quad \bar{X}-\bar{Y}$

$$\bar{X} \overset{\kappa o \theta}{\sim} N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) \qquad n>>30$$

$$\bar{Y} \overset{\kappa o \theta}{\sim} N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right) \qquad m>>30$$

οπότε $\bar{X}-\bar{Y} \overset{\kappa o \theta}{\sim} N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$

ισχύει επίσης (εαν εκτιμήσω τα άγνωστα σ_1^2 και σ_2^2 από τα S_X^2 και S_Y^2)

ότι

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Έτσι κατασκευάζω, με την μέθοδο που έχουμε δει, ασυμπτωτικό δ.ε. για το $\mu_1-\mu_2$ σ.ε. $1-\alpha$ ίσων ουρών.

$$P\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq \bar{X}-\bar{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}\right)=1-\alpha.$$

Επειδή $n_I = 35$ $n_\Sigma = 55$ (αρκετά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων) το διάστημα θα δίδεται από τον τύπο:

$$\left(\overline{X_I} - \overline{X_\Sigma} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_I^2}{n_I} + \frac{S_\Sigma^2}{n_0}}, \overline{X_I} - \overline{X_\Sigma} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_I^2}{n_I} + \frac{S_\Sigma^2}{n_0}}\right) \tag{2}$$

όπου $z_{\frac{\alpha}{2}} \overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=} z_{0.05} = 1.645$, εφόσον, $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$ και $z_{0.05}$ είναι τέτοιο ώστε:
$P(Z > z_{0.05}) = 0.05 \Rightarrow \Phi(z_{0.05}) = P(Z \leq z_{0.05}) = 1 - P(Z > z_{0.05}) = 1 - 0.05 \Rightarrow \Phi(z_{0.05}) = 0.95$, όμως $\Phi(1.645) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.645$, για $Z \sim N(0, 1)$.

Συνεπώς το δ.ε. (2) γίνεται:

$$\left(4.04 - 4.45 - 1.645\sqrt{0.1408 + 0.06890},\ \ 4.04 - 4.45 + 1.645\sqrt{0.1408 + 0.06890}\right) =$$

$$(-0.410 - 1.645 \cdot 0.4580,\ \ -0.410 + 1.645 \cdot 0.4580) = (-0.410 - 0.7533,\ \ -0.410 - 0.7533) =$$

$$\underline{\underline{(-1.163347,\ \ 0.343347)}} \tag{3}$$

Επειδή το δ.ε. (3) περιέχει το 0, η H_0 γίνεται δεκτή σε ε.σ. 10%.

Διαφορά ποσοστών, μεγάλα δείγματα

Το Journal of fish Biology δημοσίευσε μια μελέτη που έκανε σύγκριση παρασίτων που βρέθηκαν στα είδη ψαριών στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό. Στη Μεσόγειο από τα 588 ψάρια που πιάστηκαν και εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα από παράσιτα τα 211. Στον Ατλαντικό ωκεανό, από τα 123 που εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα τα 26. Συγκρίνετε την αναλογία των παρασίτων στις δύο θάλασσες χρησιμοποιώντας ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης. Ερμηνεύστε το διάστημα.

κατανομές Bernoulli

$p_1 - p_2$		$n, m \geq 30$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$
		$n < 30$	άβακες

Εάν $X_1, \dots, X_n \sim Bernoulli(p_1)$ $\quad E(X_i) = p_1 \quad var(X_i) = p_1(1-p_1)$

και $Y_1, \dots, Y_m \sim Bernoulli(p_2)$ $\quad E(Y_i) = p_2 \quad var(Y_i) = p_2(1-p_2)$

Το δ.ε. για την διαφορά μέσων τιμών εξειδικεύεται στο εξής:

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} \le p_1 - p_2 \le \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}\right) = 1-\alpha$$

Οπότε εδώ $\hat{p}_1 = \frac{211}{588} = 0.36$ $\quad \hat{p}_2 = \frac{26}{123} = 0.211$ $\quad n = 588 \quad m = 123$

μεγάλα

$1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \qquad \Phi(z_{0.05}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.645$

$$0.36 - 0.211 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{588} + \frac{0.211 \times 0.789}{123}} = 0.149 \pm 1.645\sqrt{0.0017}$$

$0.149 \pm 1.645 \times 0.0417 = 0.149 \pm 0.069 = [0.08, 0.218]$ $\quad 90\%$

$[0.095, 0.202]$ $\quad 80\%$

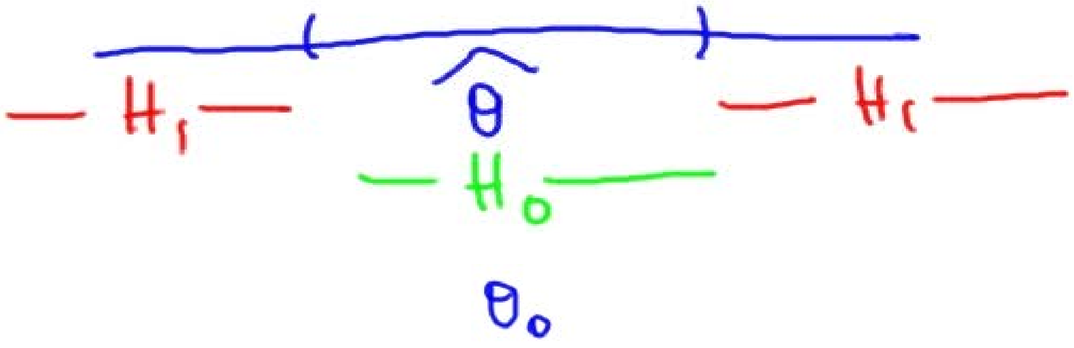
Σύνθεση Διαστημάτων Εμπιστοσύνης και Ελέγχων

Γενικά όταν έχω έλεγχο της μορφής

$H_0: \theta = \theta_0$ (απλή έναντι σύνθετης - αμφίπλευρη)

$H_1: \theta \neq \theta_0$

τότε για να κάνω έλεγχο υπόθεσης σε ε.σ. α κατασκευάζω δ.ε. ίσων ουρών σ.ε. $1-\alpha$ και εαν η τιμή θ_0 δεν ανήκει σε αυτό το διάστημα απορρίπτω την H_0, ενώ την αποδέχομαι εαν ανήκει



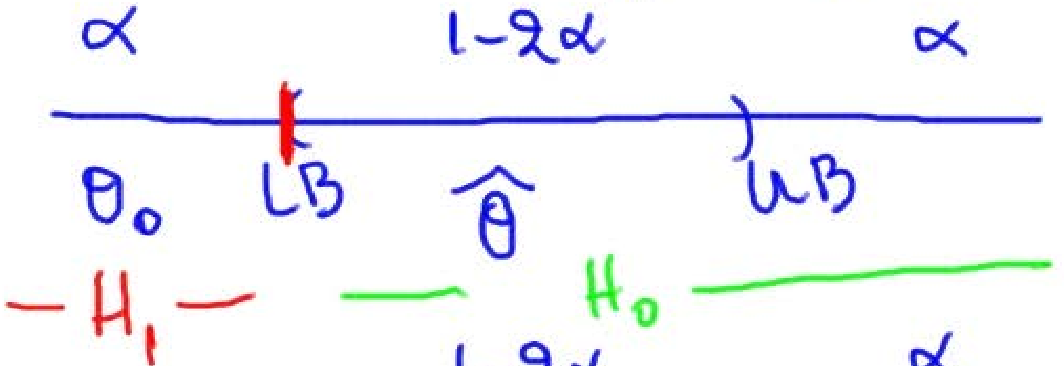
Εαν έχω μονόπλευρο έλεγχο

$H_0: \theta = \theta_0$

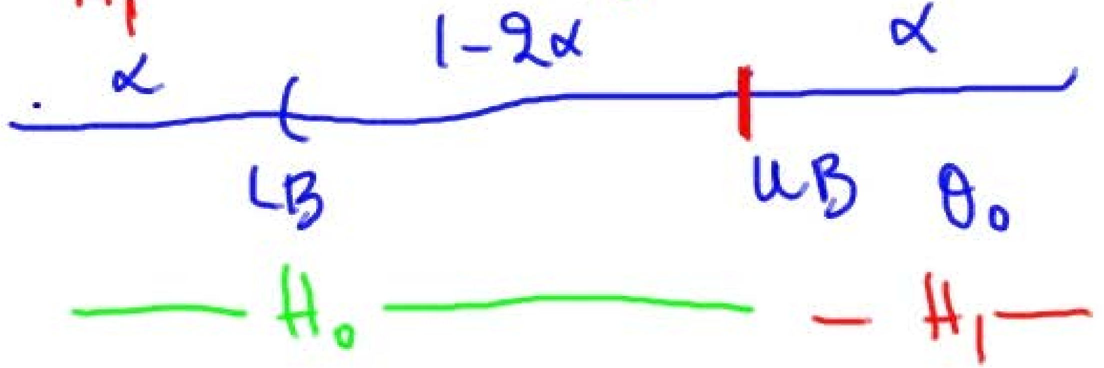
$H_1: \theta > \theta_0$
$\quad\quad\quad <$

Κατασκευάζω δ.ε. ίσων ουρών σ.ε. $1-2\alpha$ και κρατώ ένα εκ των δύο άκρων (κατάλληλα)

$H_1: \theta > \theta_0$



$H_1: \theta < \theta_0$



Μεγάλο δείγμα Έλεγχοι υπόθεσης για την μέση τιμή μ

$H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$ $\qquad$ $H_1: \mu < \mu_0$ $\qquad$ $H_1: \mu > \mu_0$

$$R = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| > z_{\alpha/2} \right\} \qquad R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha \right\} \qquad R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > z_\alpha \right\}$$

Με την χρήση διαστημάτων εμπιστοσύνης

απορρίπτω την H_0 όταν

μ_0 δεν ανήκει στο

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

δ.ε. ίσων ουρών

σ.ε. $1-\alpha$

όταν το μ_0 μεγαλύτερο του άνω άκρου του

$$\bar{X} \pm z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

δ.ε. ίσων ουρών

σ.ε. $1-2\alpha$

το μ_0 μικρότερο του κάτω άκρου του

$$\bar{X} \pm z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

δ.ε. ίσων ουρών

σ.ε. $1-2\alpha$

Δίνονται ομαδοποιημένες οι ημερήσιες καταναλώσεις ηλεκτρικής ενέργειας (σε 100-άδες κιλοβατώρες) μιας χημικής βιομηχανίας για 40 ημέρες:

ενέργεια	9-13	13-17	17-21	21-25	25-29
ημέρες	4	10	14	8	4

Εάν μ είναι η μέση τιμή της ημερήσιας κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας, σε επίπεδο σημαντικότητας α=10%, δεχόμαστε την υπόθεση $H_0 : \mu = 18$ έναντι της $H_1 : \mu \neq 18$; ΝΑΙ ☐ ή ΟΧΙ ☐

Οι παρατηρήσεις του δείγματος, μεγέθους $n = 40$, δίνονται ομαδοποιημένες κατά συνέπεια ο δειγματικός μέσος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i}{n} \overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=} \frac{11 \times 4 + 15 \times 10 + 19 \times 14 + 27 \times 4}{40} = \frac{752}{40} = \underline{\underline{18.8 \text{ 100-δες } kWh}},$$

και η δειγματική διασπορά από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \overline{x})^2 f_i \overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=} \frac{(11 - 18.8)^2 \times 4 + \cdots + (27 - 18.8)^2 \times 4}{39}$$

$$= 20.472 = (4.52)^2, \quad \text{οπότε η τυπική απόκλιση είναι:} \quad s = \underline{\underline{4.52 \text{ 100-δες } kWh}}$$

Τα δεδομένα στην περίπτωση που μελετάμε προέρχονται από άγνωστη κατανομή με μέση τιμή μ για την οποία δε γνωρίζουμε τη διασπορά. Συνεπώς, εφόσον έχουμε αρκετές παρατηρήσεις $n = 40$, χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο ισχύει ότι:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} N(0, 1).$$

Ο έλεγχος είναι αμφίπλευρος και η εναντία υπόθεση είναι $H_1 : \mu \neq 18$

Τρόπος 1ος Κατασκευάζουμε διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) συντελεστού εμπιστοσύνης (σ.ε.) $1-\alpha$, όπου α το επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) του ελέγχου. Εδώ $1-\alpha = 1-0.1 = 0.9 (= 90\%)$.

Απορρίπτουμε την H_0 όταν το 18 δεν περιέχεται στο διάστημα αυτό.

Το δ.ε. για την μέση τιμή οποιασδήποτε κανονικής με άγνωστη διασπορά και μεγάλο μέγεθος δείγματος n=40, σ.ε. $1-\alpha$, δίδεται από τον τύπο

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=} \left[\overline{X} - z_{0.05}\frac{S}{\sqrt{40}},\ \overline{X} + z_{0.05}\frac{S}{\sqrt{40}}\right]$$

εφόσον, $1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$ και $z_{0.05}$ είναι τέτοιο ώστε:

$$P(Z > z_{0.05}) = 0.05 \Rightarrow \Phi(z_{0.05}) = P(Z \leqslant z_{0.05}) = 0.95,\ \Phi(1.645) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.645$$

$$\left[18.8 - 1.645\frac{4.52}{\sqrt{40}},\ 18.8 + 1.645\frac{4.52}{\sqrt{40}}\right] = [18.8 - 1.645\times 0.715,\ 18.8 + 1.645\times 0.715] =$$

$$[18.8 - 1.17,\ 18.8 + 1.17] = \underline{\underline{[17.62,\ 19.97]}}$$

είναι το δ.ε. σ.ε. 90%, για το οποίο παρατηρούμε ότι:

Κάτω Άκρο < 18 < Άνω Άκρο

άρα αποδεχόμαστε την H_0 σε ε.σ. 10%.

Τρόπος $2^{ος}$ Απορρίπτουμε την $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu \neq \mu_0$ σε ε.σ. α, όταν ισχύει:

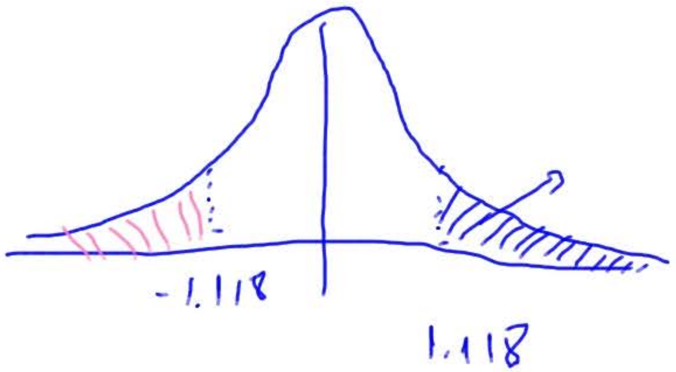
$$|T| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| > z_{\alpha/2}.$$

Εδώ $\mu_0 = 18$, $\alpha = 0.1$ και αντιστοίχως έχουμε

$$|T| = \left| \frac{18.8 - 18}{\frac{4.52}{\sqrt{40}}} \right| = 1.118 < 1.645 = z_{0.05},$$

άρα αποδεχόμαστε την H_0 σε ε.σ. 10%.

Να σημειωθεί ότι το p-value=2*(1-CDF.NORMAL(1.118))=0.2635.



αμφίπλευρο p-value = 2 "το αρνητικό άκρο της κατανομής"

$2P(Z > 1.118)$

$2(1 - P(Z \leq 1.118))$

$2(1 - \Phi(1.118))$

0.2635

Ενέργεια

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = 1.118$$

	H_0	H_1	Προϋποθέσεις	Απορρ. περιοχή R	Επεξηγήσεις
οποιεσδήποτε κατανομή	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{z > z_a\}$	όπου $z = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ και $t = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$
			σ^2 άγνωστο $n \geq 30$	$R = \{t > z_a\}$	
κανονική κατανομή			σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{t > t_{n-1;\, a}\}$	
οποιεσδήποτε κατανομή		$\mu < \mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{z < -z_a\}$	
			σ^2 άγνωστο $n \geq 30$	$R = \{t < -z_a\}$	
κανονική κατανομή			σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{t < -t_{n-1;\, a}\}$	
οποιεσδήποτε κατανομή		$\mu \neq \mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{\lvert z \rvert > z_{a/2}\}$	
			σ^2 άγνωστο $n \geq 30$	$R = \{\lvert t \rvert > z_{a/2}\}$	
κανονική κατανομή			σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{\lvert t \rvert > t_{n-1;\, a/2}\}$	
κανονική κατανομή	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$R = \{X^2 > \mathcal{X}^2_{n-1;\, a}\}$	όπου $X^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
		$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$R = \{X^2 < \mathcal{X}^2_{n-1;\, 1-a}\}$	
		$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$R = \{X^2 > \mathcal{X}^2_{n-1;\, a/2}$ ή $X^2 < \mathcal{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}\}$	
κατανομή Bernoulli	$p = p_0$	$p > p_0$	$n > 30$	$R = \{z > z_a\}$	όπου $z = \dfrac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$ και $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$ (x=αριθμός επιτυχιών)
		$p < p_0$	$n > 30$	$R = \{z < -z_a\}$	
		$p \neq p_0$	$n > 30$	$R = \{\lvert z \rvert > z_{a/2}\}$	

Τα βάρη (σε gr) 8 ποντικών, οι οποίοι για ένα μήνα υποβλήθηκαν σε καθημερινές μεταγγίσεις τεχνητού αίματος, είναι μετά τη διαδικασία τα εξής:

75 78 95 71 80 69 77 65

Υποθέτοντας ότι το βάρος των ποντικών αυτών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ, να ελέγξετε εάν σε επίπεδο σημαντικότητας α=10% δεχόμαστε την υπόθεση $H_0 : \mu \geqslant 85$gr έναντι της $H_1 : \mu < 85$gr. Ποια κατανομή χρησιμοποιήσατε και γιατί;

κανονική κατανομή

H_0	H_1	Προϋποθέσεις	Απορρ. περιοχή R	Επεξηγήσεις
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{t < -t_{n-1;\, a}\}$	και $t = \dfrac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 8$. Ο δειγματικός μέσος δίδεται από τον τύπο:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=} \frac{75 + \cdots + 65}{8} = \frac{610}{8} = \underline{\underline{76.25\,\mathrm{gr}}},$$

και η δειγματική διασπορά από τον τύπο:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=} \frac{(75 - 76.25)^2 + \cdots + (65 - 76.25)^2}{7} = \frac{1.56 + \cdots + 126.56}{7}$$

$$= 82.50 = (9.08)^2, \quad \text{οπότε η τυπική απόκλιση είναι:} \quad S = \underline{\underline{9.08\,\mathrm{gr}}}$$

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και η εναντία υπόθεση είναι της μορφής

$$H_1 : \mu < 85$$

Τρόπος 1ος Κατασκευάζουμε διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) συντελεστού εμπιστοσύνης (σ.ε.) $1 - 2\alpha^*$, όπου α^* το επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) του ελέγχου. Εδώ $1 - 2\alpha^* = 1 - 2 \times 0.1 = 0.8 (= 80\%)$.

Απορρίπτουμε την H_0 όταν Άνω Άκρο< 85.

Το δ.ε. για το μέσο κανονικής με άγνωστη διασπορά και μικρό μέγεθος δείγματος n=8, σ.ε. $1-\alpha$, δίδεται από τον τύπο

$$\left[\overline{X}-t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]\overset{\varepsilon\delta\acute{\omega}}{=}\left[\overline{X}-t_{7}(0.1)\frac{S}{\sqrt{8}},\ \overline{X}+t_{7}(0.1)\frac{S}{\sqrt{8}}\right]$$

εφόσον, $1-\alpha=0.8\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.1$ και $t_7(0.1)=1.415$, το

$$\left[76.25-1.415\frac{9.08}{\sqrt{8}},\ 76.25+1.415\frac{9.08}{\sqrt{8}}\right]=[76.25-1.415\times3.21,\ 76.25+1.415\times3.21]=$$

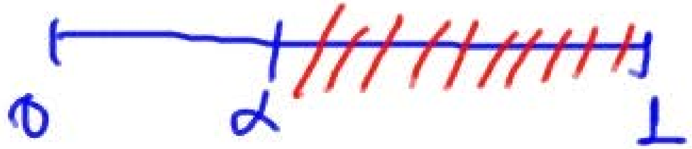
$$[76.25-4.543,\ 76.25+4.543]=\underline{\underline{[71.71,\ 80.79]}}$$

είναι το δ.ε. σ.ε. 80%, για το οποίο παρατηρούμε ότι:

Άνω Άκρο=80.79$<$ 85

άρα απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ. 10% και αποδεχόμαστε την H_1.

Εαν αποδέχομαι την H_0
σε ε.σ. α την αποδέχομαι
και για $\alpha^* < \alpha$



Εαν απορρίπτω την H_0
σε ε.σ. α, τότε την απορ-
ρίπτω $\alpha^* > \alpha$

$[71.71,\quad 80.79]$ είναι το δ.ε. σ.ε. 80%, για το οποίο παρατηρούμε ότι:

Άνω Άκρο=80.79 < 85

άρα απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ. 10% και αποδεχόμαστε την H_1.

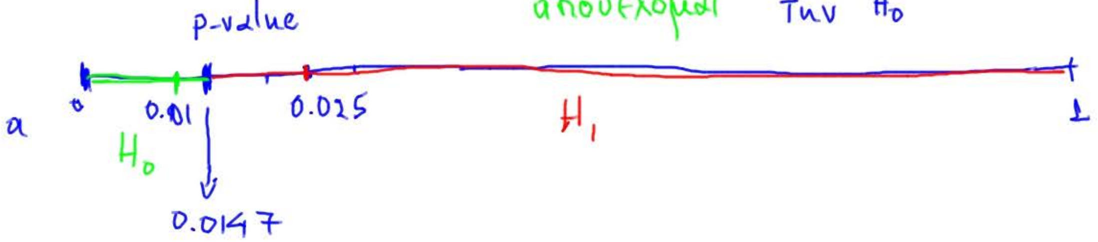
$[72.65,\ 79.84]$ δ.ε. σ.ε. 70% αντιστοιχεί σε ε.σ. α=15%
απορρίπτω την H_0 (χρειάστηκα $t_7(0.15)=1.119$)
$\alpha^* = 0.15 > 0.10 = \alpha$

$[70.16,\ 82.33]$ δ.ε. σ.ε. 90% αντιστοιχεί σε ε.σ. α=5%
απορρίπτω την H_0 $\alpha^* < \alpha$ ($t_7(0.05)=1.895$)

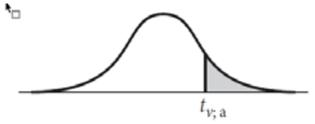
$[68.65,\ 83.84]$ δ.ε. σ.ε. 95% αντιστοιχεί σε ε.σ. α=2.5%
απορρίπτω την H_0 $\alpha^* < \alpha$ ($t_7(0.025)=2.365$)

$[66.62,\ 85.87]$ δ.ε. σ.ε. 98% αντιστοιχεί σε ε.σ. α=1%
αποδέχομαι την H_0

$[65.01,\ 87.48]$ δ.ε. σ.ε. 99% αντιστοιχεί σε ε.σ. α=0.5%
αποδέχομαι την H_0



Πίνακας: Τιμών $t_{v;\,a}$ της t_v -κατανομής ώστε
$P(t_v > t_{v;\,a}) = a$



β.ε.	a=0,10	a=0,05	a=0,025	a=0,010	a=0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499

Τρόπος 2ος Απορρίπτουμε την $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu < \mu_0$ σε ε.σ. α, όταν ισχύει:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{n-1}(\alpha).$$

Εδώ $\mu_0 = 85$, $\alpha = 0.1$ και αντιστοίχως έχουμε

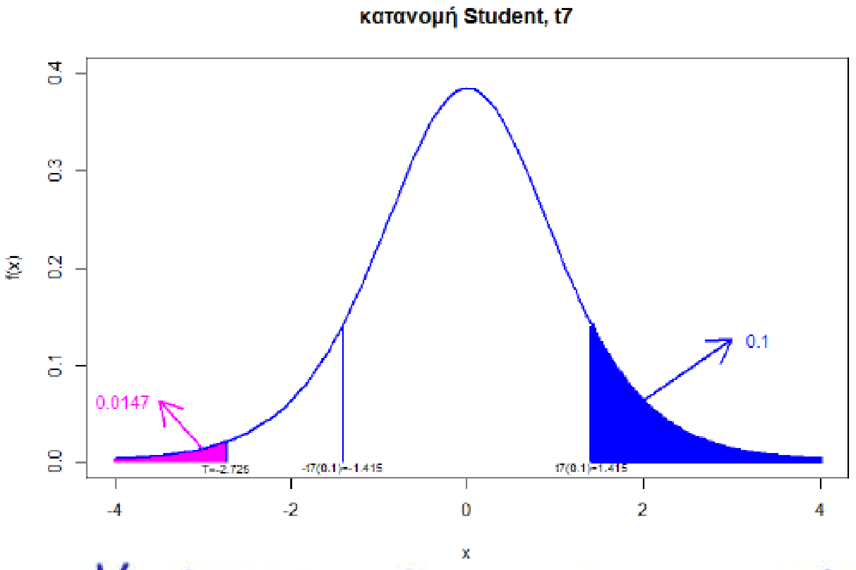
$$T = \frac{76.25 - 85}{\frac{9.08}{\sqrt{8}}} = -2.725 < -1.415 = -t_7(0.1),$$

άρα απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ. 10% και αποδεχόμαστε την H_1.

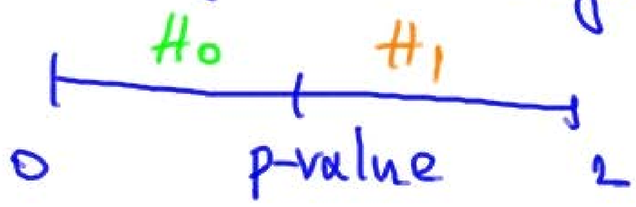
Να σημειωθεί ότι το p-value=CDF.T(-2.725,7)=0.0147.

β.ε.	a=0,10	a=0,05	a=0,025	a=0,010	a=0,005
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499

Ο έλεγχος και το p-value (significance)



Υπάρχει ένα ε.σ. κάτω από το οποίο αποδέχομαι την H_0 και πάνω από το οποίο την απορρίπτω. Δηλαδή αυτό είναι το ελάχιστο ε.σ. για το οποίο απορρίπτω την H_0 και ονομάζεται p-value του ελέγχου και εξαρτάται από τις παρατηρήσεις που πήρα στο συγκεκριμένο πρόβλημα

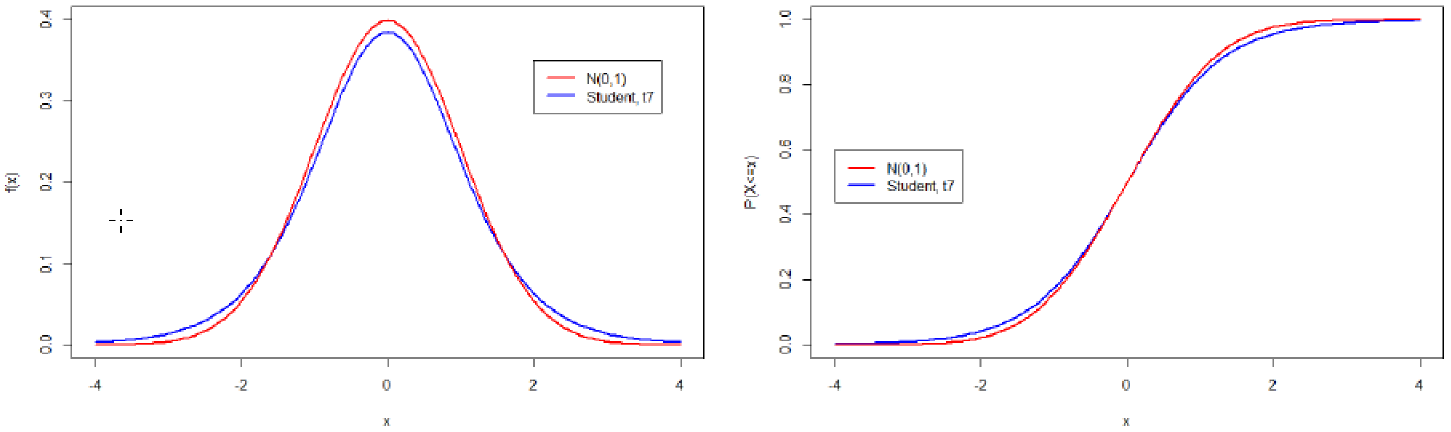


Γενικά αποδέχομαι την H_0 όταν έχω μεγάλο p-value.

Τα δεδομένα στην περίπτωση που μελετάμε προέρχονται από κανονική $N(\mu, \sigma^2)$ για την οποία δε γνωρίζουμε τη διασπορά. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε την ποσότητα $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό ($n = 8$), η κατανομή του Student με 7 βαθμούς ελευθερίας, t_7, διαφέρει από την $N(0, 1)$.

Η N(0,1) και η t_7 (η κατανομή του Student με 7 β.ε.)



Σχήμα: συναρτήσεις πυκνότητας, αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών

Ο αριθμός των παιδιών στις οικογένειες 50 φοιτητών, που επελέγησαν τυχαία, από το Τμήμα Βιολογίας δίνονται στον πίνακα

Αριθμός παιδιών/οικογένεια	1	2	3	4	5
Πλήθος φοιτητών	6	24	17	2	1

Έστω ότι συμβολίζουμε με p_π το ποσοστό των φοιτητών του Τμήματος Βιολογίας που προέρχονται από πολύτεκνες οικογένειες (δηλ. αυτές που έχουν τουλάχιστον τρία παιδιά).

α. Να δοθεί διάστημα εμπιστοσύνης, συντελεστού εμπιστοσύνης 90%, για το p_π με βάση τα προηγούμενα δεδομένα.

β. Να ελέγξετε εάν σε επίπεδο σημαντικότητας α=10% δεχόμαστε την υπόθεση $H_o : p_\pi = 0.5$ έναντι της $H_1 : p_\pi \neq 0.5$.

κατανομή Bernoulli

$p = p_0$	$p \neq p_0$	$n > 30$	$R = \{\lvert z \rvert > z_{a/2}\}$	όπου $z = \dfrac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$ και $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$ (x=αριθμός επιτυχιών)

(α) $\hat{p}_\pi = \dfrac{17+2+1}{50} = 0.4$ είναι η εκτίμηση για το p_π το ποσοστό των πολύτεκνων

Το διάστημα εμπιστοσύνης δίδεται από τον τύπο

$$\left[\hat{p}_\pi - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_\pi(1-\hat{p}_\pi)}{n}}\ ,\ \hat{p}_\pi + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_\pi(1-\hat{p}_\pi)}{n}}\right]$$

εδώ $\alpha=0.1$ $n=50$ οπότε $z_{0.05}=1.645$

$$0.4 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{50}} = 0.4 \pm 1.645\times 0.06928 = [0.2860, 0.5139] \text{ δ.ε. σ.ε. } 90\%$$

για $\alpha=0.05$ $z_{0.025}=1.96$ και το διάστημα είναι $[0.2642, 0.5357]$ δ.ε. σ.ε. 95%

$\alpha=0.2$ $z_{0.1}=1.285$ $[0.3112, 0.4887]$ δ.ε. σ.ε. 80%

(β) $H_0: p_\pi = 0.5$ $(p_0=0.5)$ με βάση το διάστημα $0.5 \in [0.2860, 0.5139]$

$H_1: p_\pi \neq 0.5$ και δεν μπορώ να απορρίψω την H_0 σε ε.σ. 10%

Το σωστό διάστημα για τον έλεγχο είναι $\hat{p}_\pi \pm z_{0.05}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{50}} = [0.2836, 0.5163]$

Διαφορετικά $\left|\dfrac{\hat{p}_\pi - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right| = \left|\dfrac{0.4-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5\times 0.5}{50}}}\right| = \left|\dfrac{-0.1}{0.0707}\right| = |-1.414| < 1.645 = z_{0.05}$

p-value $= 2\,\Phi(-1.414) = 0.1572$

Τι είναι το επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) α ενός ελέγχου

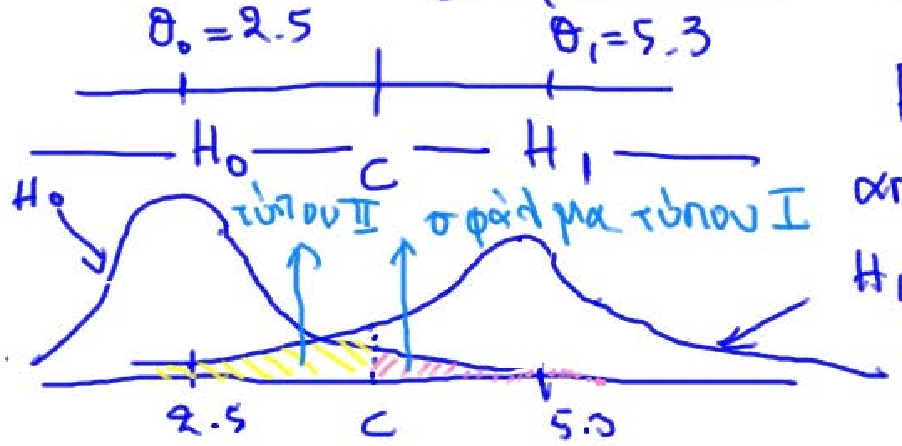
$H_0: \theta = \theta_0$ (απλή έναντι αμφίπλευρης σύνθετης)

$H_1: \theta \neq \theta_0$

Έστω $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Poisson}(\theta)$ **(εδώ χρειάζομαι μεγάλο n)**

$H_0: \theta = 2.5$ $\hat{\theta} = \bar{X}$

$H_1: \theta = 5.3$ με βάση αυτόν τον εκτιμητή της παραμέτρου πρέπει να επιλέξω μια εκ των δύο υποθέσεων. Ποιό είναι το κριτήριο; Δηλαδή πότε θα απορρίψω την H_0;



$R = \{ \bar{X} > c \}$

απορριπτική, ή κρίσιμη περιοχή

H_1 $\bar{X} \overset{H_1}{\sim} N\left(5.3, \frac{5.3}{n}\right)$

$\bar{X} \overset{H_0}{\sim} N\left(2.5, \frac{2.5}{n}\right)$

Αποφασίζω \ Ισχύει	H_0	H_1
H_0	σωστό	σφάλμα τύπου II
H_1	σφάλμα τύπου I	σωστό

αποφασίζω H_1 όταν το $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ είναι τέτοιο ώστε $\bar{X} > c$ δηλ. $\underset{\sim}{X} \in R$

αποφασίζω H_0 όταν $\underset{\sim}{X} \notin R$ δηλ. $\bar{X} \leq c$

$$P(\bar{X} > c \mid H_0) = P(\underset{\sim}{X} \in R \mid H_0) = \text{σφάλμα τύπου I} = \alpha$$

επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου.

Κρατώ σταθερό, και μικρό το σφάλμα τύπου I, και προσπαθώ να ελαχιστοποιήσω το σφάλμα τύπου II.