- Στα 150 ποντίκια ενός εργαστηρίου 20 είναι μαύρα. Παίρνουμε 4 ποντίκια. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε 1 μαύρο;
  (i) Με επανάθεση
  (ii) Χωρίς επανάθεση

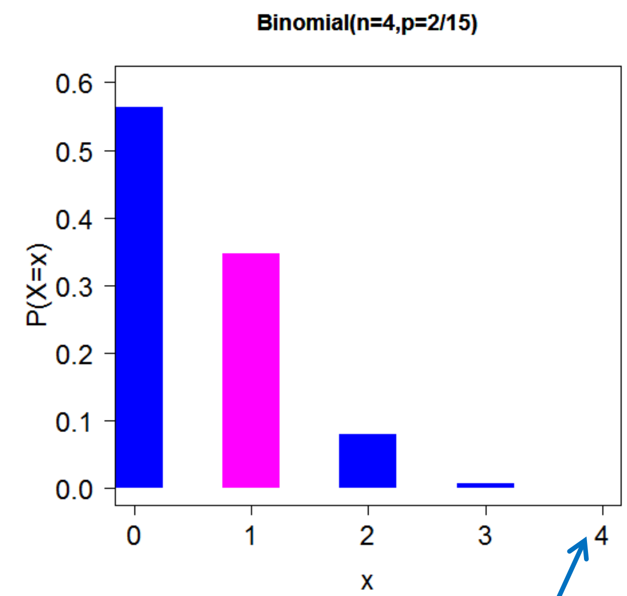
(i) **Όταν κάνω δειγματοληψία με επανάθεση χρησιμοποιώ τη Διωνυμική κατανομή, εδώ επιλέγω n=4 ποντίκια, κάθε επιλογή είναι ανεξάρτητη από την άλλη, η πιθανότητα επιλογής μαύρου ποντικιού είναι κάθε φορά:** $P(M)=\frac{20}{150}=\frac{2}{15}=0.1333$

X: το πλήθος των μαύρων ποντικών από τους 4 επιλεγέντες

X~Binomial(n=4,p=$\frac{2}{15}$)

με πιθανότητες $P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ \ x=0,1,..,n$

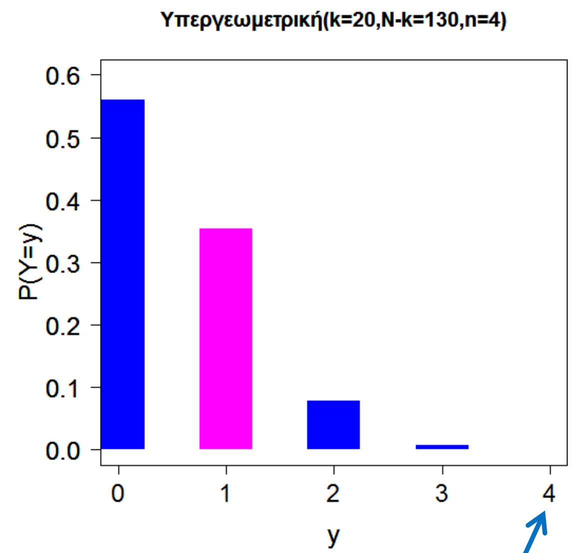
$P(X=1)=\binom{4}{1}\frac{2}{15}\left(\frac{13}{15}\right)^3=4\times\frac{2\times 13}{15^4}=0.34718$



(P(X=4)=0.00032)

(ii) Όταν κάνω δειγματοληψία χωρίς επανάθεση χρησιμοποιώ την Υπεργεωμετρική κατανομή, έχουμε k=20 μαύρα και N-k=130 μη μαύρα (σύνολο N=150) και επιλέγουμε n=4

Y: το πλήθος των μαύρων ποντικών από τους 4 επιλεγέντες



(P(Y=4)=0.00023)

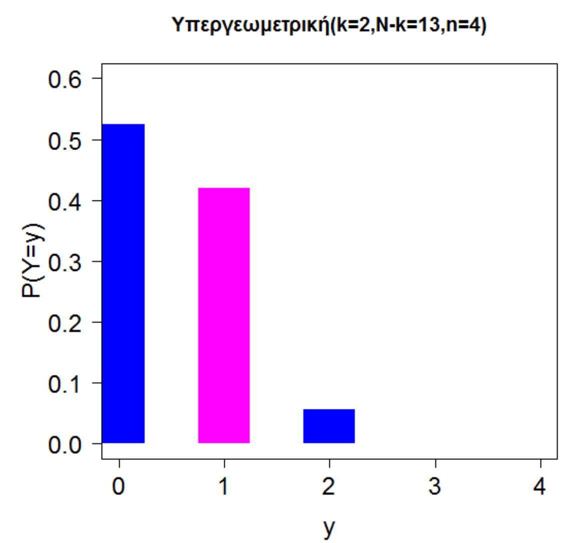
Y~Υπεργεωμετρική(k=20, N-k=130,n=4) με πιθανότητες

$$P(Y=y)=\frac{\binom{k}{y}\binom{N-k}{n-y}}{\binom{N}{n}}, \quad y=\max(0,n+k-N),..,\min(k,n)$$

$$P(Y=1)=\frac{\binom{20}{1}\binom{130}{3}}{\binom{150}{4}}=\frac{\frac{20!}{19!} \frac{130!}{3!127!}}{\frac{150!}{4!146!}}=\frac{20\times130\times129\times128\times4}{150\times149\times148\times147}=0.3531$$

Σημείωση

Αν αλλάξω το πλήθος των ποντικών του πληθυσμού, χωρίς να μεταβάλλω την αναλογία των μαύρων, παρατηρώ ότι:



P(Y=1)=0.3472 k=2000, N-k=13000, n=4 $\frac{k}{N}=\frac{2000}{15000}=\frac{2}{15}$

P(Y=1)=0.3795 k=4, N-k=26, n=4 $\frac{k}{N}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

P(Y=1)=0.4190 k=2, N-k=13, n=4 $\frac{k}{N}=\frac{2}{15}$

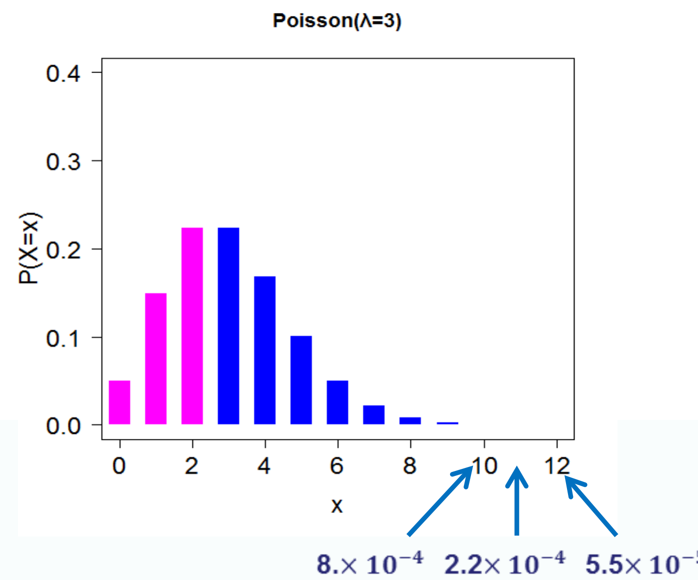
όσο μεγαλύτερος ο πληθυσμός τόσο πιο «κοντά» στην Διωνυμική βρίσκεται η Υπεργεωμετρική

(τις τιμές 3, 4 δεν τις παίρνει η τμ)

Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Πάτρα από μια σπάνια ασθένεια. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

α) να υπάρξουν το πολύ 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα

β) να υπάρξουν το πολύ 4 θάνατοι σε χρονικό διάστημα 2 μηνών



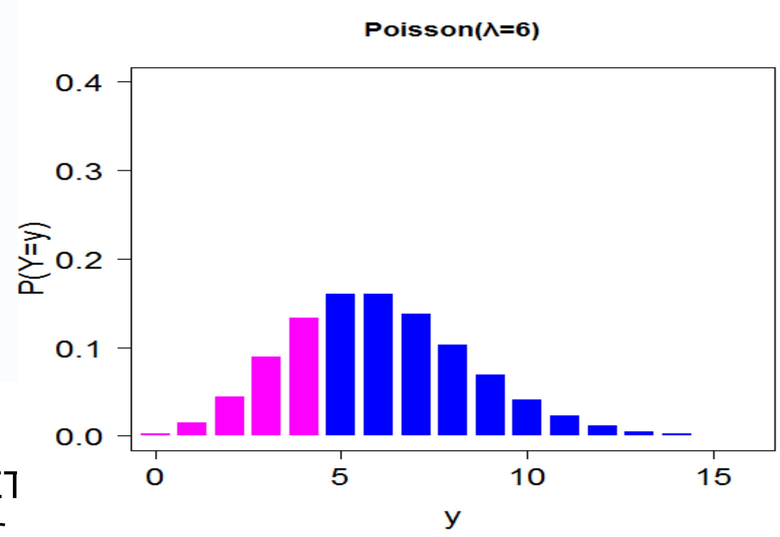
α) X: το πλήθος των θανάτων σε έναν μήνα

X~Poisson(λ=3)

με πιθανότητες $\mathbf{P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\quad x=0,1,\ldots,}$

P(X≤2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)= $e^{-3}+e^{-3}3+e^{-3}\frac{3^2}{2}=\mathbf{0.4232}$

β) Y: το πλήθος των θανάτων σε δύο μήνες

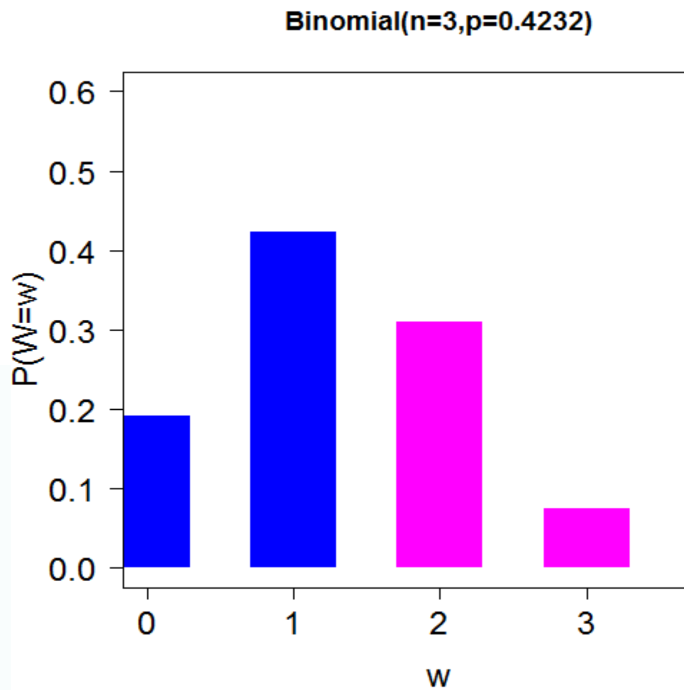


Y~Poisson(2λ=6)

P(Y≤4)=$\sum_{y=0}^{4} e^{-6}\frac{6^y}{y!}$**=0.2851**

Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Πάτρα από μια σπάνια ασθένεια. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

γ) να υπάρξουν 2 τουλάχιστον μήνες με 2 το πολύ θανάτους, στο επόμενο τρίμηνο.



γ) W: το πλήθος των μηνών από τους 3 επόμενους όπου ισχύει (X≤2)

W~Binomial(n=3,p=P(X ≤ 2)=0.4232)

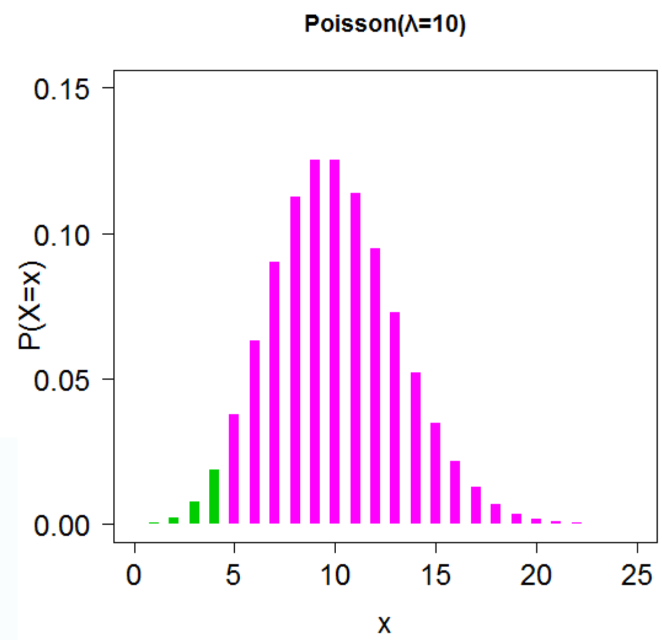
P(W ≥ 2)=P(W=2)+P(W=3)

$$= \binom{3}{2} 0.4232^2\, 0.5768 + \binom{3}{3} 0.4232 = 0.3857$$

• Ένας εντομολόγος μελετά τον αριθμό των ζωυφίων στα φύλλα ενός δένδρου. Παρατηρεί δε ότι κατά μέσο όρο εμφανίζονται 10 ζωύφια σε κάθε φύλλο.

i) Ποιά η πιθανότητα να πάρει ένα φύλλο με τουλάχιστον 5 ζωύφια

ii) Ποιά η πιθανότητα να πάρει τρία φύλλα από τα οποία τα 2 να έχουν τουλάχιστον 5 ζωύφια



i) X: το πλήθος των ζωυφίων σε ένα φύλλο

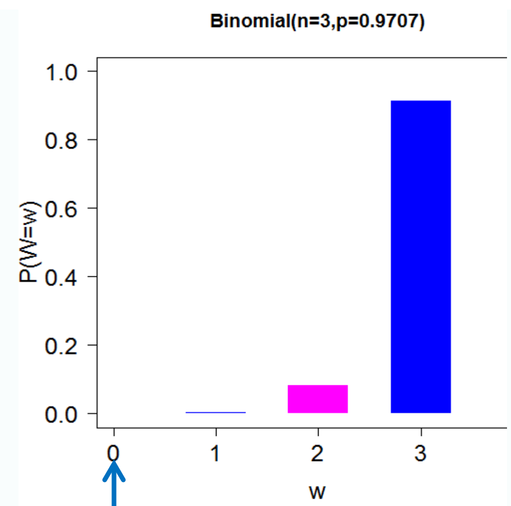
X~Poisson(λ=10)

P(X≥5)=P(X=5)+P(X=6)+… $= \sum_{x=5}^{\infty} e^{-10}\frac{10^x}{x!}$

=1- P(X<5) =1- (P(X=0)+P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)+P(X=4))

=1- ($e^{-10} + e^{-10}10 + e^{-10}\frac{10^2}{2} + e^{-10}\frac{10^3}{6} + e^{-10}\frac{10^4}{24}$)

=1-0.0293=0.9707



ii) W: το πλήθος των φύλλων από τρία που εξετάζονται για το εάν ισχύει (X≥5)

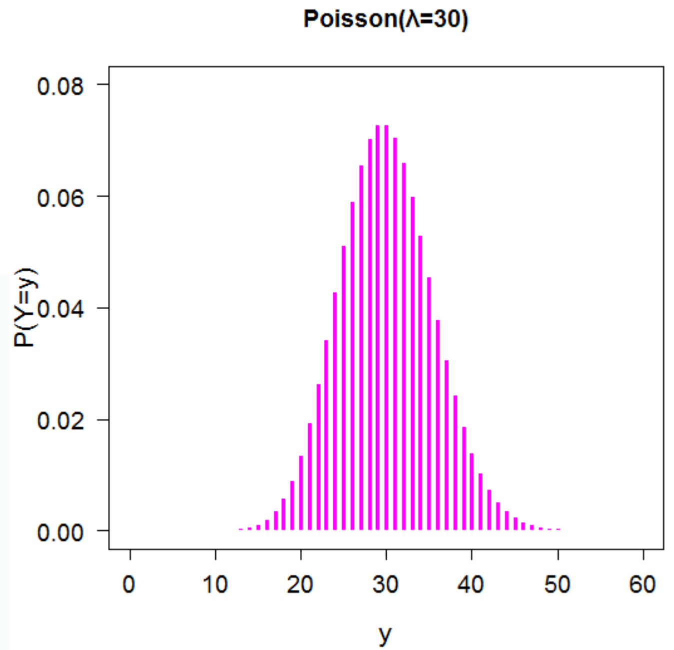
W~Binomial(n=3,p=P(X ≥ 5)=0.9707)

P(W = 2)=$\binom{3}{2} 0.9707^2\, 0.0293 = 0.0827$

(P(W=0)=2.5$\times 10^{-5}$)

• Ένας εντομολόγος μελετά τον αριθμό των ζωυφίων στα φύλλα ενός δένδρου. Παρατηρεί δε ότι κατά μέσο όρο εμφανίζονται 10 ζωύφια σε κάθε φύλλο.

iii) Ποιά η πιθανότητα στα τρία φύλλα να υπάρχουν συνολικά 12 τουλάχιστον ζωύφια



iii) Y: το πλήθος των ζωυφίων σε τρία φύλλα

Y~Poisson(3λ=30)

$P(Y\geq 12)=P(Y=12)+P(Y=13)+\ldots = \sum_{y=12}^{\infty} e^{-30}\frac{30^y}{y!}$

$=1-P(Y<12)=1-P(Y\leq 11)=1-(P(Y=0)+P(Y=1)+\ldots+P(Y=11))$

$=1-\left(e^{-30}+\ldots+e^{-30}\frac{30^{11}}{11!}\right)$

$=1-6.4\times 10^{-5}=0.999936\approx 1$

Οι δυσκολίες σε αυτόν τον αριθμητικό υπολογισμό οφείλονται

α) στη μεγάλη τιμή της παραμέτρου της κατανομής Poisson, που είναι 30

β) στους 12 όρους που πρέπει να υπολογιστούν

Εδώ, ισχύουν οι προϋποθέσεις για να γίνει προσέγγιση της όποιας ζητούμενης πιθανότητας από την κανονική κατανομή, χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα.

(Να γίνει σύγκριση της γραφικής παράστασης των πιθανοτήτων με αυτήν της σελ.5 για την Poisson(10))

Σε κατάστημα καταφθάνουν 20 πελάτες την ώρα
Ποια η πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων

α) να είναι μικρότερος από 3 λεπτά

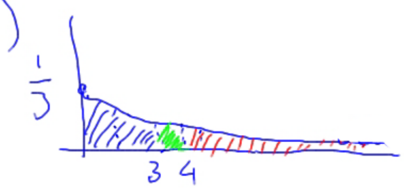
β) —"— μεγαλύτερος από 4 λεπτά

Αφίξεις ανά ώρα $\Rightarrow$ αφίξεις ανά λεπτό ώστε να έχω κοινή μονάδα χρόνου;

Πλήθος αφίξεων / λεπτό $\sim$ Poisson $\left(\theta = 20/60 = \frac{1}{3}\right)$

δεν είναι απαραίτητα ακέραιος

X = χρόνος ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις είναι Εκθ $\left(\theta = \frac{1}{3}\right)$



$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \quad x > 0$

$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{3}}$

α. $P(X<3) \overset{\text{συνεχής}}{=} P(X \le 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} \frac{1}{3} e^{-x/3}\,dx$

$= F(3) = 1 - e^{-1} = 0.6321$

β. $P(X>4) = \int_{4}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4)$

$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right) = e^{-4/3} = 0.2635$

Ο δείκτης IQ σε μια ομάδα ανθρώπων προσεγγίζεται καλά από την κανονική κατανομή με $\mu=105$ και $\sigma=20$. Ποιό ποσοστό ανθρώπων έχει IQ

i) τουλάχιστον 50;

ii) το πολύ 80;

iii) ανάμεσα σε 95 και 125;

X: IQ $\qquad X \sim N(\mu=105,\ \sigma^2=20^2)$

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-105}{20}\sim N(0,1)$$ κάνω τυποποίηση

i) $$P(X\geq 50)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{50-105}{20}\right)=P\left(Z\geq\frac{-55}{20}=-2.75\right)$$

είτε $$=1-P(Z<-2.75)=1-\Phi(-2.75)$$

$$=1-(1-\Phi(2.75))=\Phi(2.75)$$

είτε λόγω συμμετρίας $$=P(Z\leq 2.75)=\Phi(2.75)$$

$$\doteq 0.9970$$

ii) $P(X \leq 80) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{80-105}{20}\right) = P\left(Z \leq -\frac{25}{20} = -1.25\right)$

$= \Phi(-1.25) \underset{\text{συμμ}}{=} 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944$

$= 0.1036$

iii) $P(95 \leq X \leq 125) = P\left(\frac{95-105}{20} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{125-105}{20}\right)$

$= P(-0.5 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.5)$

$= \Phi(1) - (1 - \Phi(0.5)) = \Phi(1) + \Phi(0.5) - 1$

$= 0.841 + 0.691 - 1 = 0.532$