«Τυχερά» Παίγνια

PANOPLY VASE ANIMATION PROJECT

[αναπαράσταση]

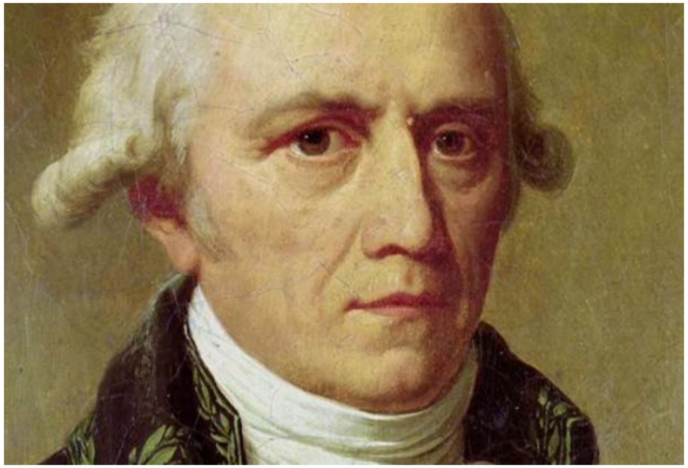
O **αμφορέας του Εξηκία** που φιλοξενείται στα Μουσεία του Βατικανού στη Ρώμη

540-530 π.Χ.

Από το στόμα τους διαβάζουμε τι έριξαν: Ο Αχιλλέας τέσσερα, ο Αίαντας τρία.

Athena appears between the players in a high percentage of the Achilles-Ajax scenes. The vase on the left is a *hydria* by a painter from the influential Leagros Group. The version on the right is a narrower *lekythos* vase. In both instances, Athena wears her characteristic aegis cloak and her flesh is picked out in white paint - a common way of depicting females on black figure vases. Athena was thought to have taken a keen interest in the Greek heroes at Troy, and this is reflected in the vase-makers' decision to include her in this scene.

Κήθιον και ζάρια



;

Antoine Gombaud, chevalier de Méré

Pierre de Fermat

Να δειχθεί τι είναι πιο πιθανό: να φέρει κάποιος τουλάχιστον μία φορά έξι, όταν ρίξει τέσσερεις φορές ένα ζάρι ή να φέρει τουλάχιστον μία φορά εξάρες, όταν ρίξει εικοσιτέσσερεις φορές δύο ζάρια μαζί (τα ζάρια είναι δίκαια).

(αυτό το πρόβλημα ετέθει, περί το 1654, από τον Chevalier de Méré στον Pascal και η συζήτηση που ξεκίνησε ανάμεσα στον τελευταίο και τον Fermat, κατά πολλούς, συνετέλεσε στη θεμελίωση σημαντικών εννοιών για τη Θεωρία Πιθανοτήτων) έλυσαν το γενικότερο πρόβλημα διαίρεσης του στοιχήματος

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

• Πειράματα (τύχης)

– Παρατηρήσεις που μπορούν να επαναληφθούν πολλές φορές κάτω από τις ίδιες ή παρεμφερείς συνθήκες

• Προσδιορίσιμα (δυνατότητα πρόβλεψης με ακρίβεια)

Χρόνος εκλείψεων του Ηλίου

Διάστημα που διανύει σώμα κατά την πτώση λόγω της βαρύτητας

• Non-deterministic – Πειράματα τύχης (η φύση τους δεν επιτρέπει την ακριβή πρόβλεψη των αποτελεσμάτων)

Ρίψη νομίσματος

Φύλο νεογέννητου

Τιμή αγαθού σε συγκεκριμένη χρον. στιγμή

(ποιοτικά, ποσοτικά αποτελέσματα)

Απαρχές Τυχερά Παίγνια

Bernoulli (1654–1705)

De Moivre (1667–1754)

Pascal (1623–1662)

Fermat (1608–1665)

Laplace (1749–1827)

Δειγματικός Χώρος: το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος Ω

Στοιχειώδη Ενδεχόμενα: τα απλά (αδιαίρετα) αποτελέσματα

Ενδεχόμενο (σύνθετο): η ένωση στοιχειωδών ενδεχομένων οποιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ του δειγματικού χώρου

Πιθανότητα ενός Ενδεχομένου $E \subseteq \Omega$

• Εαν το E εμφανίστηκε σε N επαναλήψεις του πειράματος ν_N φορές τότε ο λόγος $\frac{\nu_N}{N}$ σχετική συχνότητα και καθώς το $N \to +\infty$ ο λόγος τείνει σε μια σταθερά $P(E)$ που την καλούμε πιθανότητα του ενδεχομένου E

$$P(E) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\nu_N}{N}$$ Von Mises

σταθερότητα των σχετικών συχνοτήτων σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος

• $$P(E) = \frac{\text{Αριθμός ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } E}{\text{Αριθμός ολικών (δυνατών) αποτελεσμάτων}}$$ Laplace

υπονοείται η υπόθεση του ισοπιθάνου των αποτελεσμάτων (στοιχειωδών ενδεχομένων)

Έστω ένα αμερόληπτο νόμισμα και συμβολίζουμε με
Δ: Διεθνή όψη του νομίσματος
Ε: Εθνική όψη του νομίσματος

Εάν έχουμε δύο διαδοχικές ρίψεις του νομίσματος, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τα εξής ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα

Ω={ (Δ,Δ), (Δ,Ε), (Ε,Δ), (Ε,Ε) }
(# 2^2 διατάξεις με επανάληψη των 2 ανά 2)

τότε P(να εμφανιστεί μία φορά η εθνική όψη)=2 / 4 =0.5

Κατά τη ρίψη ενός κύβου 2 φορές
A: ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το 4

B_1: οι αριθμοί είναι ≤ 4
B_2: —"— ≤ 3 $B_2 \subseteq B_1$

$A = B_1 - B_2$ $P(A) = P(B_1) - P(B_2)$

Ω={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
(# 6^2 διατάξεις με επανάληψη των 6 ανά 2)

τότε
P(ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το 4)=7/36

Δείτε επίσης σελ. 4

$P(B_1)=4*4/36$ $P(B_2)=3*3/36$

Ένα σύνολο ενδεχομένων του Ω, $\mathcal{A}$, ονομάζεται σ-Άλγεβρα εάν

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- εάν $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- εάν $A_i \in \mathcal{A}$ για $i = 1, 2, \ldots,$ $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Αξιωματική Θεμελίωση της πιθανότητας κατά Kolmogorov

- $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- $P(\Omega) = 1$
- έστω $A_i \in \mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ τότε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Ιδιότητες των πιθανοτήτων

- $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- $P(\emptyset) = 0$

$\Omega = \emptyset \cup \Omega \qquad \emptyset \cap \Omega = \emptyset$

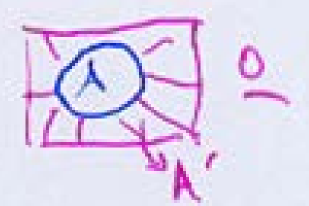
$P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) \Rightarrow 1 = P(\emptyset) + 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

- $P(A') = 1 - P(A)$ όπου $A' = \Omega \setminus A$

$\Omega = A \cup A' \qquad A \cap A' = \emptyset$

$P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow 1 = P(A) + P(A')$

$P(A') = 1 - P(A)$)

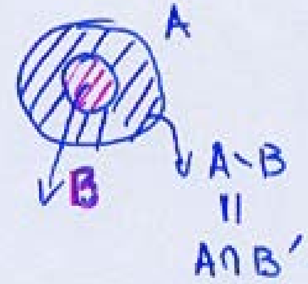


- εάν $B \subseteq A$ με $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $P(B) \leq P(A)$

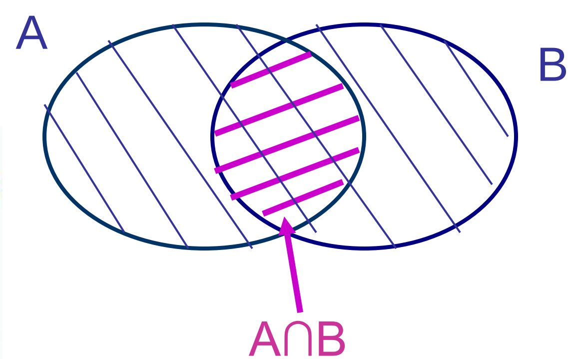
$$A = B \cup (B' \cap A) \qquad B \cap (B' \cap A) = \emptyset$$

$$P(A) = P(B) + P(B' \cap A) = P(B) + P(A \setminus B)$$

$$\Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$



- εάν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



• Έχουμε δύο τράπουλες και από την κάθε μια εξάγεται ένα τραπουλόχαρτο

A: ένας τουλάχιστον άσσος καρρό

A_1: άσσος καρρό από την τράπουλα 1

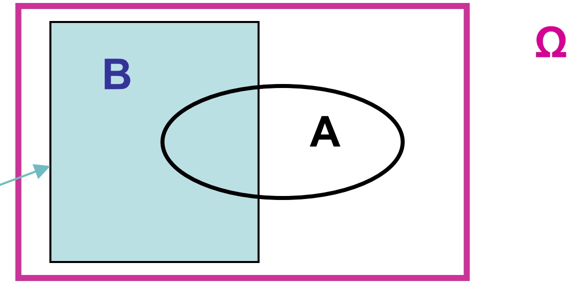
A_2: —"— τράπουλα 2

$A = A_1 \cup A_2$ $\qquad P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

P(A)=1/52+1/52-1/52x1/52

Ορισμός δεσμευμένης πιθανότητας

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



αλλάζω δειγματικό χώρο

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων Τα A, B είναι ανεξάρτητα εάν ισοδύναμα συμβαίνει κάτι από τα εξής:

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$

Για τις ανάγκες του, ένα εργαστήριο χρησιμοποιεί μια ομάδα από 22 ποντικούς με την εξής σύνθεση:

	Καφέ	Λευκοί	Μαύροι	Σύνολο
Αρσενικοί	3	4	5	12
Θηλυκοί	2	4	4	10
Σύνολο	5	8	9	22

Εαν επιλέξουμε στην τύχη ένα ποντίκι, ποια είναι η πιθανότητα

α. να επιλεγεί ένας καφέ θηλυκός ποντικός;

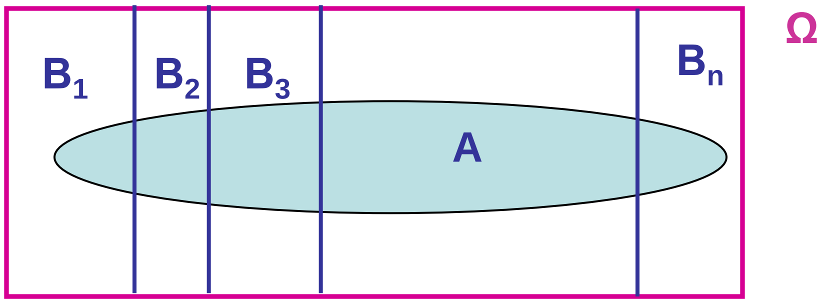
β. να επιλεγεί ένας θηλυκός ποντικός, όταν γνωρίζουμε ότι έχει καφέ χρώμα;

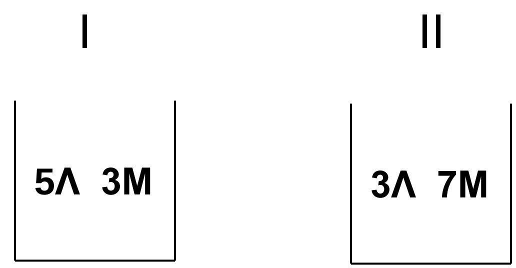
γ. να επιλεγεί ένας καφέ ποντικός, όταν γνωρίζουμε ότι είναι γένους θηλυκού;

α. 2/22
β. 2/5
γ. 2/10

▶ **Θεώρημα ολικής πιθανότητας** Έστω $B_1, B_2, \ldots, B_n$ με $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ και $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω τότε

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) \\
&= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)
\end{aligned}
$$





- Μια κάλπη Ι περιέχει 5 λευκές και 3 μαύρες σφαίρες
  άλλη κάλπη ΙΙ περιέχει 3 λευκές και 7 μαύρες
  Διαλέγουμε στην τύχη μια κάλπη και εξάγουμε μία σφαίρα
  A: η σφαίρα να είναι λευκή

P(A| Κάλπη Ι)=5/8 P(A| Κάλπη ΙΙ)=3/10

P(Κάλπη Ι)= P(Κάλπη ΙΙ)=1/2

P(A)= P(A| K I) P(K I)+ P(A| K II) P(K II)
=5/8x1/2+3/10x1/2=37/80=0.4625

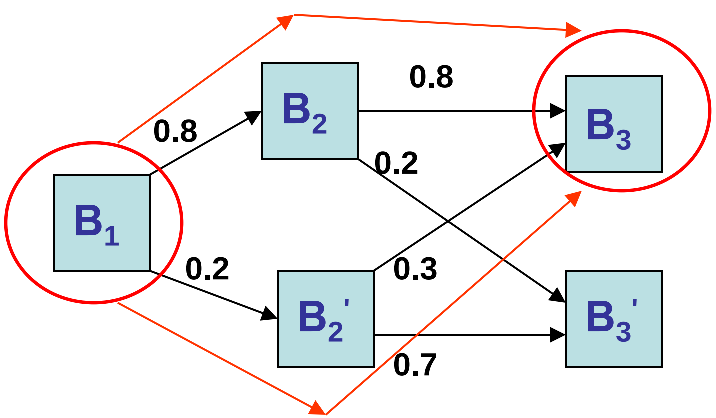
Η πιθανότητα να βρέξει μια μέρα είναι 0.8 αν είχε βρέξει την προηγούμενη και 0.3 αν δεν είχε βρέξει την προηγούμενη. Την πρώτη μέρα έβρεξε.

1. Ποιά η πιθανότητα να βρέξη την τρίτη μέρα
2. —— " —— την πέμπτη μέρα
3. Αν έβρεξε την πέμπτη μέρα ποιά η πιθανότητα να έβρεξε την τρίτη
4. Ποιά η πιθανότητα να βρέξη την τρίτη ή την πέμπτη μέρα

B_i : βροχερή η $i^{η}$ μέρα $\quad i=1,2,3$

$P(B_2 | B_1)=0.8$ άρα $P(B_2' | B_1)=0.2$

$P(B_2 | B_1')=0.3$ άρα $P(B_2' | B_1')=0.7$



$$P(B_3 | B_1)=P(B_3 \cap B_2 | B_1)+P(B_3 \cap B_2' | B_1)$$
$$= P(B_3|B_2)\,P(B_2|B_1)+P(B_3|B_2')\,P(B_2'|B_1)$$
$$=0.8 \times 0.8+0.3 \times 0.2=0.7$$

- Θεώρημα-Τύπος του Bayes Η εκ των υστέρων πιθανότητα

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$
$$=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)}$$

	Όταν Ασθενής	Όταν Υγιής
Test +	sensitivity 0.53	0.05
Test -	0.47	specificity 0.95
	1	1

P(Ασ)=0.08 άρα P(Υγ)=0.92

P(T+)=P(T+| Ασ) P(Ασ)+ P(T+| Υγ) P(Υγ)
=0.53x0.08+0.05x0.92=0.0884

P(Ασ|T+)= P(T+| Ασ) P(Ασ)/ P(T+)
= 0.53x0.08/ 0.0884=0.4796

Ένα τεστ για διαβήτη δίνει σωστά αποτελέσματα για το 53% των ανθρώπων που έχουν διαβήτη και σωστό στο 95% των ανθρώπων που δεν έχουν διαβήτη. Γνωρίζουμε ότι το 8% του πληθυσμού πάσχει από διαβήτη.

α. Ποια η πιθανότητα το άτομο να πάσχει από διαβήτη εάν το τεστ είναι θετικό;

β. Ποια η πιθανότητα το άτομο να μη πάσχει από διαβήτη εάν το τεστ είναι αρνητικό;

• Σε μια κάλπη έχουμε 500 λαχνούς και επιλέγεται ένας. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να διαιρείται ο αριθμός του λαχνού με το 3 ή το 5

A_1: διαιρείται με το 3

A_2: —''— το 5

$A_1 \cap A_2$: διαιρείται με το 3 και το 5 ⇒ διαιρείται 15

• Το "test Παπανικολάου" κάνει σωστή διάγνωση σε 95% των περιπτώσεων (δηλ. το test είναι θετικό με πιθανότητα 0,95 αν μια γυναίκα πράγματι πάσχει από καρκίνο κ' είναι αρνητικό με πιθανότητα 0.95 αν μια γυναίκα δεν έχει την ασθένεια)

Αν το test για μια κυρία είναι θετικό ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από την ασθένεια; Ποιά ερμηνεία έχει αυτό;

Το ποσοστό των γυναικών που πάσχουν από την ασθένεια είναι $\frac{5}{10.000}$.