Πράξεις με σύνολα

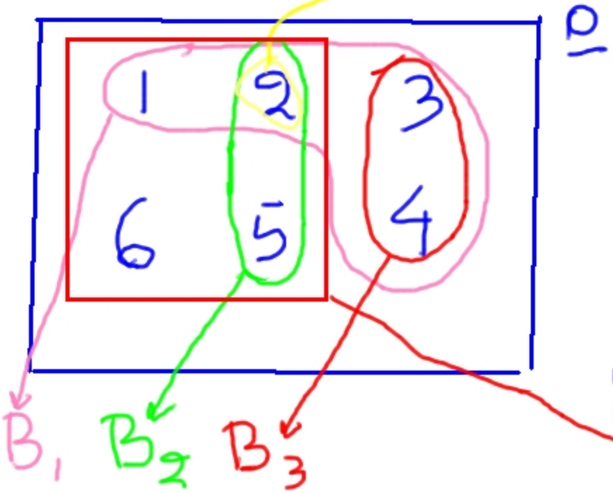
$B_1 = \{1,2,3,4\}$

$B_2 = \{2,5\}$

$B_3 = \{3,4\}$

Θεωρώ

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$



Παρατηρούμε ότι:

$B_3 \subseteq B_1 \Rightarrow B_1 \cap B_3 = B_3$

τα κοινά στοιχεία

$B_1 \cup B_3 = B_1$

όλα τα στοιχεία

$B_1 \setminus B_3 = B_1 \cap B_3' = \{1,2\}$

$B_1 \cap B_2 = \{2\}$ $\quad B_1 \cup B_2 = \{1,2,3,4,5\}$

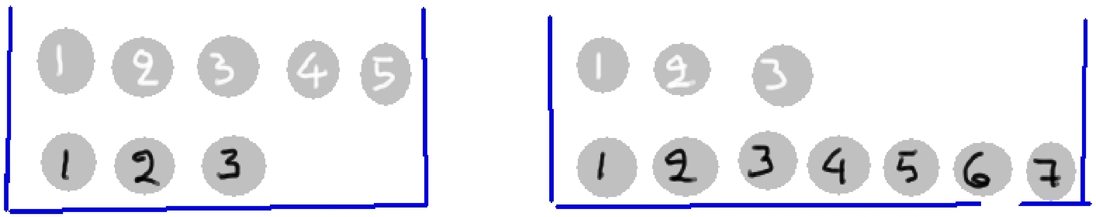
$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

$B_1 \setminus B_2 := B_1 \setminus (B_2 \cap B_1) = B_1 \cap B_2' = \{1,3,4\}$

όπου $\boxed{B_3'} = \Omega \setminus B_3 = \{1,2,5,6\}$, $B_2' = \Omega \setminus B_2 = \{1,3,4,6\}$

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε δύο κάλπες

Στο πρόβλημα με τις κάλπες, ας δούμε τον δειγματικό χώρο:



Κάλπη Ι
5Λ 3Μ

Κάλπη ΙΙ
3Λ 7Μ

$$\Omega = \{ I\Lambda_1, I\Lambda_2, I\Lambda_3, I\Lambda_4, I\Lambda_5, IM_1, IM_2, IM_3,$$
$$II\Lambda_1, II\Lambda_2, II\Lambda_3, IIM_1, IIM_2, IIM_3, IIM_4, IIM_5, IIM_6, IIM_7 \}$$

(οι σφαίρες θεωρούμε ότι είναι διακριτές)

Αν τα στοιχειώδη αυτά 18 ενδεχόμενα ήταν ισοπίθανα τότε:

$P(A) = P(\text{επιλογής λευκής σφαίρας}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ Laplace ορισμός

$P(\text{επιλέγω κάλπη I}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \neq P(\text{επιλέγω κάλπη II}) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

με χρήση ΘΟΠ $\boxed{P(A) = 37/80}$ Το ορθό αποτέλεσμα

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε δύο κάλπες (συνέχεια…)

Α: να επιλέξω λευκή σφαίρα

ΚΙ/Α: η επιλογή να έγινε από την Κάλπη Ι, όταν γνωρίζω ότι επέλεξα λευκή σφαίρα

ΚΙΙ/Α: αυτό είναι το συμπληρωματικό του προηγούμενου ενδεχομένου

$$P(KI/A) = \frac{P(A|KI)\,P(KI)}{P(A)}$$ τύπος Bayes

$$= \frac{\frac{5}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{37}{80}} = \frac{5 \times 8 \times 10}{8 \times 2 \times 37} = \frac{25}{37} = 0.6757 \neq P(KI)$$

Τα ενδεχόμενα: επιλογή κάλπης και επιλογή σφαίρας είναι εξαρτημένα.

Επίσης $P(KII/A) = 1 - 0.6757 < P(KI/A)$ επειδή $P(A|KII) < P(A|KI)$

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε τρεις κάλπες

I   II   III

1Μ 1Π   1Μ 2Π   2Μ 2Π

Η μαμά διαλέγει στην τύχη ένα καλάθι και στη συνέχεια από αυτό διαλέγει στην τύχη ένα φρούτο. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξει μήλο;

$$\Omega = \{(I\ M), (I\ \Pi), (II\ M), (II\ \Pi_1), (II\ \Pi_2), (III\ M_1), (III\ M_2), (III\ \Pi_1), (III\ \Pi_2)\}$$

$$P(I) = \frac{2}{9}, \quad P(II) = 3/9, \quad P(III) = 4/9 \quad ;;$$

P(M)=4/9 ;

Σφαίρες δύο χρωμάτων σε τρεις κάλπες (συνέχεια…)

$$P(M) = P(M|I)P(I) + P(M|II)P(II) + P(M|III)P(III)$$

διαλέγει στην τύχη $\quad P(I) = P(II) = P(III)$

και $\quad P(I) + P(II) + P(III) = 1$ $\Big\} \Rightarrow$

$$P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$$

$$P(M|I) = \frac{1}{2} \qquad P(M|II) = \frac{1}{3} \qquad P(M|III) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{8}{2 \times 9} = \frac{4}{9}$$

έτυχε!