Πανεπιστήμιο Πατρών — **Χάος και Φράκταλ**
Τμήμα Μαθηματικών — **Διδάσκων: Ι.Π. βαν ντερ Βέιλε**

Φύλλο για «Χάος και Φράκταλ»

«Χάος και Φράκταλ» είναι οι δυο βασικές έννοιες της Πολυπλοκότητας, στον χρόνο και στον χώρο αντίστοιχα.

Φράκταλ = οποιοδήποτε σύνολο το οποίο δείχνει αυτο-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας.

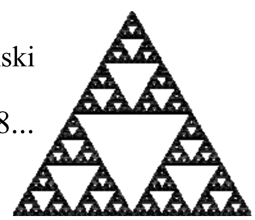
Δείκτης του φράκταλ είναι η διάσταση χωρητικότητας

$$D_c \;=\; \lim_{\ell \to 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln 1/\ell} \;,$$

όπου $N(\ell)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων μήκους ℓ που χρειάζεται για να καλυφθεί ολόκληρο το σύνολο. Η διάσταση D_c μπορεί να είναι ακέραια αλλά συνήθως είναι μη-ακέραια.

Τρυπητό του Sierpinski

$$D_c \;=\; \frac{\ln 3}{\ln 2} \;=\; 1{,}58...$$



Ακτή της Ισλανδίας

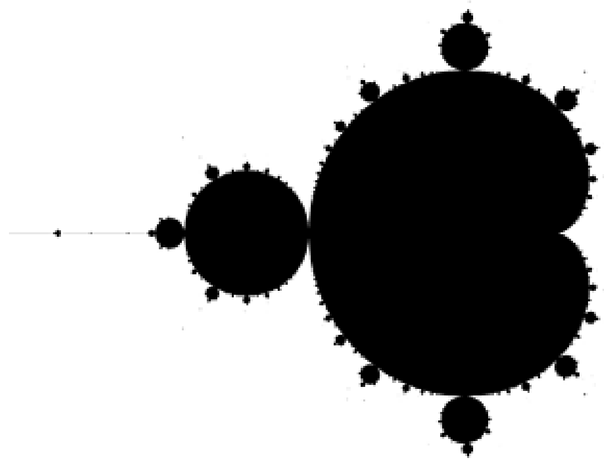
$$D_c \;=\; 1{,}26 \pm 0{,}03$$

Για ένα φράκταλ πολλών κλιμάκων α_i ($i = 1, .., K$), που εφαρμόζονται n_i φορές σε κάθε βήμα της κατασκευής του φράκταλ, η διάσταση D_c δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{i=1}^{K} n_i\, \alpha_i^{D_c} \;=\; 1$$

Η φτέρη του Barnsley (1987): Παράδειγμα ενός φράκταλ συνόλου που κατασκευάζεται εφαρμόζοντας επανειλημμένα ένα συγκεκριμένο αφινικό μετασχηματισμό σε κάποιο (οποιοδήποτε) αρχικό σχήμα.

Σύνολο Julia = το - συνήθως φράκταλ - σύνολο των σημείων που αποτελούν τα σύνορα μεταξύ των λεκανών έλξης των διάφορων ελκυστών μιας μιγαδικής απεικόνισης $z_{n+1} = f(z_n)$.



Το νησί του Mandelbrot (1979), το πιο διάσημο φράκταλ, είναι το σύνολο όλων των τιμών του c στο μιγαδικό επίπεδο για τις οποίες η απεικόνιση

$$z_{n+1} \;=\; z_n^2 + c\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

δεν στέλνει το σημείο $z_0 = 0$ στο άπειρο.

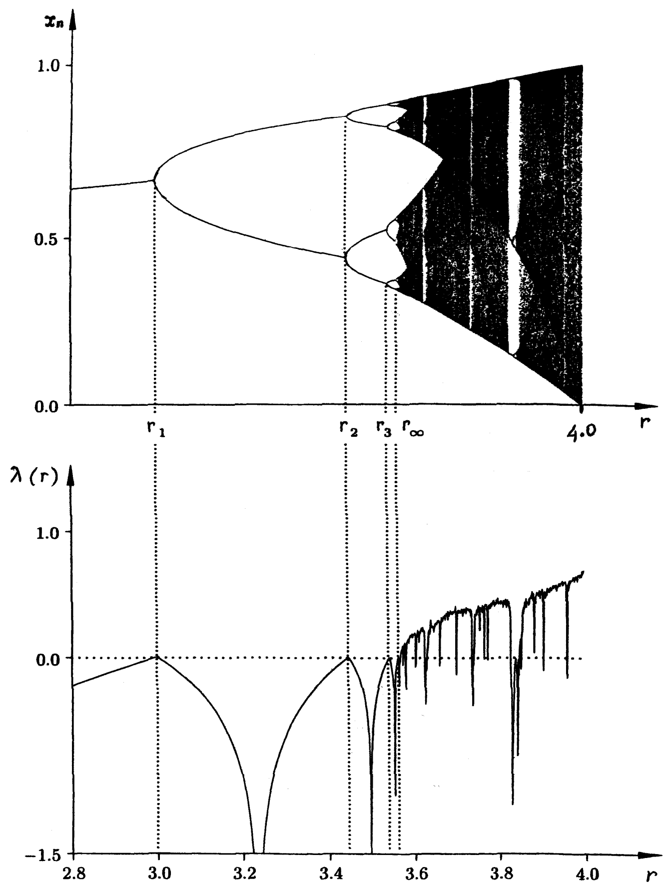
Χάος = απρόβλεπτη συμπεριφορά ενός (ντετερμινιστικού) δυναμικού συστήματος λόγω ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες.

Δυο τροχιές A και B (από το μετεωρολογικό μοντέλο του Lorenz, 1963) αρχίζοντας από *σχεδόν* την ίδια αρχική συνθήκη.

Δείκτης του χάους είναι ο <u>εκθέτης Liapunov</u> (λ): Δυο αρχικά σημεία, σε μικρή απόσταση $d(0)$, θα έχουν μετά από χρόνο t μια απόσταση

$$d(t) = d(0)\, e^{\lambda t}$$

μεταξύ τους. Εάν $\lambda \leq 0$ τότε η απόσταση δεν αυξάνεται: *δεν* υπάρχει δηλαδή ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και επικρατεί η τάξη. Εάν όμως $\lambda > 0$ τότε η απόσταση αυξάνεται ολοένα. Αυτό είναι το σήμα κατατεθέν του χάους. Σ’ αυτήν την περίπτωση, δεδομένου ότι δε γίνεται να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια τις αρχικές συνθήκες ενός πειράματος, η πρόβλεψή μας γίνεται όλο και πιο ασαφής.



Ακολουθία διπλασιασμού περιόδων = τρόπος μετάβασης από τάξη σε χάος μέσω διαδοχικών διακλαδώσεων στις οποίες η περιοδικότητα των τροχιών διπλασιάζεται κάθε φορά. Χαρακτηρίζεται από τις παγκόσμιες σταθερές του Feigenbaum δ = 4,6692.. και α = 2,5029.. .

Δίπλα βλέπουμε αυτή την ακολουθία για τη λογιστική απεικόνιση $x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$. Πάνω: το διάγραμμα διακλάδωσης, κάτω: ο εκθέτης Liapunov $\lambda(r)$.

Για 1D απεικονίσεις $x_{n+1} = f(x_n)$ βρίσκουμε τις τροχιές περιόδου N ως εξής:

$$f^{(N)}(x_1) = x_1$$

και το κριτήριο ευστάθειας της τροχιάς είναι:

$$\left| \frac{df}{dx}(x_1)\cdot\frac{df}{dx}(x_2)\cdot\ldots\cdot\frac{df}{dx}(x_N) \right| < 1.$$

Παράξενος ελκυστής (ή «πολύπλοκος ελκυστής») = ελκυστής με <u>φράκταλ</u> δομή και <u>χαοτική</u> δυναμική.

Ο παράξενος ελκυστής του Hénon (1976) είναι το ελκυστικό σύνολο της 2D απεικόνισης

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a\,x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = b\,x_n \end{cases}$$

για $a = 1.4$ και $b = 0.3$.