

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών

Βοηθητικές Σημειώσεις  
για το μάθημα

## Γεωμετρίες

Σοφία Ζαφειρίδου  
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Πάτρα 2022

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τις ανάγκες του μαθήματος Γεωμετρία. Με χαρά θα δεχτώ οποιοσδήποτε παρατηρήσεις επί του κειμένου ή διορθώσεις.

Σοφία Ζαφειρίδου (e-mail: [zafeirid@math.upatras.gr](mailto:zafeirid@math.upatras.gr))

# Περιεχόμενα

## Συμβολισμοί

$S_X$  – συμμετρική ομάδα του συνόλου  $X$ .

$S_n$  – συμμετρική ομάδα συνόλου με  $n$  στοιχεία.

$Ro_\phi$  – περιστροφή κατά τη γωνία  $\phi$  στο  $\mathbb{R}^2$  γύρω από την αρχή.

$Re_\phi$  – ανάκλαση στο  $\mathbb{R}^2$  από την ευθεία που διέρχεται από την αρχή και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\tan \phi$ .

$E(n)$  – ομάδα ισομετριών του  $\mathbb{R}^n$ .

$GL(n, \mathbb{R})$  – ομάδα των αντιστρέψιμων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ .

$SL(n, \mathbb{R})$  – ομάδα των αντιστρέψιμων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$  ορίζουσας 1.

$O(n, \mathbb{R})$  – ομάδα των ορθογώνιων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$

$SO(n, \mathbb{R})$  – ομάδα των ορθογώνιων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$  ορίζουσας 1.

$A(n)$  – ομάδα όλων των αφινικών μετασχηματισμών του  $\mathbb{R}^n$ .

$\mathbb{R}P^2$  – προβολικό επίπεδο (2-διαστατος προβολικός χώρος) πάνω στο  $\mathbb{R}$ .

# Κεφάλαιο 1

## Βασικές έννοιες.

### 1.1 Βασικά στοιχεία της θεωρίας ομάδων.

#### Ομάδα.

Ένα μη κενό σύνολο  $G$  εφοδιασμένο με μία πράξη  $\star : G \times G \rightarrow G$  με  $(a, b) \rightarrow a \star b$ , καλείται ομάδα, όταν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες

1. Προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιαδήποτε  $f, g, h \in G$  ισχύει:

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$$

2. Έπαρξη ουδετέρου στοιχείου: υπάρχει  $e \in G$  ώστε για κάθε  $g \in G$  να ισχύει

$$e \star g = g \star e = g$$

3. Έπαρξη συμμετρικού στοιχείου: για κάθε  $g \in G$  υπάρχει  $g^{-1} \in G$  τέτοιο ώστε

$$g^{-1} \star g = g \star g^{-1} = e.$$

Αν επιπλέον  $g \star h = h \star g$  για οποιαδήποτε  $g, h \in G$ , τότε η ομάδα  $G$  με την πράξη  $\star$  καλείται *αντιμεταθετική* ή *αβελιανή*.

#### Υποομάδες.

Έστω  $(G, \star)$  μια ομάδα και  $H \subseteq G$ ,  $H \neq \emptyset$ .

Ας υποθέσουμε ότι

(i) για κάθε  $h \in H$  το  $h^{-1}$  είναι στοιχείο του  $H$

(ii) για οποιαδήποτε  $h_1, h_2 \in H$  το  $h_1 \star h_2$  είναι στοιχείο του  $H$ .

Για  $h \in H$  από τις παραπάνω ιδιότητες (i) και (ii) συνεπάγεται ότι  $h \star h^{-1} = e \in H$ . Έρα, το ουδέτερο στοιχείο  $e$  της ομάδας  $G$  ανήκει στο  $H$ . Επομένως  $(H, \star)$  είναι ομάδα, η οποία καλείται *υποομάδα* της  $(G, \star)$ . Λέμε απλά ότι  $H$  είναι υποομάδα της ομάδας  $G$ .

Η υποομάδα  $H$  καλείται *γνήσια* αν  $H \neq G$  και  $H \neq \{e\}$ . Αποδεικνύεται ότι ένα υποσύνολο  $H$  μιας ομάδας  $G$  με πράξη  $\star$  είναι υποομάδα αν και μόνον αν  $h_1 \star h_2^{-1} \in H$  για κάθε  $h_1, h_2 \in H$ .

**Ομομορφισμοί ομάδων.**

**Ορισμός 1.1.1.** Έστω  $(G, \circ)$  και  $(H, *)$  δύο ομάδες.

Μιά απεικόνιση  $i : G \rightarrow H$  καλείται *ομομορφισμός*, όταν

$$i(g_1 \circ g_2) = i(g_1) * i(g_2), \forall g_1, \forall g_2 \in G.$$

Ένας ομομορφισμός  $i : G \rightarrow H$  καλείται

- (i) *μονομορφισμός*, όταν είναι 1-1
- (i) *επιμορφισμός*, όταν είναι επί
- (i) *ισομορφισμός*, όταν είναι 1-1 και επί

**Συμμετρική ομάδα ενός συνόλου.**

Έστω  $X$  ένα μη κενό σύνολο. Συμβολίζουμε

$$S_X = \{g : X \rightarrow X : g \text{ είναι 1-1 και επί}\}.$$

Το σύνολο  $S_X$  εφοδιασμένο με την πράξη σύνθεσης είναι ομάδα. Πράγματι, η ταυτοτική απεικόνιση  $\tau_X : X \rightarrow X$  είναι το ουδέτερο στοιχείο της  $S_X$  και για κάθε  $g \in S_X$ , το συμμετρικό στοιχείο είναι η απεικόνιση  $g^{-1}$ . Προφανώς,  $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ . Η ομάδα  $S_X$  καλείται *συμμετρική ομάδα του  $X$* .

**Παραδείγματα 1.1.2.**

1. Αν τα σύνολα  $X$  και  $Y$  έχουν τον ίδιο πληθάρημο, τότε οι συμμετρικές ομάδες  $S_X$  και  $S_Y$  είναι ισόμορφικές.  
(Αν  $h : X \rightarrow Y$  είναι 1-1 και επί, τότε  $i : S_X \rightarrow S_Y$  με  $i(f) = h \circ f \circ h^{-1}$  είναι ισομορφισμός.
2. Η συμμετρική ομάδα του  $\{1, \dots, n\}$  συμβολίζεται με  $S_n$ . Η  $S_n$  αποτελείται από  $n!$  στοιχεία είναι όλες οι μεταθέσεις του  $\{1, \dots, n\}$ .

**1.2 Μετρικός χώρος  $\mathbb{R}^n$ .**

Θεωρούμε το σύνολο  $\mathbb{R}^n$  όλων των διατεταγμένων  $n$ -αδων

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

πραγματικών αριθμών. Συμβολίζουμε

$$\bar{0}_n = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ορίζουμε την πρόσθεση στο  $\mathbb{R}^n$ , θέτοντας για  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό στοιχείου του  $\mathbb{R}^n$  επί πραγματικό αριθμό, θέτοντας για  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

Η τριάδα  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο  $\mathbb{R}$ .

Τα γραμμικώς ανεξάρτητα σημεία

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Για κάθε  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ισχύει:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n.$$

Αν  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , τότε η απόσταση  $d_n(\bar{x}, \bar{y})$  μεταξύ των  $\bar{x}$  και  $\bar{y}$  υπολογίζεται από τον τύπο

$$d_n(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Η απεικόνιση  $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μετρική.

Παρατηρούμε ότι

$$d_n(\bar{x}, \bar{y}) = d_n(\bar{x} - \bar{y}, \bar{0}_n).$$

Για κάθε  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  συμβολίζουμε  $\|\bar{x}\| = d_n(\bar{x}, \bar{0}_n)$ .

Τότε

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Για οποιαδήποτε  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$  έχουμε

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = d_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

**Πρόταση 1.2.1.** Από όλα τα διαφορίσιμα τόξα του επιπέδου  $R^2$  με άκρα τα σημεία  $A, B \in R^2$  το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  έχει το μικρότερο μήκος.

Απόδειξη. Έστω  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μια διαφορήσιμη παραμετροποιημένη καμπύλη με  $A = \vec{r}(a)$  και  $B = \vec{r}(b)$ . Τότε το μήκος της  $\vec{r}$  από το  $A$  έως το  $B$  είναι

$$\ell(A, B) = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

Έστω  $\vec{v}$  ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα και  $f(t) = \vec{r}'(t) \cdot \vec{v}$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Τότε

$$f'(t) = \vec{r}''(t) \cdot \vec{v} \implies \int_a^b (\vec{r}'(t) \cdot \vec{v}) dt = f(t)|_a^b = [\vec{r}(t) \cdot \vec{v}]_a^b = (\vec{B} - \vec{A}) \cdot \vec{v}$$

Συνεπώς

$$(\vec{B} - \vec{A}) \cdot \vec{v} = \int_a^b (\vec{r}'(t) \cdot \vec{v}) dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{r}'(t), \vec{v}}) dt \leq \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \ell(A, B).$$

Για  $\vec{v} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{|\vec{B} - \vec{A}|}$ , είναι  $(\vec{B} - \vec{A}) \cdot \vec{v} = |\vec{B} - \vec{A}| = |AB|$ . Άρα,  $|AB| \leq \ell(A, B)$ .

□

### 1.2.1 Απλός λόγος τριών συνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^3$ .

**Ορισμός 1.2.2.** Απλός λόγος  $(ABM)$  τριών συνευθειακών σημείων  $A, B, M$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι ο αριθμός  $\lambda$  για τον οποίο  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ .

Ο απλός λόγος των  $A, B, M$  συμβολίζεται επίσης με  $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$ .

Για κάθε  $N \in \mathbb{R}^3$  συμβολίζουμε με  $\vec{N}$  το διάνυσμα θέσης  $\overrightarrow{ON}$  του  $N$ .

**Θεώρημα 1.2.3.** Έστω  $A, B, M$  τρία συνευθειακά σημεία του  $\mathbb{R}^3$ .

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} \iff \vec{M} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{A} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{B}$$

**Θεώρημα 1.2.4.** Για κάθε σημείο  $M$  μιας ευθείας  $(AB)$  υπάρχει μοναδικό ζεύγος πραγματικών αριθμών  $(\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε

$$\vec{M} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \text{ και } \alpha + \beta = 1.$$

**Πόρισμα 1.2.5.** Έστω  $A, B, M$  τρία συνευθειακά σημεία του  $\mathbb{R}^3$ .

$$\vec{M} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \text{ και } \alpha + \beta = 1 \implies (ABM) = \beta/\alpha.$$

### 1.2.2 Διπλός λόγος τεσσάρων συνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^3$ .

**Ορισμός 1.2.6.** Διπλός λόγος  $(ABMN)$  τεσσάρων συνευθειακών σημείων  $A, B, M, N$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι ο αριθμός που ορίζεται ως εξής

$$(ABMN) = \frac{(ABM)}{(ABN)}.$$

**Πρόταση 1.2.7.** Έστω  $A, B, M, N$  τέσσερα συνευθειακά σημεία του  $\mathbb{R}^3$ .

$$\vec{M} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \text{ και } \vec{N} = \gamma \vec{A} + \delta \vec{B}, \text{ όπου } \alpha + \beta = 1 \text{ και } \gamma + \delta = 1 \implies (ABMN) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma}.$$

### 1.2.3 Συμμετρικά σχήματα στο $\mathbb{R}^3$ .

- Ένα σχήμα  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^3$  καλείται συμμετρικό ως προς το σημείο  $K \in \mathbb{R}^3$ , όταν για κάθε  $A \in \Sigma$  το σημείο  $A_K$  συμμετρικό του  $A$  ως προς το  $K$  ανήκει επίσης στο  $\Sigma$ .
- Ένα σχήμα  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^3$  καλείται συμμετρικό ως προς την ευθεία  $\varepsilon$  του  $\mathbb{R}^3$ , όταν για κάθε  $A \in \Sigma$  το σημείο  $A_\varepsilon$  συμμετρικό του  $A$  ως προς  $\varepsilon$  ανήκει επίσης στο  $\Sigma$ .
- Ένα σχήμα  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^3$  καλείται συμμετρικό ως προς το επίπεδο  $\Pi$  του  $\mathbb{R}^3$ , όταν για κάθε  $A \in \Sigma$  το σημείο  $A_\Pi$  συμμετρικό του  $A$  ως προς το  $\Pi$  ανήκει επίσης στο  $\Sigma$ .



### 1.3 Ορθογώνιοι πίνακες.

**Ορισμός 1.3.1.** Ο πίνακας  $\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$  καλείται ορθογώνιος αν:

- (i)  $c_{1k}^2 + c_{2k}^2 + \dots + c_{nk}^2 = 1$  για κάθε  $k = 1, \dots, n$
- (ii)  $c_{1k}c_{1j} + c_{2k}c_{2j} + \dots + c_{nk}c_{nj} = 0$ , αν  $k \neq j$ ,  $k, j = 1, \dots, n$ .

Το σύνολο όλων των ορθογώνιων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με  $O(n, \mathbb{R})$ .

**Θεώρημα 1.3.2.** Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1.  $C$  είναι ορθογώνιος
2.  $C^T C = E$
3.  $C^T = C^{-1}$
4.  $C^T$  είναι ορθογώνιος

**Θεώρημα 1.3.3.** Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα ισούται με  $\pm 1$ .

**Θεώρημα 1.3.4.** Το γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας και ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθογώνιος πίνακας.

**Θεώρημα 1.3.5.** Για κάθε ορθογώνιο πίνακα  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  υπάρχει μοναδικό  $\phi \in (-\pi, \pi]$  για το οποίο ο  $C$  έχει μία από τις μορφές:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}.$$

**Απόδειξη.** Ο  $C$  είναι ορθογώνιος, επομένως

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \tag{1.1}$$

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \tag{1.2}$$

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0 \tag{1.3}$$

Από την (1.1) έπεται ότι υπάρχει μοναδικό  $\phi \in (-\pi, \pi]$  τέτοιο ώστε  $c_{11} = \cos \phi$ ,  $c_{21} = \sin \phi$ . Η (1.3) γράφεται

$$c_{12} \cos \phi = -c_{22} \sin \phi \tag{1.4}$$

Υψώνοντας την (1.4) στο τετράγωνο και προσθέτοντας και στα δύο μέλη  $c_{12}^2 \sin^2 \phi$  παίρνουμε διαδοχικά:

$$c_{12}^2 \cos^2 \phi + c_{12}^2 \sin^2 \phi = c_{22}^2 \sin^2 \phi + c_{12}^2 \sin^2 \phi \implies c_{12}^2 = (c_{22}^2 + c_{12}^2) \sin^2 \phi.$$

Από την (1.2) και την τελευταία ισότητα παίρνουμε:  $c_{12}^2 = \sin^2 \phi$ . Συνεπώς

$$c_{12} = \sin \phi \text{ ή } c_{12} = -\sin \phi.$$

Τότε από την (1.4):  $c_{22} = -\cos \phi$  ή  $c_{22} = \cos \phi$ , αντίστοιχα.

## 1.4 Ασκήσεις

**1.4.1.** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο  $GL(n, \mathbb{R})$  όλων των αντιστρέψιμων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$  με πράξη πολλαπλασιασμού των πινάκων είναι μη αντιμεταθετική ομάδα.

**1.4.2.** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των πινάκων τις μορφής  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  με  $a^2 + b^2 = 1$  με πράξη πολλαπλασιασμού των πινάκων είναι αντιμεταθετική ομάδα.

**1.4.3.** Να αποδειχθεί ότι αν  $A = (x, y, z)$ , τότε

συμμετρικό του  $A$  ως προς την αρχή  $O = (0, 0, 0)$  είναι το  $A_O = (-x, -y, -z)$ .

συμμετρικό του  $A$  ως προς τον  $Ox$  είναι το  $A_{Ox} = (x, -y, -z)$ .

συμμετρικό του  $A$  ως προς το  $Oxy$  είναι το  $A_{Oxy} = (x, y, -z)$ .

**1.4.4.** Να βρεθούν τα σημεία συμμετρικά του  $A = (1, -4, -2)$  ως προς την αρχή των αξόνων, ως προς τον άξονα  $Oz$  και ως προς το επίπεδο  $Oxz$ .

**1.4.5.** Να αποδειχθεί ότι αν ένα σχήμα  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι συμμετρικό ως προς κάθε επίπεδο συντεταγμένων, τότε  $\Sigma$  είναι συμμετρικό ως προς κάθε άξονα συντεταγμένων.

## Κεφάλαιο 2

### Τι είναι Γεωμετρία;

#### 2.1 Αξιωματική μεθοδος.

Μια από της μεθόδους οικοδόμησης της Γεωμετρίας είναι η Αξιωματική Μέθοδος, που είναι και η βασικότερη μέθοδος των Μαθηματικών. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην εισαγωγή ενός αξιωματικού συστήματος, δηλαδή διατύπωση μερικών βασικών εννοιών και αξιωμάτων - προτάσεων που αποδέχονται ως αληθείς. Απόδειξη μιας πρότασης σε ένα αξιωματικό σύστημα θεωρείται μια αλυσίδα από προτάσεις που είτε είναι αξιώματα είτε κάποια πρόταση η αλήθεια της οποίας συνεπάγεται από τις προηγούμενες προτάσεις σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής που έχουν συμφωνηθεί.

##### 2.1.1 Τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη.

Κλασικό παράδειγμα της αξιωματικής μεθόδου οικοδόμησης μιας γεωμετρίας είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ο Ευκλείδης στα “Στοιχεία” του διατυπώνει τα πέντε αιτήματα-αξιώματα:

1. Για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία υπάρχει μοναδικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά.
2. Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκταθεί απεριόριστα και στις δύο κατευθύνσεις σε μια ευθεία.
3. Υπάρχει κύκλος με κέντρο οποιοδήποτε σημείο και με οποιαδήποτε ακτίνα.
4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες (μια γωνία καλείται ορθή, όταν είναι ίσοι με την παραπληρωματική της)
5. Αν μια ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει άλλες δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και το άθροισμα κάποιον εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι  $< 180^\circ$ , τότε  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται σε κάποιο σημείο, το οποίο βρίσκεται από την μεριά της  $\varepsilon$  που περιέχει τις γωνίες αυτές.

Το 1795 ο σκοτσέζος μαθηματικός και γεωγράφος John Playfair απέδειξε ότι ο 5<sup>ο</sup> αξίωμα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο γνωστό ως αξίωμα παραλληλίας:

- 5'. Από κάθε σημείο  $A$  έξω από μια ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται μοναδική ευθεία  $\varepsilon'$  παράλληλη στην  $\varepsilon$ .

### 2.1.2 Αξιοματική Θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Hilbert.

Ο Hilbert το 1899 βασιζόμενος στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη διατυπώνει νέο αξιωματικό σύστημα στην εργασία του “Grundlagen der Geometrie”. Ο Hilbert ταξινόμησε τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε 5 κατηγορίες:

- Αξιώματα πρόσπτωσης (θέσης).
- Αξιώματα διάταξης (ενδιαμεσότητας).
- Αξιώματα κίνησης (ισότητας).
- Αξιώματα της συνέχειας (του Dedekind).
- Αξίωμα της παραλληλίας (του Ευκλείδη).

### 2.1.3 Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Από την εποχή του Ευκλείδη πολλοί μαθηματικοί παρατήρησαν ότι η διατύπωση του 5ου αξιώματος δεν ήταν τόσο απλή όσο οι διατύπωση των άλλων αξιωμάτων και αναρωτήθηκαν μήπως το 5ο αξίωμα αποδεικνύεται από τα άλλα τέσσερα.

Αποδείχθηκε τελικά ότι το 5ο αίτημα δεν συνεπάγεται από τα πρώτα 4 αιτήματα.

Οι προσπάθειες να αποδειχθεί το 5<sup>ο</sup> αξίωμα υποθέτοντας ότι η άρνηση του οδηγεί σε άτοπο (με απαγωγή σε άτοπο) έχουν αποβεί άκαρπες, ως ότου από τα τέλη του 18ου έως τα μέσα του 19ου αιώνα οι μαθηματικοί παρατήρησαν ότι η άρνηση του 5ου αξιώματος μπορεί να οδηγήσει σε νέα Θεωρήματα μιας άλλης γεωμετρίας. Έτσι γεννήθηκαν οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.

Μερικοί από τους θεμελιωτές των μη Ευκλείδειων γεωμετριών είναι: Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1793-1856), Bolyai (1802-1860), Beltrami (1835-1899), Riemann (1826-1866).

Η άρνηση του 5ου αξιώματος σημαίνει ότι: Από κάποιο σημείο  $A$  έξω από μια ευθεία  $\varepsilon$  μπορεί

- (i) να μην διέρχεται καμιά ευθεία παράλληλη στην  $\varepsilon$ ,
- (ii) να διέρχονται τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες στην  $\varepsilon$ .

Αλλάζοντας ή απαλείφοντας πλήρως το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη και διατηρώντας τα πρώτα τέσσερα οδηγούμαστε σε νέες γεωμετρίες:

- Ελλειπτική Γεωμετρία θεμελιώνεται διατηρώντας τα πρώτα τέσσερα αιτήματα του Ευκλείδη και αντικαθιστώντας το 5ο με το εξής:  
(5<sub>ε</sub>) Κάθε ευθεία διερχόμενη από ένα σημείο  $A$  έξω από μια ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει την  $\varepsilon$ . (Δηλαδή, δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.)
- Υπερβολική Γεωμετρία θεμελιώνεται διατηρώντας τα πρώτα τέσσερα αιτήματα του Ευκλείδη και αντικαθιστώντας το 5ο με το εξής:  
(5<sub>υ</sub>) Από κάθε σημείο  $A$  έξω από μια ευθεία  $\varepsilon$  διέρχονται τουλάχιστον δύο ευθείες που δεν τέμνουν την  $\varepsilon$ . (Δηλαδή, υπάρχουν τουλάχιστον δύο παράλληλες ευθείες)
- Ουδέτερη (ή Απόλυτη) Γεωμετρία θεμελιώνεται διατηρώντας τα πρώτα τέσσερα αιτήματα του Ευκλείδη και καταργώντας πλήρως το 5ο αίτημα της παραλληλίας.

## 2.2 Ορισμός της Γεωμετρίας κατά Klein.

**Ορισμός ίσων σχημάτων στο Γυμνάσιο.** Δύο ευθύγραμμα σχήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  λέγονται ίσα, αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.

Όταν δύο τρίγωνα  $T_1$  και  $T_2$  ενός επιπέδου  $\Pi$  είναι ίσα, τότε συνδυάζοντας την περιστροφή του επιπέδου γύρω από κάποια κορυφή του ενός τριγώνου με μια μετατόπιση όλων των σημείων του επιπέδου κατά το ίδιο διάνυσμα, το ένα τρίγωνο θα συμπίπτει με το άλλο. Ήρα, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση  $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi$ , η οποία διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων, τέτοια ώστε  $\varphi(T_1) = T_2$ .

**Πρόγραμμα του Erlangen.** Το πρόγραμμα του Erlangen (Erlangen program) είναι η πρόταση του F. Klein για τον τρόπο ταξινόμησης των γεωμετριών, το οποίο έχει διατυπωθεί στην ομιλία του το 1872 στο Πανεπιστήμιο του Erlangen. Σύμφωνα με τον Klein για να ορίσουμε μια γεωμετρία σε ένα σύνολο  $X$  αρκεί να επιλέξουμε μια ομάδα μετασχηματισμών  $G$  του  $X$  ( $G$  αποτελείται από 1-1 και επί αυτοαπεικονίσεις του  $X$ ). Ο κύριος στόχος της μελέτης της γεωμετρίας που θα οριστεί είναι η εύρεση των ιδιοτήτων των σχημάτων (υποσυνόλων) του  $X$  που παραμένουν αναλλοίωτες (δεν αλλάζουν) στους μετασχηματισμούς  $g \in G$ .

**Ορισμός της Γεωμετρίας κατά Klein.** Καλούμε γεωμετρία κάθε ζεύγος  $(X, G)$ , όπου  $X$  ένα μη κενό σύνολο και  $G$  ένα μη κενό σύνολο 1-1 και επί αυτοαπεικονίσεων του  $X$  με τις εξής ιδιότητες:

- (i) για κάθε  $g, h \in G$  η σύνθεση  $g \circ h$  είναι στοιχείο της  $G$ ,
- (ii) για κάθε  $g \in G$  η αντίστροφη απεικόνιση  $g^{-1}$  είναι στοιχείο της  $G$ .

Από τις ιδιότητες (i) και (ii) προκύπτει ότι η ταυτοτική απεικόνιση  $\tau_X = g \circ g^{-1}$  είναι στοιχείο της  $G$ . Επειδή η σύνθεση των απεικονίσεων έχει προσαυτεριστική ιδιότητα, προκύπτουν οι ακόλουθοι ισοδύναμοι ορισμοί της γεωμετρίας

1. Κάθε ζεύγος  $(X, G)$ , όπου  $X$  είναι ένα μη κενό σύνολο και  $G$  είναι μια ομάδα 1-1 και επί αυτοαπεικονίσεων του  $X$  με πράξη σύνθεσης των απεικονίσεων, καλείται γεωμετρία.
2. Κάθε ζεύγος  $(X, G)$ , όπου  $X$  είναι ένα σύνολο και  $G$  μια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας  $S_X$  του  $X$ , καλείται γεωμετρία.

### Παραδείγματα 2.2.1.

1. Έστω  $X$  ένα μη κενό σύνολο,  $\tau_X$  ταυτοτική απεικόνιση του  $X$ .  
Η μικρότερη γεωμετρία του  $X$  είναι η  $(X, \{\tau_X\})$  και η μεγαλύτερη  $(X, S_X)$ .
2. Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $H$  η ομάδα όλων των ομοιομορφισμών του  $X$  επί του  $X$ . Τότε  $(X, H)$  είναι γεωμετρία.
3. Έστω  $\triangle ABC$  ένα ισόπλευρο τρίγωνο του επιπέδου και  $X = \{A, B, C\}$ . Τότε

$$S_X = \left\{ \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix} \right\}$$

παρατηρούμε ότι  $\begin{pmatrix} A B C \\ A B C \end{pmatrix}$  είναι η ταυτοτική,  $\begin{pmatrix} A B C \\ B C A \end{pmatrix}$  προκύπτει από την περιστροφή  $g_1$  του τριγώνου γύρω από το κέντρο του τριγώνου κατά θετική φορά κατά τη γωνία  $240^\circ$ ,  $\begin{pmatrix} A B C \\ C A B \end{pmatrix}$  προκύπτει από την περιστροφή  $g_2$  του τριγώνου γύρω από το κέντρο του τριγώνου κατά θετική φορά κατά τη γωνία  $120^\circ$ . Παρατηρούμε ότι  $g_2 = g_1^{-1}$ .

Τα υπόλοιπα στοιχεία της  $S_X$  αντιστοιχούν στις ανακλάσεις  $g_3, g_4, g_5$  του τριγώνου από τους άξονες συμμετρίας του τριγώνου που διέρχονται από τα σημεία  $A, B, C$ , αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι  $g_i = g_i^{-1}$  για  $i = 3, 4, 5$ .

4. Έστω  $G = \{\tau_X, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ , όπου οι μετασχηματισμοί  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  είναι του προηγούμενου παραδείγματος. Τότε  $(\triangle ABC, G)$  είναι γεωμετρία. Παρατηρούμε ότι η  $G$  αποτελείται από ισομετρίες του  $\triangle ABC$ .

Έστω  $(X, G)$  μια γεωμετρία.

- Τα στοιχεία της ομάδας  $G$  καλούνται *μετασχηματισμοί*.
- Κάθε υποσύνολο  $A$  του  $X$  καλείται *σχήμα* της  $(X, G)$ .
- Το σχήμα  $A$  της  $(X, G)$  καλείται *ισοδύναμο* (ίσο, όμοιο) με το σχήμα  $B$  της  $(X, G)$ , όταν υπάρχει μετασχηματισμός  $g \in G$  τέτοιος ώστε  $g(A) = B$ . Γράφουμε τότε  $A \sim B$ . Προφανώς  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας. Οπότε τα σχήματα της  $(X, G)$  χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ισοδύναμων σχημάτων.

### Παραδείγματα 2.2.2.

1. Στη γεωμετρία  $(X, S_X)$  οποιαδήποτε σχήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  για τα οποία υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  είναι ισοδύναμα.

Πράγματι, επειδή  $|\Sigma_1| = |\Sigma_2|$  υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση  $g : \Sigma_2 \setminus \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$ . Ορίζουμε  $F : X \rightarrow X$  με

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1 \\ g^{-1}(x), & x \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2 \\ x, & x \in X \setminus (\Sigma_2 \setminus \Sigma_1) \setminus (\Sigma_1 \setminus \Sigma_2). \end{cases}$$

2. Αποδεικνύεται ότι για κάθε τρίγωνο  $T$  και για κάθε κύκλο  $C$  του  $\mathbb{R}^2$  υπάρχει ομοιομορφισμός  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  για τον οποίον  $h(T) = C$ . Επομένως το τρίγωνο και ο κύκλος είναι ισοδύναμα σχήματα στη γεωμετρία  $(\mathbb{R}^2, H)$ , όπου  $H$  είναι η ομάδα των αυτοομοιομορφισμών του  $\mathbb{R}^2$ .

**Αναλλοίωτες μιας γεωμετρίας.**

Ο κύριος στόχος της μελέτης μιας γεωμετρίας  $(X, G)$  είναι ο προσδιορισμός εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων της που διατηρούνται από τις απεικονίσεις  $g : X \rightarrow X$  για κάθε  $g \in G$ . Δηλαδή, αν κάποιο σχήμα  $\Sigma$  έχει μια ιδιότητα  $\mathcal{P}$ , τότε και το σχήμα  $g(\Sigma)$  έχει την ιδιότητα  $\mathcal{P}$ .

Ένας γενικός ορισμός της έννοιας της αναλλοίωτης είναι ο παρακάτω.

**Ορισμός 2.2.3.** Έστω ότι  $(X, G)$  είναι μια γεωμετρία,  $\mathcal{S}$  ένα μη κενό σύνολο σχημάτων της  $(X, G)$ .

1. Το σύνολο  $\mathcal{S}$  καλείται *αναλλοίωτο* της  $(X, G)$ , όταν για κάθε  $\Sigma \in \mathcal{S}$  και για κάθε  $g \in G$  ισχύει ότι  $g(\Sigma) \in \mathcal{S}$ .
2. Μια απεικόνιση  $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow Y$ , όπου  $Y$  ένα μη κενό σύνολο καλείται *αναλλοίωτη* του συνόλου  $\mathcal{S}$  ως προς την  $(X, G)$ , όταν  $g(\Sigma) \in \mathcal{S}$  και  $\alpha(\Sigma) = \alpha(g(\Sigma))$ , για κάθε  $\Sigma \in \mathcal{S}$  και για κάθε  $g \in G$ .

## 2.3 Ομάδες μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ και οι αντίστοιχες γεωμετρίες.

### 2.3.1 Ομάδα ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ .

**Ορισμός 2.3.1.** Μια απεικόνιση  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  καλείται *ισομετρία* όταν

$$\|F(\bar{a}) - F(\bar{b})\| = \|\bar{a} - \bar{b}\|, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^n.$$

Το σύνολο όλων των ισομετριών του  $\mathbb{R}^n$  συμβολίζεται με  $E(n)$ .

Τα στοιχεία του  $E(n)$  καλούνται επίσης *Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί*.

**Θεώρημα 2.3.2.** Κάθε ισομετρία του  $\mathbb{R}^n$  είναι 1-1 και επί.

*Απόδειξη.* Αν  $\bar{a} \neq \bar{b}$ , τότε  $\|\bar{a} - \bar{b}\| > 0$ . Επειδή  $\|F(\bar{a}) - F(\bar{b})\| = \|\bar{a} - \bar{b}\|$ , έπεται ότι  $\|F(\bar{a}) - F(\bar{b})\| > 0$ . Άρα,  $F(\bar{a}) \neq F(\bar{b})$ .

Αποδεικνύεται ότι για κάθε ισομετρία  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  υπάρχει ορθογώνιος  $n \times n$  πίνακας  $C$

$$\text{και } \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ τέτοια ώστε } F(\bar{x}) = C\bar{x} + \bar{a} \text{ για κάθε } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \text{ Άρα, αν}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ τότε } \bar{y} = F(\bar{x}), \text{ όπου } \bar{x} = C^{-1}(\bar{y} - \bar{a}). \quad \square$$

Εύκολα αποδεικνύεται το παρακάτω Θεώρημα.

**Θεώρημα 2.3.3.** Το σύνολο ισομετριών  $E(n)$  του  $\mathbb{R}^n$  εφοδιασμένο με την πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

**Ορισμός 2.3.4.** Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^n, E(n))$  καλείται *Ευκλείδεια γεωμετρία* του  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3.2 Η αντιμεταθετική ομάδα μεταφορών του $\mathbb{R}^n$ .

Για κάθε  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ , η απεικόνιση  $T_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ορίζεται από τον τύπο  $T_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}$  καλείται μεταφορά κατά διάνυσμα  $\bar{a}$ .

**Θεώρημα 2.3.5.** Το σύνολο μεταφορών  $T(n) = \{T_{\bar{a}} : \bar{a} \in \mathbb{R}^n\}$  εφοδιασμένο με την πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι αντιμεταθετική ομάδα.

*Απόδειξη.* Η ταυτοτική απεικόνιση  $id_X \equiv T_{\bar{0}} : X \rightarrow X$  είναι το ουδέτερο στοιχείο της  $T$  και για κάθε  $T_{\bar{a}}$ , το αντίστροφο στοιχείο είναι η μεταφορά  $T_{-\bar{a}}$ .

Οι σύνθεση δύο μεταφορών είναι μεταφορά. Πράγματι,

$$(T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}})(P) = T_{\bar{a}}(T_{\bar{b}}(P)) = T_{\bar{a}}(P + \bar{b}) = P + \bar{b} + \bar{a} = T_{\bar{b} + \bar{a}}.$$

Επειδή οι σύνθεση απεικονίσεων είναι προσαπτεριστική,  $(T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}}) \circ T_{\bar{c}} = T_{\bar{a}} \circ (T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{c}})$ . Επίσης  $T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}} = T_{\bar{b} + \bar{a}} = T_{\bar{a} + \bar{b}} = T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}}$ . □

Η αντιμεταθετική ομάδα  $(T(n), \circ)$  καλείται ομάδα μεταφορών του  $\mathbb{R}^n$ .

Επειδή κάθε μεταφορά είναι 1-1 και επί, από τον ορισμο της γεωμετρίας, το ζεύγος  $(\mathbb{R}^n, T(n))$  είναι γεωμετρία.

**Πρόταση 2.3.6.** Κάθε μεταφορά είναι ισομετρία.

*Απόδειξη.* Έστω  $T_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  μεταφορά κατά διάνυσμα  $\bar{a}$ . Τότε για οποιαδήποτε  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|T_{\bar{a}}(\bar{x}) - T_{\bar{a}}(\bar{y})\| = \|(\bar{x} + \bar{a}) - (\bar{y} + \bar{a})\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$
□

### 2.3.3 Ομάδα αφινικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ .

Συμβολίζουμε με  $GL(n, \mathbb{R})$  την ομάδα αντιστρέψιμων  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$  με πράξη πολλαπλασιασμού των πινάκων.

**Ορισμός 2.3.7.** Αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^n$  είναι μια απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ορίζεται ως εξής

$$f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a},$$

όπου  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  και  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ .

Το σύνολο όλων των αφινικών μετασχηματισμών του  $\mathbb{R}^n$  συμβολίζεται με  $A(n)$ .

**Θεώρημα 2.3.8.** Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^n, A(n))$  είναι γεωμετρία.

*Απόδειξη.* Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε αφινικός μετασχηματισμός είναι 1-1.

Θα δείξουμε ότι κάθε αφινικός μετασχηματισμός είναι επί.

Έστω  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a} \in A(n)$  και  $\bar{v}' \in \mathbb{R}^n$ .

$$\bar{v}' = A\bar{v} + \bar{a} \implies \bar{v} = A^{-1}\bar{v}' - A^{-1}\bar{a} \implies \bar{v}' = f(A^{-1}\bar{v}' - A^{-1}\bar{a}).$$



Η σύνθεση αφινικών μετασχηματισμών  $f_1(\bar{v}) = A_1\bar{v} + \bar{a}_1$  και  $f_2(\bar{v}) = A_2\bar{v} + \bar{a}_2$  είναι αφινικός μετασχηματισμός:

$$(f_2 \circ f_1)(\bar{v}) = f_2(f_1(\bar{v})) = f_2(A_1\bar{v} + \bar{a}_1) = A_2(A_1\bar{v} + \bar{a}_1) + \bar{a}_2 = (A_2A_1)\bar{v} + (A_2\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$$

θέτοντας  $A = A_2A_1$  και  $\bar{a} = A_2\bar{a}_1 + \bar{a}_2$ , παίρνουμε  $(f_2 \circ f_1)(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$ , όπου  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  και  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ .

Από τα παραπάνω, αν  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a} \in A(n)$ , τότε  $f^{-1}(\bar{v}) = A'\bar{v} + \bar{a}'$ , όπου  $A' = A^{-1}$  και  $\bar{a}' = -A^{-1}\bar{a}$ . Άρα,  $f^{-1} \in A(n)$ .

Συνεπώς από τον ορισμό της γεωμετρίας το ζεύγος  $(\mathbb{R}^n, A(n))$  είναι γεωμετρία. □

**Ορισμός 2.3.9.** Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^n, A(n))$  καλείται *αφινική γεωμετρία*.

## 2.4 Ασκήσεις

**2.4.1.** Αν  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  και  $\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ , να βρεθούν οι εικόνες μέσω του αφινικού μετασχηματισμού  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$  των σημείων:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

**2.4.2.** Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω μετασχηματισμοί  $t_1, t_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι αφινικοί και να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός  $t$  που είναι η σύνθεση  $t_1 \circ t_2$ :

$$t_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**2.4.3.** Δίνονται μετασχηματισμοί του  $\mathbb{R}^2$ :  $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ και } h(x, y) = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(α') Να προσδιοριστεί ποιοί από παραπάνω μετασχηματισμούς είναι αφινικοί.

(β') Να προσδιοριστεί αν ο μετασχηματισμός  $f \circ g$  είναι αφινικός.

**2.4.4.** Δίνεται ο αφινικός μετασχηματισμός  $t(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(α') Να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός αντίστροφος του  $t$ .

(β') Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας  $\ell : 2x + 3y + 1 = 0$  ως προς τον  $t$ .

**Απάντηση:**

(α') Θέτουμε  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  και  $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Αν  $\bar{v}' = t(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$ , τότε  $\bar{v} = A^{-1}\bar{v}' - A^{-1}\bar{a}$ . Βρίσκουμε ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } A^{-1}\bar{a} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{'ρα, } \bar{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{v}' - \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Συνεπώς } t^{-1}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{v} - \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ είναι η αντίστροφη της } t.$$

(β') Για  $\bar{v} = (x, y)$  και  $\bar{v}' = (x', y')$ , από το υποερώτημα (α') έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} \\ y &= -x' + 2y' + 4 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα  $x$  και  $y$  στην εξίσωση  $2x + 3y + 1 = 0$  παίρνουμε την εξίσωση:  
 $-2x' + 5y' + 10 = 0$ . 'ρα,  $t(\ell) : -2x' + 5y' + 10 = 0$ .

- 2.4.5.** Να αποδειχθεί ότι κάθε μεταφορά  $T_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι αφινικός μετασχηματισμός.
- 2.4.6.** Να δοθεί παράδειγμα ενός αφινικού μετασχηματισμού  $T_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που να μην είναι μεταφορά.
- 2.4.7.** Να δοθεί παράδειγμα ενός γραμμικού αφινικού μετασχηματισμού  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- 2.4.8.** Να δοθεί παράδειγμα ενός μη γραμμικού αφινικού μετασχηματισμού  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- 2.4.9.** Να δοθεί παράδειγμα ενός αφινικού μετασχηματισμού  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που δεν είναι είναι ισομετρία.
- 2.4.10.** Να δοθεί παράδειγμα μιας γραμμικής απεικόνισης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που δεν είναι είναι ισομετρία.
- 2.4.11.** Να δοθεί παράδειγμα μιας ισομετρίας  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που δεν είναι γραμμική απεικόνιση.
- 2.4.12.** Να αποδειχθεί ότι η ομάδα μεταφορών  $(T(n), \circ)$  είναι ισόμορφη με την ομάδα  $(\mathbb{R}^n, +)$ .

## Κεφάλαιο 3

### Αφινική Γεωμετρία του $\mathbb{R}^2$ .

Συμβολίζουμε με  $GL(2, \mathbb{R})$  την ομάδα αντιστρέψιμων  $2 \times 2$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ . Μια απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  καλείται αφινικός μετασχηματισμός αν υπάρχει  $A \in GL(2, \mathbb{R})$  και  $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$  τέτοια ώστε  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .

Το σύνολο όλων των αφινικών μετασχηματισμών του  $\mathbb{R}^2$  συμβολίζεται με  $A(2)$ .

Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^2, A(2))$  καλείται αφινική γεωμετρία.

#### 3.1 Θεμελιώδες Θεώρημα της Αφινικής Γεωμετρίας.

**Θεώρημα 3.1.1.** Για οποιαδήποτε τρία μη συνευθειακά σημεία  $P, Q$  και  $R$  του  $\mathbb{R}^2$  υπάρχει μοναδικός αφινικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα μη συνευθειακά σημεία  $P = (x_P, y_P)$ ,  $Q = (x_Q, y_Q)$  και  $R = (x_R, y_R)$ , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Έστω ότι  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$ , όπου  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  και  $\bar{a} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$ . Τότε

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = f(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \implies k = x_P, m = y_P$$

$$\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = f(1, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} = f(0, 1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$A = \begin{pmatrix} x_Q - x_P & x_R - x_P \\ y_Q - y_P & y_R - y_P \end{pmatrix} \text{ και } \bar{a} = (x_P, y_P).$$

Επειδή  $P, Q, R$  είναι μη συνευθειακά  $\det(A) \neq 0$ , άρα ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος.  $\square$

**Σημείωση 3.1.2.** Αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε τέσσερα μη συνεπίεδα και ανά τρία μη συνευθειακά σημεία  $P, Q, R$  και  $S$  του  $\mathbb{R}^3$  υπάρχει μοναδικός αφινικός μετασχηματισμός  $f$  του  $\mathbb{R}^3$  που απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  και  $(0, 0, 1)$  στα σημεία  $P, Q, R$  και  $S$ , αντίστοιχα.

**Θεώρημα 3.1.3.** (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αφινικής Γεωμετρίας.) Αν  $P, Q, R$  και  $P', Q', R'$  είναι τριάδες μη συνευθειακών σημείων του  $\mathbb{R}^2$ , τότε υπάρχει μοναδικός αφινικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  για τον οποίον  $f(P) = P'$ ,  $f(Q) = Q'$  και  $f(R) = R'$ .

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.1.1 υπάρχουν μοναδικοί αφινικοί μετασχηματισμοί  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  και  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  για τους οποίους ισχύει ότι:

$f_1$  απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P$ ,  $Q$  και  $R$ , αντίστοιχα.

$f_2$  απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P'$ ,  $Q'$  και  $R'$ , αντίστοιχα.

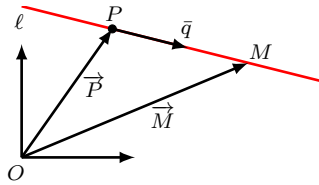
Ο αφινικός μετασχηματισμός  $f = f_2 \circ f_1^{-1}$  του  $\mathbb{R}^2$  απεικονίζει τα σημεία  $P$ ,  $Q$  και  $R$  στα σημεία  $P'$ ,  $Q'$  και  $R'$ , αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι  $g$  είναι ένας αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $P$ ,  $Q$  και  $R$  στα σημεία  $P'$ ,  $Q'$  και  $R'$ , αντίστοιχα. Τότε ο αφινικός μετασχηματισμός  $g \circ f_1$  απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P'$ ,  $Q'$  και  $R'$ , αντίστοιχα. 'ρα,  $g \circ f_1 = f_2$ , από το Θεώρημα 3.1.1. Συνεπώς  $g = f_2 \circ f_1^{-1} = f$ .  $\square$

**Σημείωση 3.1.4.** Αν  $P, Q, R, S$  και  $P', Q', R', S'$  είναι τετράδες μη συνεπίπεδων και ανά τρία μη συνευθειακών σημείων του  $\mathbb{R}^3$ , τότε υπάρχει μοναδικός αφινικός μετασχηματισμός  $f$  του  $\mathbb{R}^3$  για τον οποίον  $f(P) = P'$ ,  $f(Q) = Q'$ ,  $f(R) = R'$  και  $f(S) = S'$ .

## 3.2 Αναλλοίωτες αφινικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ .

**Θεώρημα 3.2.1.** Κάθε αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

Απόδειξη. Για  $O = (0, 0)$  και κάθε σημείο  $P \in \mathbb{R}^2$  συμβολίζουμε με  $\vec{P}$  το διάνυσμα  $\vec{OP}$ .



Έστω  $f(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{a}$  ένας αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  και  $\ell$  μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $P$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ . Τότε

$$\ell = \{M \in \mathbb{R}^2 : \vec{M} = \vec{P} + \lambda \vec{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Επομένως

$$f(\vec{M}) = A(\vec{P} + \lambda \vec{q}) + \vec{a} = (A\vec{P} + \vec{a}) + \lambda A\vec{q} = f(\vec{P}) + \lambda A\vec{q}.$$

'ρα,  $f(\ell)$  είναι ευθεία, διερχόμενη από το σημείο  $f(P)$  και παράλληλη στο διάνυσμα  $A\vec{q}$ .  $\square$

**Πόρισμα 3.2.2.** Οποιοσδήποτε δύο ευθείες του επιπέδου είναι αφινικά ισοδύναμες.

Απόδειξη. Έστω  $\varepsilon$  και  $\varepsilon^*$  δύο ευθείες. Θεωρούμε ζεύγη διαφορετικών σημείων  $P, Q \in \varepsilon$  και  $P^*, Q^* \in \varepsilon^*$ . Έστω  $S \in \mathbb{R}^2 \setminus (\varepsilon \cup \varepsilon^*)$ . Από το Θεώρημα 3.1.3 υπάρχει μοναδικός  $f \in A(2)$  τέτοιος ώστε  $f(P) = P^*$ ,  $f(Q) = Q^*$  και  $f(S) = S$ . Το σύνολο  $f(\varepsilon)$  είναι ευθεία από το Θεώρημα 3.2.1. Επίσης  $P^* \in f(\varepsilon)$  και  $Q^* \in f(\varepsilon)$ . 'ρα,  $f(\varepsilon) = \varepsilon^*$ .  $\square$

**Θεώρημα 3.2.3.** Κάθε αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  απεικονίζει παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες.

Απόδειξη. Έστω  $f(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{a}$  ένας αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$ .

Θεωρούμε ζεύγος παράλληλων ευθειών

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{M \in \mathbb{R}^2 : \vec{M} = \vec{P}_1 + \lambda\vec{q} : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \ell_2 &= \{M \in \mathbb{R}^2 : \vec{M} = \vec{P}_2 + \lambda\vec{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} f(\ell_1) &= \{M \in \mathbb{R}^2 : \vec{M} = \overrightarrow{f(P_1)} + \lambda A\vec{q} : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ f(\ell_2) &= \{M \in \mathbb{R}^2 : \vec{M} = \overrightarrow{f(P_2)} + \lambda A\vec{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Οι ευθείες  $f(\ell_1)$  και  $f(\ell_2)$  είναι παράλληλες στο ίδιο διάνυσμα  $A\vec{q}$ .

Αν  $f(P_2) \in f(\ell_1)$ , τότε  $P_2 = f^{-1}(f(P_2)) \in f^{-1}(f(\ell_1)) = \ell_1$ , που είναι άτοπο. Άρα,  $f(P_2) \notin f(\ell_1)$ . Συνεπώς  $f(\ell_1) \parallel f(\ell_2)$ .  $\square$

**Θεώρημα 3.2.4.** Κάθε αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  διατηρεί τον απλό λόγο τριών σημείων μιας ευθείας.

Απόδειξη. Έστω  $f(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{c}$  ένας αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$ .

Θεωρούμε τρία σημεία  $P, Q, M$  μιας ευθείας  $\ell$ .

Τότε  $(PQM) = \beta/\alpha$ , όπου  $\alpha + \beta = 1$  και  $\vec{M} = \alpha\vec{P} + \beta\vec{Q}$ .

Επομένως

$$\begin{aligned} f(\vec{M}) &= f(\alpha\vec{P} + \beta\vec{Q}) = \alpha A\vec{P} + \beta A\vec{Q} + \vec{c} = \\ &= \alpha A\vec{P} + \beta A\vec{Q} + (\alpha + \beta)\vec{c} = \\ &= (\alpha A\vec{P} + \alpha\vec{c}) + (\beta A\vec{Q} + \beta\vec{c}) = \alpha f(\vec{P}) + \beta f(\vec{Q}). \end{aligned}$$

$\square$

**Πόρισμα 3.2.5.** Έστω ότι ο αφινικός μετασχηματισμός  $f$  του  $\mathbb{R}^2$  απεικονίζει τα συνευθειακά σημεία  $P, Q, R$  στα σημεία  $P', Q', R'$ , αντίστοιχα.

Αν  $R$  είναι μεταξύ των  $P$  και  $Q$ , τότε  $R'$  είναι μεταξύ των  $P'$  και  $Q'$ .

Απόδειξη. Επειδή  $R$  είναι μεταξύ  $P$  και  $Q$  υπάρχουν  $\lambda_P, \lambda_Q \in [0, 1]$  με  $\lambda_P + \lambda_Q = 1$  και  $R = \lambda_P P + \lambda_Q Q$ . Επειδή κάθε αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  διατηρεί τον απλό λόγο τριών σημείων μιας ευθείας, έπεται ότι  $f(R) = \lambda_P f(P) + \lambda_Q f(Q)$ . Συνεπώς  $R' = \lambda_P P' + \lambda_Q Q'$ , όπου  $\lambda_P, \lambda_Q \in [0, 1]$  με  $\lambda_P + \lambda_Q = 1$ . Άρα,  $R'$  είναι μεταξύ  $P'$  και  $Q'$ .  $\square$

**Ορισμός 3.2.6.**  $\triangle$  Τρίγωνο  $ABC$  με κορυφές τα μη συνευθειακά σημεία  $A, B$  και  $C$  είναι η ένωση των ευθύγραμμων τμημάτων  $AB, BC$  και  $CA$

**Πόρισμα 3.2.7.** Οποιαδήποτε δύο τρίγωνα ενός επιπέδου είναι αφινικά ισοδύναμα.

### 3.3 Παράλληλες προβολές.

**Ορισμός 3.3.1.** Έστω ότι  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  είναι δύο επίπεδα του χώρου και  $\Delta$  είναι μια δέσμη παράλληλων ευθειών που τέμνουν και τα δύο επίπεδα  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ .

Από κάθε  $P \in \Pi_1$  διέρχεται μοναδική ευθεία  $\ell_P \in \Delta$ . Το σημείο  $P' = \ell_P \cap \Pi_2$  είναι η παράλληλη προβολή του  $P$  στο  $\Pi_2$  που ορίζεται από την δέσμη  $\Delta$ . Η απεικόνιση  $p : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  που για την οποία  $p(P) = P'$  καλείται παράλληλη προβολή του  $\Pi_1$  στο  $\Pi_2$ .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

- Η παράλληλη προβολή είναι 1-1 και επί.
- Η αντίστροφη απεικόνιση μιας παράλληλης προβολής  $p : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  είναι παράλληλη προβολή  $p^{-1} : \Pi_2 \rightarrow \Pi_1$ .
- Αν  $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ , τότε η παράλληλη προβολή  $p : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  είναι ισόμετρία.

**Θεώρημα 3.3.2.** Κάθε παράλληλη προβολή είναι αφινικός μετασχηματισμός

*Απόδειξη.* Έστω ότι στο καθένα από τα επίπεδα  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  δίνεται από ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  και  $O'x'y'$ . Τότε στη παράλληλη προβολή  $p : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  αντιστοιχεί απεικόνιση  $f_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που ορίζεται ως εξής:

αν  $(x, y) = P$  στο  $Oxy$ ,  $p(P) = P'$  και  $P' = (x', y')$  στο  $O'x'y'$ , τότε  $f_p(x, y) = (x', y')$ .

Αν  $f_p(O) = O'$ , τότε  $f_p$  είναι γραμμική και, επομένως, υπάρχει  $2 \times 2$  πίνακας  $A$  τέτοιος ώστε  $f_p(\bar{v}) = A\bar{v}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ . Επειδή  $p$  είναι αντιστρέψιμος, ο  $A$  αντιστρέψιμος. πίνακας.

Αν  $f_p(O) = \bar{a}$ , τότε υπάρχει αντιστρέψιμος  $2 \times 2$  πίνακας  $A$  τέτοιος ώστε  $f_p(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Σημείωση 3.3.3.** Ένας αφινικός μετασχηματισμός μπορεί να μην αντιστοιχεί σε παράλληλη προβολή. Για παράδειγμα,  $f(\bar{v}) = 2\bar{v}$ ,  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ , είναι αφινικός μετασχηματισμός, αφού μπορεί να γραφεί σε μορφή  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{a}$  για  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  και  $\bar{a} = (0, 0)$ . Η  $f$  δεν μπορεί να είναι παράλληλη προβολή παράλληλων επιπέδων, που είναι ισόμετρία, ούτε επιπέδων που τέμνονται κατά ευθεία οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων της οποίας διατηρούνται με παράλληλη προβολή.

**Θεώρημα 3.3.4.** Κάθε αφινικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση δύο παράλληλων προβολών.

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο αφινικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα μη συνευθειακά σημεία  $P, Q$  και  $R$ , αντίστοιχα. Έστω  $\Pi_2$  είναι το επίπεδο των σημείων  $P, Q, R$ . Θα ορίσουμε δύο επίπεδα  $\Pi_1$  και  $\Pi$  και παράλληλες προβολές  $\Pi_1 \xrightarrow{p_1} \Pi \xrightarrow{p_2} \Pi_2$  έτσι ώστε  $p_2 \circ p_1 = f$ .

Έστω ότι  $\Pi_1$  είναι επίπεδο με ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων  $O\vec{i}\vec{j}$  και  $\Pi$  είναι επίπεδο τέτοια ώστε  $O = P \in \Pi$ ,  $Q \in \Pi$  και το  $Q_1 = (1, 0)$  του  $\Pi_1$  να μην ανήκει στο  $\Pi$ . Η παράλληλη προβολή  $p_1 : \Pi_1 \rightarrow \Pi$  ορίζεται από το διάνυσμα  $\overrightarrow{QQ_1}$ . Τότε  $p_1(0, 1) = T \in \Pi$ . Έστω  $p_2 : \Pi \rightarrow \Pi_2$  παράλληλη προβολή που ορίζεται από το διάνυσμα  $\overrightarrow{TR}$ . Τότε  $p_2(T) = R$ .

Για την  $p = p_2 \circ p_1$  ισχύει ότι  $p(0, 0) = P$ ,  $p(1, 0) = Q$  και  $p(0, 1) = R$ . Επειδή  $p$  ως σύνθεση αφινικών μετασχηματισμών είναι αφινικός μετασχηματισμός, από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αφινικής Γεωμετρίας έπεται ότι  $p = f$ . Δηλαδή  $f$  είναι σύνθεση δύο παράλληλων προβολών  $p_1$  και  $p_2$ .  $\square$

### 3.4 Ασκήσεις

**3.4.1.** Να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P = (1, -2)$ ,  $Q = (2, 1)$  και  $R = (-3, 5)$ , αντίστοιχα.

**3.4.2.** Να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P = (2, 3)$ ,  $Q = (1, 6)$  και  $R = (3, -1)$ , αντίστοιχα.

**3.4.3.** Να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $(2, 3)$ ,  $(1, 6)$  και  $(3, -1)$  στα σημεία  $(1, -2)$ ,  $(2, 1)$  και  $(-3, 5)$ , αντίστοιχα.

**Απάντηση:** Έστω  $f$  ο αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P' = (2, 3)$ ,  $Q' = (1, 6)$  και  $R' = (3, -1)$ , αντίστοιχα. Έστω επίσης  $g$  ο αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  στα σημεία  $P = (1, -2)$ ,  $Q = (2, 1)$  και  $R = (-3, 5)$ , αντίστοιχα. Τότε  $h = g \circ f^{-1}$ .

Αν  $f(\bar{x}) = A\bar{x} + \bar{a}$  και  $g(\bar{x}) = B\bar{x} + \bar{b}$ , τότε  $f^{-1}(\bar{x}) = A^{-1}\bar{x} - A^{-1}\bar{a}$  και

$$h(\bar{x}) = B(A^{-1}\bar{x} - A^{-1}\bar{a}) + \bar{b} = BA^{-1}\bar{x} - BA^{-1}\bar{a} + \bar{b}.$$

**3.4.4.** Να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την ευθεία  $\varepsilon : 3x + 2y + 4 = 0$  του  $\mathbb{R}^2$  στην ευθεία  $x = 0$ .

**3.4.5.** Να βρεθεί ο αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$  στην υπερβολή  $y = \frac{1}{x}$ .

**3.4.6.** Να αποδειχθεί ότι οποιεσδήποτε δύο υπερβολές είναι αφινικά ισοδύναμες.

**3.4.7.** Να αποδειχθεί ότι οποιεσδήποτε δύο ελλείψεις είναι αφινικά ισοδύναμες.

**3.4.8.** Να αποδειχθεί ότι οποιεσδήποτε δύο παραβολές είναι αφινικά ισοδύναμες.

**3.4.9.** Έστω  $f$  αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα συνευθειακά σημεία  $P, Q, R$  και  $S$  στα συνευθειακά σημεία  $P', Q', R'$  και  $S'$ , αντίστοιχα. Να αποδειχθούν ότι

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{R'S'}$$

Δηλαδή, κάθε αφινικός μετασχηματισμός διατηρεί τον λόγο των μηκών των ευθείγραμμων τμημάτων κατά μήκος μιας ευθείας.

**Απάντηση:** Επειδή σημεία  $P, Q, R$  και  $S$  είναι συνευθειακά, έπεται ότι υπάρχουν  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  με

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{QR} \text{ και } \overrightarrow{QR} = \mu \overrightarrow{RS}.$$

Όμως κάθε αφινικός μετασχηματισμός διατηρεί το απλό λόγο σημείων, επομένως

$$\overrightarrow{P'Q'} = \lambda \overrightarrow{Q'R'} \text{ και } \overrightarrow{Q'R'} = \mu \overrightarrow{R'S'}.$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{PQ}{RS} = \frac{PQ}{QR} \frac{QR}{RS} = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| = \frac{P'Q'}{R'S'}.$$

**3.4.10.** Έστω ότι ο αφινικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τα μη συνευθειακά σημεία  $P, Q, R$  στα σημεία  $P', Q', R'$ , αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ο  $f$  απεικονίζει το εσωτερικό του τριγώνου  $\triangle PQR$  επί του εσωτερικού του τριγώνου  $\triangle P'Q'R'$ .

**Απάντηση:** Ένα σημείο  $M \in \mathbb{R}^2$  είναι ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου  $\triangle PQR$  αν και μόνον αν και μόνον αν υπάρχουν  $\lambda_P, \lambda_Q, \lambda_R \in (0, 1)$  με  $\lambda_P + \lambda_Q + \lambda_R = 1$  για τα οποία

$$M = \lambda_P P + \lambda_Q Q + \lambda_R R.$$

Έστω  $f(\bar{v}) = A\bar{v} + \bar{b}$ . Αν  $M$  ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου  $\triangle PQR$ , τότε

$$\begin{aligned} f(M) &= f(\lambda_P P + \lambda_Q Q + \lambda_R R) = \\ &= A(\lambda_P P + \lambda_Q Q + \lambda_R R) + \bar{b} \\ &= \lambda_P (AP) + \lambda_Q (AQ) + \lambda_R (AR) + (\lambda_P + \lambda_Q + \lambda_R)\bar{b} \\ &= \lambda_P (AP + \bar{b}) + \lambda_Q (AQ + \bar{b}) + \lambda_R (AR + \bar{b}) = \\ &= \lambda_P P' + \lambda_Q Q' + \lambda_R R' \end{aligned}$$

Επειδή  $\lambda_P, \lambda_Q, \lambda_R \in (0, 1)$  με  $\lambda_P + \lambda_Q + \lambda_R = 1$ ,  $f(M)$  ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου  $\triangle P'Q'R'$ . Ήρα, η  $f$  απεικονίζει το εσωτερικό του  $\triangle PQR$  στο εσωτερικό του  $\triangle P'Q'R'$ .

Όμοια αποδεικνύεται ότι η  $f^{-1}$  απεικονίζει το εσωτερικό του  $\triangle P'Q'R'$  στο εσωτερικό του  $\triangle PQR$ . Ήρα, ο  $f$  απεικονίζει το εσωτερικό του τριγώνου  $\triangle PQR$  επί του εσωτερικού του τριγώνου  $\triangle P'Q'R'$ .



# Κεφάλαιο 4

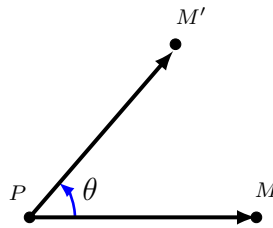
## Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^2$ .

### 4.1 Ορισμός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του $\mathbb{R}^2$ .

Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^2, E(2))$ , όπου  $E(2)$  είναι η ομάδα των ισομετριών του  $\mathbb{R}^2$ , καλείται Ευκλείδεια γεωμετρία του  $\mathbb{R}^2$  (Ευκλείδειο επίπεδο).

#### 4.1.1 Ομάδα περιστροφών του $\mathbb{R}^2$ γύρω από ένα σημείο.

Η περιστροφή ενός προσανατολισμένου επιπέδου  $\Pi$  κατά γωνία  $\theta$  γύρω από το σημείο  $P \in \Pi$  είναι η αυτοαπεικόνιση του επιπέδου που σε κάθε σημείο  $M \in \Pi$  αντιστοιχεί  $M' \in \Pi$  για το οποίο  $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PM}'|$  και οι γωνία από την ημιευθεία  $[PM)$  προς την  $[PM')$  είναι  $\theta$ .



**Πρόταση 4.1.1.** Το σύνολο  $R(P)$  όλων των περιστροφών ενός προσανατολισμένου επιπέδου  $\Pi$  γύρω από οποιοδήποτε σημείο  $P$  εφοδιασμένο με την πράξη σύνθεσης των απεικονίσεων είναι αντιμεταθετική ομάδα. Επομένως  $(\Pi, R(P))$  είναι γεωμετρία για κάθε  $P \in \Pi$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο  $\Pi$  με αρχή το σημείο  $P$ .

Αν  $R_\theta^P$  είναι περιστροφή γύρω από το  $P$  κατά γωνία  $\theta$ , τότε η  $R_\theta^P$  απεικονίζει το  $M = (r, \phi)$  στο  $R_\theta^P(M) = (r, \phi + \theta)$ .

1.  $R_\theta^P$  είναι 1-1 και επί.
2. Η αντίστροφη της  $R_\theta^P$  είναι η  $R_{-\theta}^P$
3.  $R_{\theta_1}^P \circ R_{\theta_2}^P = R_{\theta_1 + \theta_2}^P$ .
4.  $R_{\theta_1}^P \circ R_{\theta_2}^P = R_{\theta_1 + \theta_2}^P = R_{\theta_2}^P \circ R_{\theta_1}^P$

Συνεπώς το σύνολο όλων των περιστροφών είναι ομάδα. □

**Σημείωση 4.1.2.** Παρατηρούμε ότι για κάθε  $\varphi \in \mathbb{R}$  υπάρχει μοναδικό  $\theta_\varphi \in (-\pi, \pi]$  για το οποίο  $\varphi = \theta_\varphi + 2n\pi$ , όπου  $n \in \mathbb{Z}$ . Προφανώς  $R_\varphi^P = R_{\theta_\varphi}^P$ . Συνεπώς το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από το  $P$  είναι το σύνολο  $R(P) = \{R_\theta^P : \theta \in (-\pi, \pi]\}$ .

Έστω  $\Pi$  ένα επίπεδο με ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ . Τότε υπάρχει ένα προς ένα και επί αντιστοιχία  $i : \Pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$  που σε κάθε σημείο  $P$  του επιπέδου αντιστοιχεί τις συντεταγμένες του  $(x_P, y_P)$ .

Σε κάθε απεικόνιση  $f : \Pi \rightarrow \Pi$  αντιστοιχεί η απεικόνιση  $f_\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $f_\Pi = i \circ f \circ i^{-1}$ . Η αντιστοιχία αυτή μεταξύ των αυτοαπεικονίσεων του  $\Pi$  και του  $\mathbb{R}^2$  είναι αμφιμονοσήμαντη. Έτσι αντί να μιλάμε για την περιστροφή του επιπέδου, μπορούμε να μιλάμε για την περιστροφή του  $\mathbb{R}^2$ .

**Πρόταση 4.1.3.** Η περιστροφή  $Ro_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  του  $\mathbb{R}^2$  γύρω από την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$  κατά τη γωνία  $\theta \in (-\pi, \pi]$  ορίζεται από τον τύπο:

$$Ro_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Απόδειξη. Έστω  $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Τότε

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta_M \\ y &= r \sin \theta_M, \end{aligned}$$

όπου  $r = |OM|$  και  $\theta_M$  η γωνία από τον  $Ox$  προς την  $[OM]$ -ημιευθεία.

Αν  $Ro_\theta(x, y) = (x', y')$ , τότε

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\theta_M + \theta) = r \cos \theta_M \cos \theta - r \sin \theta_M \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= r \sin(\theta_M + \theta) = r \sin \theta_M \cos \theta + r \cos \theta_M \sin \theta = x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{Ήρα, } Ro_\theta(x, y)(M) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Πρόταση 4.1.4.** Η ομάδα  $R(O)$  των περιστροφών γύρω από το  $O = (0, 0)$  κατά τη γωνία  $\theta \in (-\pi, \pi]$  είναι ισομορφική με την αντιμεταθετική ομάδα  $SO(2, \mathbb{R})$  ορθογώνιων πινάκων με ορίζουσα 1.

Απόδειξη. Έστω  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{R})$ . Επειδή  $a^2 + b^2 = 1$ , υπάρχει μοναδικό  $\theta_A \in (-\pi, \pi]$  με  $a = \cos \theta_A$  και  $b = \sin \theta_A$ .

Ορίζουμε 1-1 και επί απεικόνιση με  $h : SO(2, \mathbb{R}) \rightarrow R(O)$  με  $h(A) = R_{\theta_A}^O$ . Αν  $A, B \in SO(2, \mathbb{R})$ , τότε

$$\begin{aligned} h(AB) &= h\left(\begin{pmatrix} \cos \theta_A & -\sin \theta_A \\ \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_B & -\sin \theta_B \\ \sin \theta_B & \cos \theta_B \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_A + \theta_B) & -\sin(\theta_A + \theta_B) \\ \sin(\theta_A + \theta_B) & \cos(\theta_A + \theta_B) \end{pmatrix}\right) = \\ &= R_{\theta_A + \theta_B}^O = R_{\theta_A} \circ R_{\theta_B} = h(A) \circ h(B). \end{aligned}$$

Ήρα,  $h$  είναι ισομορφισμός. □

**Πρόταση 4.1.5.** Κάθε περιστροφή γύρω από ένα σημείο είναι ισομετρία.

*Απόδειξη.* Έστω  $R_{\theta}$  περιστροφή γύρω από το  $O = (0, 0)$ .

Για τα σημεία  $\bar{u} = (x_{\bar{u}}, y_{\bar{u}})$  και  $\bar{v} = (x_{\bar{v}}, y_{\bar{v}})$  του  $\mathbb{R}^2$  έχουμε

$$R_{\theta}(\bar{u}) = (x_{\bar{u}} \cos \theta - y_{\bar{u}} \sin \theta, x_{\bar{u}} \sin \theta + y_{\bar{u}} \cos \theta)$$

$$R_{\theta}(\bar{v}) = (x_{\bar{v}} \cos \theta - y_{\bar{v}} \sin \theta, x_{\bar{v}} \sin \theta + y_{\bar{v}} \cos \theta)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \|R_{\theta}(\bar{u}), R_{\theta}(\bar{v})\| &= \sqrt{((x_{\bar{u}} - x_{\bar{v}}) \cos \theta - (y_{\bar{u}} - y_{\bar{v}}) \sin \theta)^2 + ((x_{\bar{u}} - x_{\bar{v}}) \sin \theta + (y_{\bar{u}} - y_{\bar{v}}) \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{(x_{\bar{u}} - x_{\bar{v}})^2 + (y_{\bar{u}} - y_{\bar{v}})^2} = \|\bar{u} - \bar{v}\|. \end{aligned}$$

Άρα,  $R_{\theta}$  είναι ισομετρία.

Έστω ότι  $P$  είναι ένα σημείο του επιπέδου διαφορετικό από την αρχή  $O = (0, 0)$  και  $T_{\vec{P}}$  είναι η μεταφορά στο  $\mathbb{R}^2$  κατά διάνυσμα  $\vec{OP} = \vec{P}$ . Τότε η περιστροφή  $R_{\theta}(P)$  γύρω από το  $P$  κατά γωνία  $\theta$  παριστάνεται ως σύνθεση ισομετριών:  $R_{\theta}^P = T_{\vec{P}} \circ R_{\theta} \circ T_{-\vec{P}}$ .  $\square$

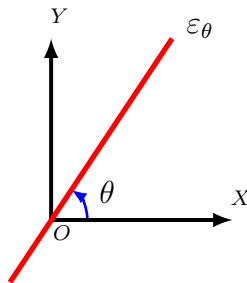
#### 4.1.2 Ανακλάσεις του $\mathbb{R}^2$ ως προς μια ευθεία $\varepsilon$ .

Η ανάκλαση ως προς μια ευθεία  $\varepsilon$  του  $\mathbb{R}^2$  είναι η απεικόνιση  $a_{\varepsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που κάθε σημείο  $A \in \mathbb{R}^2$  αντιστοιχεί το συμμετρικό του  $a_{\varepsilon}(A)$  ως προς την  $\varepsilon$ .

Κάθε ανάκλαση  $a_{\varepsilon}$  ως προς μια ευθεία  $\varepsilon$  είναι 1-1 και επί μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^2$  και  $a_{\varepsilon}^{-1} = a_{\varepsilon}$ .

Οι ανακλάσεις ως προς μια ευθεία  $\varepsilon$  δεν αποτελούν ομάδα, αφού η σύνθεση δύο ανακλάσεων είναι ταυτοτική απεικόνιση, η οποία δεν είναι ανάκλαση.

Συμβολίζουμε με  $\varepsilon_{\theta}$  την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$ . Με  $Re_{\theta}$  συμβολίζουμε την ανάκλαση του  $\mathbb{R}^2$  ως προς την  $\varepsilon_{\theta}$ .



#### Σημειώσεις 4.1.6.

1. Η ανάκλαση ως προς τον άξονα  $Ox$  ορίζεται από την σχέση

$$Re_0(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Η ανάκλαση ως προς την ευθεία  $\varepsilon_\theta$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  ορίζεται από την σχέση

$$Re_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Πράγματι,  $Re_\theta = Ro_\theta \circ Re_0 \circ Ro_{-\theta}$ . Επομένως

$$\begin{aligned} Re_\theta(x, y) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των ανακλάσεων  $Re_\theta$ ,  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , ως προς τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή  $(0, 0)$  και των πινάκων της μορφής  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  με  $a^2 + b^2 = 1$  (από το Θεώρημα 1.3.5).
4. Το σύνολο των περιστροφών του  $\mathbb{R}^2$  γύρω από το  $(0, 0)$  κατά γωνία  $\theta \in (-\pi, \pi]$  και των ανακλάσεων ως προς ευθείες που διέρχονται από το  $(0, 0)$  με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα ισόμορφική με την ομάδα  $O(2, \mathbb{R})$  όλων των ορθογώνιων πινάκων των μορφών  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  ή  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ , όπου  $a^2 + b^2 = 1$ .

**Πρόταση 4.1.7.** Κάθε ανάκλαση του  $\mathbb{R}^2$  είναι ισομετρία.

Απόδειξη. Έστω  $Re_0(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ανάκλαση ως προς τον άξονα  $Ox$ .

Για σημεία  $\bar{u} = (x_u, y_u)$  και  $\bar{v} = (x_v, y_v)$  του  $\mathbb{R}^2$  έχουμε

$$\begin{aligned} Re_0(\bar{u}) &= (x_u, -y_u) \\ Re_0(\bar{v}) &= (x_v, -y_v) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|Re_0(\bar{u}) - Re_0(\bar{v})\| = \sqrt{(x_u - x_v)^2 + (-y_u + y_v)^2} = \sqrt{(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2} = \|\bar{u} - \bar{v}\|.$$

Ήρα,  $Re_0$  είναι ισομετρία.

Έστω ότι  $\varepsilon : y = ax + b$  είναι μια ευθεία του  $\mathbb{R}^2$  διαφορετική από τον άξονα  $Ox$  και  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  με  $\tan \theta = a$ . Τότε η ανάκλαση  $a_\varepsilon$  ως προς την  $\varepsilon$  παριστάνεται ως σύνθεση ισομετριών ως εξής:  $a_\varepsilon = T_{\bar{b}} \circ Ro_\theta \circ Re_0 \circ Ro_{-\theta} \circ T_{-\bar{b}}$ , όπου  $\bar{b} = (0, b)$ .

Έστω ότι  $\varepsilon : x = b$ . Τότε η ανάκλαση  $a_\varepsilon$  ως προς την  $\varepsilon$  παριστάνεται ως σύνθεση ισομετριών ως εξής:  $a_\varepsilon = T_{\bar{b}} \circ Ro_{\frac{\pi}{2}} \circ Re_0 \circ Ro_{-\frac{\pi}{2}} \circ T_{-\bar{b}}$ , όπου  $\bar{b} = (b, 0)$ .

Συνεπώς, κάθε ανάκλαση ως προς ευθεία είναι ισομετρία ως σύνθεση ισομετριών.  $\square$

## 4.2 Ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$ .

**Θεώρημα 4.2.1.** Κάθε ισομετρία  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που αφήνει σταθερή την αρχή των αξόνων ( $T(\bar{0}) = \bar{0}$ ) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.  $\|T(\bar{a})\| = \|\bar{a}\|$ , για κάθε  $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ .
2.  $T(\bar{a}) \cdot T(\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$ , για κάθε  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$  ( $T$  αφήνει αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο).
3.  $T$  είναι γραμμική απεικόνιση.

Απόδειξη. 1. Για  $\bar{0} = (0, 0)$  παίρνουμε

$$\|T(\bar{a})\| = \|T(\bar{a}) - \bar{0}\| = \|T(\bar{a}) - T(\bar{0})\| = \|\bar{a} - \bar{0}\| = \|\bar{a}\|.$$

2. Έστω  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$ . Τότε

$$\begin{aligned} \|\bar{a} - \bar{b}\|^2 &= \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} \\ \|T(\bar{a}) - T(\bar{b})\|^2 &= \|T(\bar{a})\|^2 + \|T(\bar{b})\|^2 - 2T(\bar{a}) \cdot T(\bar{b}) \end{aligned}$$

Επειδή  $T$  είναι ισομετρία,  $\|T(\bar{a}) - T(\bar{b})\| = \|\bar{a} - \bar{b}\|$ .

Από την ιδιότητα 1, που αποδείξαμε  $\|T(\bar{a})\| = \|\bar{a}\|$  και  $\|T(\bar{b})\| = \|\bar{b}\|$ .

Ύρα,  $T(\bar{a}) \cdot T(\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$ .

3. Έστω  $a, b \in \mathbb{R}^2$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Τότε από τις ιδιότητες 1 και 2 που αποδείξαμε προκύπτει ότι:

$$\|T(\lambda\bar{a}) - \lambda T(\bar{a})\|^2 = \|T(\lambda\bar{a})\|^2 + \lambda^2 \|T(\bar{a})\|^2 - 2\lambda T(\lambda\bar{a}) \cdot T(\bar{a}) = \|\lambda\bar{a}\|^2 + \lambda^2 \|\bar{a}\|^2 - 2\lambda\lambda\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{0}.$$

Ύρα,  $T(\lambda\bar{a}) = \lambda T(\bar{a})$ .

Επίσης

$$\|T(\bar{a} + \bar{b}) - (T(\bar{a}) + T(\bar{b}))\|^2 = \|T(\bar{a} + \bar{b})\|^2 - 2T(\bar{a} + \bar{b}) \cdot T(\bar{a}) - 2T(\bar{a} + \bar{b}) \cdot T(\bar{b}) + \|T(\bar{a}) + T(\bar{b})\|^2$$

Από τις ιδιότητες 1 και 2 που αποδείξαμε προκύπτει ότι:

$$\|T(\bar{a} + \bar{b})\|^2 = \|\bar{a} + \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \|\bar{b}\|^2,$$

$$T(\bar{a} + \bar{b}) \cdot T(\bar{a}) = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{a} = \|\bar{a}\|^2 + \bar{a} \cdot \bar{b},$$

$$T(\bar{a} + \bar{b}) \cdot T(\bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{b} = \|\bar{b}\|^2 + \bar{a} \cdot \bar{b},$$

$$\|T(\bar{a}) + T(\bar{b})\|^2 = \|T(\bar{a})\|^2 + \|T(\bar{b})\|^2 + 2T(\bar{a}) \cdot T(\bar{b}) = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Από τα παραπάνω  $\|T(\bar{a} + \bar{b}) - (T(\bar{a}) + T(\bar{b}))\|^2 = \bar{0}$ . Ύρα,  $T(\bar{a} + \bar{b}) = (T(\bar{a}) + T(\bar{b}))$ .

Συνεπώς  $T$  είναι γραμμική απεικόνιση. □

**Θεώρημα 4.2.2.** Για κάθε γραμμική ισομετρία  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  υπάρχει ορθογώνιος πίνακας  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  για τον οποίον  $T(\bar{v}) = C\bar{v}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .

Απόδειξη. Θέτουμε  $\bar{e}_1 = (1, 0)$  και  $\bar{e}_2 = (0, 1)$ .

Επειδή  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  είναι βάση του  $\mathbb{R}^2$ , έχουμε

$$\begin{aligned} T(\bar{e}_1) &= c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 \\ T(\bar{e}_2) &= c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Έστω  $\bar{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  και  $T(\bar{v}) = x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2$ . Επειδή  $T$  είναι γραμμική,

$$\begin{aligned} T(\bar{v}) &= T(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2) = xT(\bar{e}_1) + yT(\bar{e}_2) = \\ &= x(c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2) + y(c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2) = \\ &= (xc_{11} + yc_{12})\bar{e}_1 + (xc_{21} + yc_{22})\bar{e}_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} x' &= xc_{11} + yc_{12} \\ y' &= xc_{21} + yc_{22} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Για  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  οι (4.3) γραφονται  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , ισοδύναμα  $T(\bar{v}) = C\bar{v}$ .

Επομένως  $T(\bar{0}) = C \cdot \bar{0} = \bar{0}$  για την ισομετρία  $T$ .

Από το Θεώρημα 4.2.1 έπεται ότι  $\|T(\bar{e}_1)\| = \|\bar{e}_1\|$ ,  $\|T(\bar{e}_2)\| = \|\bar{e}_2\|$  και  $T(\bar{e}_1) \cdot T(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2$ . Έρα,  $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$ ,  $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$  και  $c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$ . Δηλαδή ο  $C$  είναι ορθογώνιος.  $\square$

**Θεώρημα 4.2.3.** Για κάθε ισομετρία  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  υπάρχει ορθογώνιος  $2 \times 2$  πίνακας  $C$  και  $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ , τέτοια ώστε  $T(\bar{v}) = C\bar{v} + \bar{a}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .

Απόδειξη. Έστω  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  μια ισομετρία.

Αν  $T(\bar{0}) = \bar{0}$ , τότε  $T$  είναι γραμμική ισομετρία. Επομένως υπάρχει ορθογώνιος πίνακας  $C$  για τον οποίον  $T(\bar{v}) = C\bar{v}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .

Αν  $T(\bar{0}) = \bar{a} \neq \bar{0}$ , τότε η απεικόνιση  $S(\bar{v}) = T(\bar{v}) - \bar{a}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$  είναι ισομετρία για την οποία

$$S(\bar{0}) = T(\bar{0}) - \bar{a} = \bar{a} - \bar{a} = \bar{0}.$$

Έρα,  $S$  είναι γραμμική ισομετρία. Επομένως  $S(\bar{v}) = C\bar{v}$ , όπου  $C$  ορθογώνιος πίνακας.

Έρα,  $T(\bar{v}) = S(\bar{v}) + \bar{a} = C\bar{v} + \bar{a}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Πόρισμα 4.2.4.** Κάθε ισομετρία είναι αφινικός μετασχηματισμός.

**Πόρισμα 4.2.5.** Κάθε ισομετρία ορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  τριών μη συνευθειακών σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

**Πόρισμα 4.2.6.** Το σύνολο όλων των ισομετριών του  $\mathbb{R}^2$  που αφήνουν σταθερή την αρχή  $(0, 0)$  με την πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα ισομορφική με την πολλαπλασιαστική ομάδα των ορθογώνιων πινάκων  $O(2, \mathbb{R})$ .

**Θεώρημα 4.2.7.** Κάθε ισομετρία ενός επιπέδου μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση κάποιων από τις παρακάτω ισομετρίες: μεταφορά, ανάκλαση ως προς τον  $Ox$  και περιστροφή γύρω από την αρχή.

Απόδειξη. Έστω  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  μια ισομετρία.

Τότε υπάρχει ορθογώνιος  $2 \times 2$  πίνακας  $C$  και  $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ , τέτοια ώστε  $T(\bar{v}) = C\bar{v} + \bar{a}$  για κάθε  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ .

Επομένως  $T(\bar{v}) = S(\bar{v}) + \bar{a}$ , όπου  $S(\bar{v}) = C\bar{v}$ .

Ο  $C$  έχει μία από τις μορφές  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ή  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ , όπου  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  αντιστοιχεί στην περιστροφή γύρω από την αρχή κατά γωνία  $\theta$ .

$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  αντιστοιχεί στην ανάκλαση ως προς τον  $Ox$  που ακολουθείται από την περιστροφή κατά τη γωνία  $\theta$  γύρω από την αρχή.

Έρα,  $S$  αντιστοιχεί ή στην περιστροφή ή στη σύνθεση ανάκλασης και περιστροφής.

Επομένως  $T = S + \bar{a}$  είναι σύνθεση κάποιων από τις παρακάτω ισομετρίες: μεταφορά, ανάκλαση ως προς τον  $Ox$  και περιστροφή γύρω αρχή.  $\square$

**Σημείωση 4.2.8.** Το εσωτερικό γινόμενο των  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  είναι ο αριθμός  $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ .

Όπως και στην περίπτωση του  $\mathbb{R}^2$ , αποδεικνύεται ότι τα Θεωρήματα 4.2.1, 4.2.2 και 4.2.3 ισχύουν και στο  $\mathbb{R}^n$ .

### 4.3 Αναλλοίωτες ευκλείδειων μετασχηματισμών.

Επειδή κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι ισομετρία, από τον ορισμό της ισομετρίας προκύπτει ότι

Κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός:

- διατηρεί τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων.
- διατηρεί τις αποστάσεις.

Επειδή κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι σύνθεση περιστροφής, ανάκλασης και μεταφοράς, και επειδή οι περιστροφές, οι ανακλάσεις και οι μεταφορές διατηρούν τις γωνίες, προκύπτει ότι

Κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός

- διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των ευθειών.

Επειδή κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι αφινικός, οι αναλλοίωτες των αφινικών μετασχηματισμών είναι αναλλοίωτες των ευκλείδειων μετασχηματισμών. Επομένως

Κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός

- απεικονίζει ευθείες σε ευθείες,
- απεικονίζει παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες,
- διατηρεί τον απλό λόγο των τριών συνευθειακών σημείων.

Αποδεικνύεται επίσης ότι

Κάθε ευκλείδειος μετασχηματισμός

- διατηρεί τον βαθμό του πολλωνύμου.
- απεικονίζει μια έλλειψη σε έλλειψη με την ίδια εκκεντρότητα.
- απεικονίζει μια υπερβολή σε υπερβολή με την ίδια εκκεντρότητα.
- απεικονίζει μια παραβολή σε παραβολή με την ίδια εστιακή παράμετρο.



## 4.4 Μερικά Θεωρήματα Ευκλείδειας επιπεδομετρίας.

**Θεώρημα 4.4.1.** (Μενέλαος) Έστω  $\triangle ABC$  ένα τρίγωνο.

Αν μια ευθεία  $\ell$  που δεν περιέχει καμιά κορυφή του τριγώνου τέμνει τις ευθείες  $(AB)$ ,  $(BC)$  και  $(CA)$  στα σημεία  $C'$ ,  $A'$  και  $B'$ , αντίστοιχα, τότε

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1 \quad (4.4)$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η σχέση (4.4), τότε τα σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  είναι συνευθειακά.

Απόδειξη. Από τα σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  πάνω στις πλευρές του  $\triangle ABC$  βρίσκονται δύο ή κανένα. Ας υποθέσουμε ότι  $A'$  και  $C'$  βρίσκονται πάνω στις πλευρές του  $\triangle ABC$ .

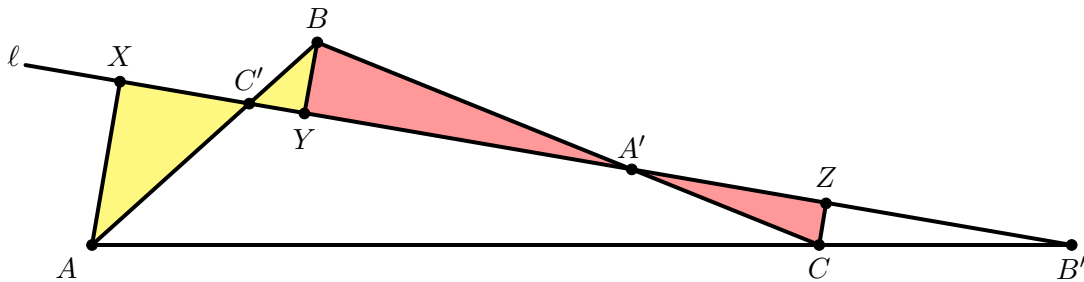
Προβάλλοντας τις κορυφές  $A, B, C$  στην ευθεία  $\ell$ , παίρνουμε τις ορθογώνιες προβολές  $X, Y, Z$ , αντίστοιχα. Έστω  $\sim$  συμβολίζει την ομοιότητα των τριγώνων. Τότε

$$\triangle C'AX \sim \triangle C'BY \implies \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{XA}{BY} \quad (4.5)$$

$$\triangle A'BY \sim \triangle A'CZ \implies \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{BY}{CZ} \quad (4.6)$$

$$\triangle B'CZ \sim \triangle B'AX \implies \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -\frac{CZ}{XA} \quad (4.7)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε την (4.4).



Η σχέση (4.4) αποδεικνύεται όμοια αν η  $\ell$  τέμνει και τις τρεις πλευρές στις προεκτάσεις τους.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (4.4). Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία  $\ell = (A'B')$  τέμνει την  $(AB)$  στο σημείο  $C''$ . Τότε από το ευθύ του θεωρήματος που αποδείξαμε προκύπτει ότι

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1 \quad (4.8)$$

Από τις (4.4) και (4.8) προκύπτει ότι

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}.$$

Επειδή ο απλός λόγος  $(ABM)$  προσδιορίζει μονοσήμαντα το σημείο  $M$ , προκύπτει ότι  $C'' = C'$ . Έρα, τα σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  είναι συνευθειακά.

□

**Θεώρημα 4.4.2.** (Ceva) Έστω ότι  $\triangle ABC$  είναι ένα τρίγωνο και τα σημεία  $A'$ ,  $B'$  και  $C'$ , διαφορετικά από τις κορυφές ανήκουν στις ευθείες  $BC$ ,  $CA$  και  $AB$ , αντίστοιχα. Οι ευθείες  $(AA')$ ,  $(BB')$  και  $(CC')$  τέμνονται σε ένα σημείο αν και μόνον αν

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = 1. \quad (4.9)$$

Απόδειξη. ( $\implies$ ) Έστω ότι οι ευθείες  $(AA')$ ,  $(BB')$  και  $(CC')$  τέμνονται στο σημείο  $T$ .

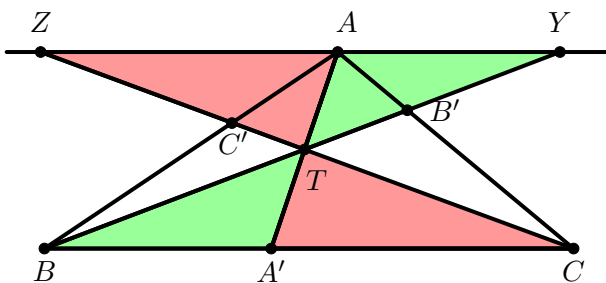
Πάνω στις πλευρές του  $\triangle ABC$  βρίσκονται ή και τα τρία τα σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , ή το ένα από τα τρία. Έστω ότι και τα τρία σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ανήκουν στις πλευρές του τριγώνου.

Τότε και οι τρεις απλοί λόγοι  $\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}$ ,  $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}$ ,  $\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}$  είναι θετικοί.

Από το  $A$  φερόνουμε μια ευθεία  $\ell \parallel (BC)$ . Έστω ότι  $\ell \cap (BB') = \{Y\}$  και  $\ell \cap (CC') = \{Z\}$ . Από την ομότητα των τριγώνων παίρνουμε

$$\triangle TAY \sim \triangle TBA' \implies \frac{BA'}{AY} = \frac{TA'}{TA} \quad (4.10)$$

$$\triangle TAZ \sim \triangle TCA' \implies \frac{A'C}{AZ} = \frac{TA'}{TA} \quad (4.11)$$



Από τις (4.10) και (4.11) προκύπτει ότι  $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AY}{AZ}$ . Επομένως

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{AY}{AZ} \quad (4.12)$$

Έχουμε επίσης από την ομότητα των τριγώνων:

$$\triangle C'AZ \sim \triangle C'BC \implies \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{AZ}{BC} \quad (4.13)$$

$$\triangle B'YA \sim \triangle B'BC \implies \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{BC}{AY} \quad (4.14)$$

πό τις (4.12), (4.13) και (4.14) παίρνουμε την (4.9).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η σχέση (4.9). Έστω ότι  $AA' \cap BB' = T$  και  $(CT) \cap (AB) = C''$ . Τότε όπως αποδείξαμε  $\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = 1$ . Επομένως  $\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}$ . Άρα,  $C' = C''$ .

Συνεπώς οι ευθείες  $(AA')$ ,  $(BB')$  και  $(CC')$  τέμνονται στο  $T$ .

Η απόδειξη στην περίπτωση που  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  δεν ανήκουν και τα τρία στις πλευρές του τριγώνου είναι όμοια.  $\square$

**Θεώρημα 4.4.3.** (Πάππου) Έστω ότι  $P, Q$  και  $R$  είναι σημεία μιας ευθείας και  $P', Q'$  και  $R'$  είναι σημεία μιας άλλης ευθείας. Αν  $QP' \cap Q'P = \{X\}$ ,  $QR' \cap RQ' = \{Z\}$  και  $PR' \cap RP' = \{Y\}$ , τότε τα σημεία  $X, Y$  και  $Z$  είναι συνευθειακά.

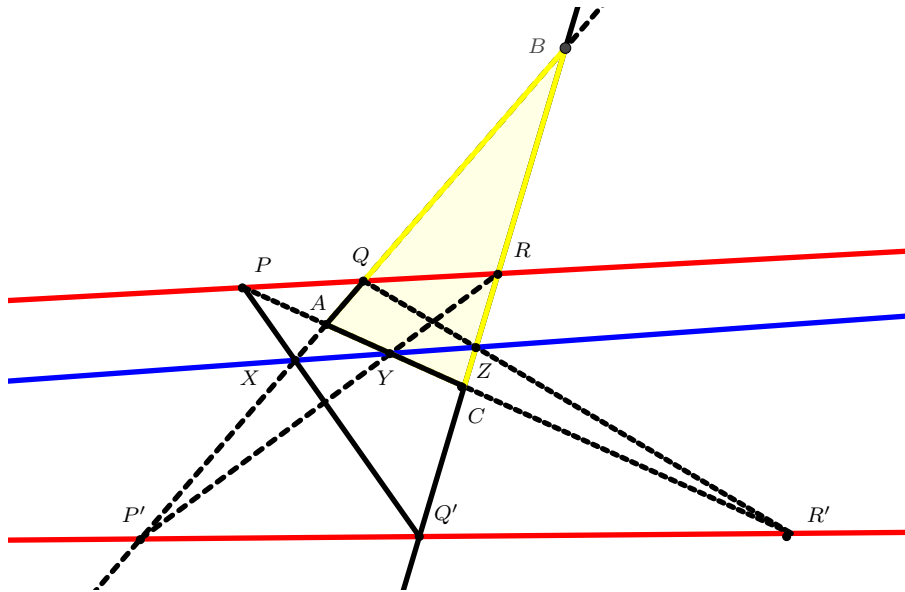
Απόδειξη. Εξετάζουμε 3 περιπτώσεις

1.  $(P'Q) \parallel (RQ')$ . Εφαρμόζοντας 5 φορές το θεώρημα του Μενέλαου στο τρίγωνο  $ABC$ , όπου

$$A = (P'Q) \cap (R'P), B = (P'Q) \cap (Q'R), C = (Q'R) \cap (R'P)$$

και στις 5 ευθείες του σχήματος που δεν διέρχονται από τις κορυφές του τριγώνου  $ABC$ :

$$(QR'), (P'R), (Q'P), (PQ), (P'Q')$$



παίρνουμε, αντίστοιχα:

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{ZC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR'}}{\overrightarrow{R'A}} = -1 \quad (4.15)$$

$$\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1 \quad (4.16)$$

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ'}}{\overrightarrow{Q'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}} = -1 \quad (4.17)$$

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}} = -1 \quad (4.18)$$

$$\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ'}}{\overrightarrow{Q'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR'}}{\overrightarrow{R'A}} = -1 \quad (4.19)$$

Αντιστρέφοντας τις (4.18) και (4.19) παίρνουμε

$$\frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{AQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{RC}}{\overrightarrow{BR}} \cdot \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{CP}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{P'B}}{\overrightarrow{AP'}} \cdot \frac{\overrightarrow{Q'C}}{\overrightarrow{BQ'}} \cdot \frac{\overrightarrow{R'A}}{\overrightarrow{CR'}} = -1. \quad (4.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (4.15), (4.16), (4.17) και (4.20) παίρνουμε

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{ZC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1.$$

Ήρα, από το θεώρημα του Μενέλαου,  $X, Y, Z$  είναι συνευθειακά.

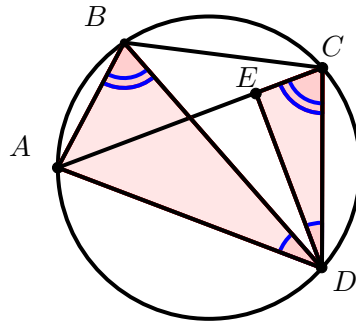
2.  $(P'Q) \parallel (RQ')$  και  $(Q'P) \parallel (R'Q)$ . Εφαρμόζουμε το το θεώρημα του Μενέλαου στο τρίγωνο  $ABC$ , όπου  $A = (Q'P) \cap (P'R)$ ,  $B = (Q'P) \cap (R'Q)$ ,  $C = (R'Q) \cap (P'R)$ .
3.  $(P'Q) \parallel (RQ')$  και  $(Q'P) \parallel (R'Q)$ . Τότε αποδεικνύεται ότι  $(PP') \parallel (RR')$ , οπότε συνεπάγεται ότι  $X, Y, Z$  είναι συνευθειακά.

□

**Θεώρημα 4.4.4.** (Πτολεμαίου) Αν ένα τετράπλευρο  $ABCD$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε το γινόμενο των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA. \quad (4.21)$$

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν οι διαγώνιοι του εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου διχοτομούν τις γωνίες του, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι τετράγωνο. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα 4.21 προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η διαγώνιος  $AD$  δεν διχοτομεί την γωνία  $D$  και ότι  $\widehat{ADB} < \widehat{CDB}$ . Έστω  $E \in AC$  τέτοιο ώστε  $\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$ .



Παρατηρώντας τα όμοια τρίγωνα συμπεραίνουμε:

$$\triangle CDE \sim \triangle BAD \implies \frac{AB}{EC} = \frac{BD}{DC} \iff AB \cdot DC = BD \cdot EC \quad (4.22)$$

$$\triangle DAE \sim \triangle DBC \implies \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD} \iff AD \cdot BC = BD \cdot AE \quad (4.23)$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες εξισώσεις των (4.22) και (4.23) κατά μέλη παίρνουμε την ζητούμενη ισότητα

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot EC + BD \cdot AE = BD(EC + AE) = BD \cdot AC.$$

□

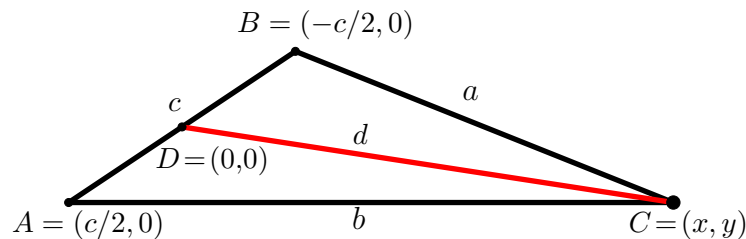
**Θεώρημα 4.4.5.** Έστω ότι  $\triangle ABC$  ένα τρίγωνο και  $CD$  είναι η διάμεσος από την κορυφή  $C$ . Αν  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  και  $d = |CD|$ , τότε

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2d^2 \quad (\text{ο τύπος του Απολλώνιου})$$

Απόδειξη. Επειδή η εκφώνηση του Θεωρήματος αφορά μήκη ευθύγραμμων τμημάτων, τα οποία είναι αναλλοίωτα της ευκλείδειας γεωμετρίας, αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα για τα σημεία  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  με

$$D = (0, 0) \quad A = \left(\frac{c}{2}, 0\right), \quad B = \left(-\frac{c}{2}, 0\right), \quad C = (x, y).$$

Διαφορετικά υπάρχει ισομετρία του επιπέδου που απεικονίζει το αρχικό τρίγωνο στο τρίγωνο που επιλέξαμε.



Παίρνουμε διαδοχικά:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 \\ b^2 &= \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 \\ d^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \implies a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2) + \frac{c^2}{2} = 2d^2 + \frac{c^2}{2}.$$

□

## 4.5 Ασκήσεις

**4.5.1.** Να αποδειχθεί ότι ένας αφινικός μετασχηματισμός  $f(\vec{v}) = Av + \vec{a}$  του  $\mathbb{R}^2$  είναι ισομετρία αν και μόνον αν  $A \in O(2, \mathbb{R})$ .

**4.5.2.** Δείξτε ότι  $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  που δίνεται από τον τύπο

$$t(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

είναι Ευκλείδειος μετασχηματισμός και βρείτε τον αντίστροφό του.

**4.5.3.** Να αποδειχθεί ότι η μοναδική ισομετρία  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  για την οποία  $T(0, 0) = (0, 0)$ ,  $T(1, 0) = (1, 0)$  και  $T(0, 1) = (0, 1)$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

**4.5.4.** Να αποδειχθεί ότι η μοναδική ισομετρία  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  για την οποία  $T(0, 0) = (0, 0)$ ,  $T(1, 0) = (1, 0)$  και  $T(0, 1) = (0, -1)$  είναι η ανάκλαση ως προς τον άξονα  $Ox$ .

**4.5.5.** Να αποδειχθεί ότι κάθε περιστροφή γύρω από το  $(0, 0)$  είναι σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες που διέρχονται από το  $(0, 0)$ .

**Απάντηση:** Έστω  $Ro_\theta$  περιστροφή κατά γωνία  $\theta \in (-\pi, \pi]$  γύρω από το  $(0, 0)$ . Θεωρούμε τις ανακλάσεις  $Re_{\frac{\theta_1}{2}}$  και  $Re_{\frac{\theta_2}{2}}$ , όπου  $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$ . Στις ανακλάσεις αυτές αντιστοιχούν οι

ορθογώνιοι πίνακες  $\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix}$  και  $\begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix}$ .

Στην ισομετρία  $Re_{\frac{\theta_1}{2}} \circ Re_{\frac{\theta_2}{2}}$  αντιστοιχεί ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι πίνακας περιστροφής κατά γωνία  $\theta_1 - \theta_2$ . Συνεπώς, αρκεί να επιλέξουμε  $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$  με  $\theta_1 - \theta_2 = \theta + 2k\pi$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ . Οπότε  $Ro_\theta = Ro_{(\theta_1 - \theta_2)} = Re_{\frac{\theta_1}{2}} \circ Re_{\frac{\theta_2}{2}}$ .

**4.5.6.** Να αποδειχθεί ότι κάθε μεταφορά στο  $\mathbb{R}^2$  είναι σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες που είναι κάθετες στην διεύθυνση μεταφοράς, η μία από τις οποίες διέρχεται από το  $(0, 0)$  και η άλλη δεν διέρχεται από το  $(0, 0)$ .

**4.5.7.** Να αποδειχθεί ότι κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση το πολύ τριών ανακλάσεων.

**Υπόδειξη:** Έστω  $f$  είναι ισομετρία. Τότε  $f(\vec{v}) = C\vec{v} + \vec{u}$  όπου  $C$  ορθογώνιος πίνακας. Ήρα,  $f = T_{\vec{u}} \circ S$ , όπου  $S(\vec{v}) = C\vec{v}$ . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:  $\det(C) = 1$  και  $\det(C) = -1$ .

**4.5.8.** Προσδιορίστε την ευθεία ανάκλασης που αντιστοιχεί στη σύνθεση μιας περιστροφής γύρω από το σημείο  $(0, 0)$  και μιας ανάκλασης ως προς την ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(0, 0)$  και σχηματίζει γωνία  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$ . Δείξτε ότι η ευθεία αυτή εξαρτάται από την σειρά της σύνθεσης.

**4.5.9.** Να αποδειχθεί ότι η ανάκλαση ως προς την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  είναι σύνθεση της περιστροφής κατά γωνία  $-2\theta$  γύρω από την αρχή  $(0, 0)$  και ανάκλασης ως προς τον  $Ox$ .

**4.5.10.** Να αποδειχθεί ότι η ανάκλαση ως προς την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  είναι σύνθεση της ανάκλασης ως προς τον  $Ox$  και περιστροφής κατά γωνία  $2\theta$  γύρω από την αρχή  $(0, 0)$ .

**4.5.11.** Να αποδειχθεί ότι η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς οποιεσδήποτε δύο ευθείες είναι περιστροφή, εκτός αν οι ευθείες είναι παράλληλες οπότε η σύνθεση των ανακλάσεων είναι μεταφορά.

**Υπόδειξη:** Αν οι δύο ευθείες τέμνονται, τότε μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το σημείο τομής να είναι το  $(0, 0)$ . Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η μία ευθεία να είναι ο άξονας  $Ox$  και η άλλη  $y = a$ .

# Κεφάλαιο 5

## Σφαιρική Γεωμετρία

### 5.1 Ορισμός της σφαιρικής γεωμετρίας.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$S(2) = \{G|_{\mathbb{S}^2} : \text{όπου } G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ισομετρία για την οποία } G(\bar{0}) = \bar{0}\}$$

**Πρόταση 5.1.1.** Το ζεύγος  $(\mathbb{S}^2, S(2))$  είναι γεωμετρία.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι το σύνολο  $S(2)$  αποτελείται από 1-1 και επί αυτοαπεικονίσεις της  $\mathbb{S}^2$ .

Έστω  $g \in S(2)$  και  $p \in \mathbb{S}^2$ . Τότε  $g = G|_{\mathbb{S}^2}$ , όπου  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισομετρία για την οποία  $G(\bar{0}) = \bar{0}$ . Επομένως

$$\|g(p) - \bar{0}\| = \|G(p) - \bar{0}\| = \|G(p) - G(\bar{0})\| = \|p - \bar{0}\| = 1.$$

Ήρα,  $g(p) \in \mathbb{S}^2$ . Συνεπώς  $g(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$ .

Η  $g$  είναι 1-1 ως περιορισμός της ισομετρίας  $G$  στη σφαίρα  $\mathbb{S}^2$ .

Θα δείξουμε ότι  $g$  είναι επί. Θεωρούμε  $s \in \mathbb{S}^2$ . Τότε  $s = G(G^{-1}(s))$ . Η  $G^{-1}$  είναι ισομετρία για την οποία  $G^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}$ . Ήρα  $G^{-1}(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$ . Για  $p = G^{-1}(s)$  έχουμε  $p \in \mathbb{S}^2$  και  $s = G(p)$ .

Ήρα,  $s = g(p)$ .

Επειδή  $\tau_{\mathbb{S}^2} = \tau_{\mathbb{R}^3}|_{\mathbb{S}^2}$  ( $\tau_X : X \rightarrow X$  ταυτοτική απεικόνιση), το ότι το ζεύγος  $(\mathbb{S}^2, S(2))$  είναι γεωμετρία έπεται από τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν  $g \in S(2)$ , τότε  $g = G|_{\mathbb{S}^2}$  όπου  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισομετρία για την οποία  $G(\bar{0}) = \bar{0}$ . Επομένως  $G^{-1}$  είναι ισομετρία για την οποία  $G^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}$  Ήρα,  $g^{-1} = G^{-1}|_{\mathbb{S}^2}$ .
2. Αν  $g, h \in S(2)$ , τότε  $g = G|_{\mathbb{S}^2}$  και  $h = H|_{\mathbb{S}^2}$  όπου  $G, H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισομετρίες για τις οποίες  $G(\bar{0}) = H(\bar{0}) = \bar{0}$ . Ήρα,  $g \circ h = G|_{\mathbb{S}^2} \circ H|_{\mathbb{S}^2} = (G \circ H)|_{\mathbb{S}^2}$ , όπου  $G \circ H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισομετρία για την οποία  $(G \circ H)(\bar{0}) = \bar{0}$ .

□

**Ορισμός 5.1.2.** Το ζεύγος  $(\mathbb{S}^2, S(2))$  καλείται σφαιρική γεωμετρία.

Κάθε  $g \in S(2)$  καλείται σφαιρικός μετασχηματισμός.

## 5.2 Βασικές ιδιότητες της σφαίρας.

Συμβολίζουμε με  $S(K, R)$  την σφαίρα κέντρου  $K$  και ακτίνας  $R$ .

- Μια σφαίρα  $S(K, R)$  και ένα επίπεδο  $\Pi$ 
  - δεν τέμνονται όταν η απόσταση του  $K$  από το  $\Pi$  είναι  $> R$ ,
  - τέμνονται σε ένα σημείο όταν η απόσταση του  $K$  από το  $\Pi$  είναι  $R$ ,
  - τέμνοντα κατά έναν κύκλο όταν η απόσταση του  $K$  από το  $\Pi$  είναι  $< R$ .
- Οι σφαίρες  $S(K_1, r)$  και  $S(K_2, R)$  με  $r < R$ 
  - δεν τέμνονται όταν  $K_2K_1 > R + r$  ή  $K_2K_1 < R - r$ ,
  - τέμνονται σε ένα σημείο όταν  $K_2K_1 = R + r$  ή  $K_2K_1 = R - r$ ,
  - τέμνοντα κατά έναν κύκλο όταν  $R - r < K_2K_1 < R + r$ .

## 5.3 Βασικά στοιχεία της σφαιρικής γεωμετρίας

- *Ευθεία (σφαιρική) της  $(\mathbb{S}^2, S(2))$*  είναι ο κάθε μέγιστος κύκλος της  $\mathbb{S}^2$  (τομή της  $\mathbb{S}^2$  με επίπεδο που διέρχεται από το  $O = (0, 0, 0)$ ).
- *Γωνία μεταξύ των σφαιρικών ευθειών* είναι το μέγεθος σε ακτίνια της κάθε διέδρης γωνίας μεταξύ των αντίστοιχων επιπέδων.  
Επειδή τα επίπεδα σχηματίζουν δύο ζεύγη ίσων διέδρων γωνιών (4 δέδρες γωνίες συνολικά), οι γωνίες μεταξύ των σφαιρικών ευθειών είναι δύο:  $\alpha$  και  $\pi - \alpha$ .  
Εναλλακτικά, γωνία μεταξύ των σφαιρικών ευθειών  $\ell$  και  $m$  είναι η γωνία μεταξύ των εφαπτομένων των κύκλων  $\ell$  και  $m$  στο σημείο τομής  $P$ .
- *Σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων  $A, B \in S^2$*  είναι το μέγεθος σε ακτίνια εκείνης της γωνίας  $\widehat{AOB}$ , η οποία είναι  $\leq \pi$ .  
Εναλλακτικά, η σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων  $A, B \in S^2$  είναι το μήκος σε ακτίνια του μικρότερου από τα τόξα του μοναδικού μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία αυτά.  
Η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων της  $S^2$  είναι  $\pi$ .
- *Πόλοι και ισημερινοί.* Σε κάθε σφαιρική ευθεία  $\varepsilon$  αντιστοιχεί μοναδική διάμετρος  $d_\varepsilon$  της σφαίρας που είναι κάθετη στο επίπεδό της. Τα δύο σημεία τομής της  $d_\varepsilon$  με την  $\mathbb{S}^2$  λέγονται *πόλοι της  $\varepsilon$* .  
Σε κάθε σημείο  $N \in \mathbb{S}^2$  αντιστοιχεί μοναδική σφαιρική ευθεία  $\varepsilon_N$  που είναι η τομή της  $\mathbb{S}^2$  με το επίπεδο που διέρχεται από το  $O = (0, 0, 0)$  και είναι κάθετο στην ακτίνα  $ON$ . Η ευθεία  $\varepsilon_N$  καλείται *ισημερινός του  $N$* .



Έυκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες προτάσεις.

**Πρόταση 5.3.1.** Κάθε σημείο  $N$  απέχει από κάθε σημείο  $P$  του ισημερινού  $\varepsilon_N$  σφαιρική απόσταση  $\pi/2$ .

**Πρόταση 5.3.2.** Κάθε σφαιρική ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $N$  είναι κάθετη στον ισημερινό του  $\varepsilon_N$ .

**Πρόταση 5.3.3.** Κάθε σφαιρική ευθεία που είναι κάθετη στην σφαιρική ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται και από τους δύο πόλους της  $\varepsilon$ .

## 5.4 Ευκλείδεια αξιωμάτων στη σφαιρική γεωμετρία.

$1_{\mathbb{S}^2}$  Από δύο μη αντιποδικά σημεία  $A, B \in \mathbb{S}^2$  διέρχεται μοναδική σφαιρική ευθεία.

Από δύο αντιποδικά σημεία  $A, B \in \mathbb{S}^2$  διέρχεται άπειρου πλήθους σφαιρικές ευθείες (άπειρου πλήθους “μήκη” που διέρχονται από τους δύο πόλους  $A$  και  $B$ ).

$2_{\mathbb{S}^2}$  Για κάθε σημείο  $A$  μιας σφαιρικής ευθείας  $\ell$  και για κάθε  $0 < \varepsilon < \pi$  υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία  $M_1, M_2 \in \ell$  με απόσταση από το  $A$  ίση με  $\varepsilon$ .

$3_{\mathbb{S}^2}$  Για κάθε  $K \in \mathbb{S}^2$  και για κάθε  $0 < \alpha < \pi$ , τότε υπάρχει μοναδικός σφαιρικός κύκλος  $S(K, \alpha)$  στην σφαιρική γεωμετρία  $(\mathbb{S}^2, S(2))$  με κέντρο  $K \in \mathbb{S}^2$  και ακτίνα  $\alpha$ .

Ο σφαιρικός αυτός κύκλος είναι η τομή της  $\mathbb{S}^2$  με το επίπεδο που είναι κάθετο στην ακτίνα  $OK$  και διέρχεται από το σημείο  $T \in (OK)$  για το οποίο  $\overrightarrow{OT} = \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OK}$ . Ο σφαιρικός κύκλος  $(K, \alpha)$  συμπίπτει με τον σφαιρικό κύκλο  $(K', \pi - \alpha)$ , όπου  $K'$  αντιποδικό σημείο του  $K$ . Για κάθε σημείο  $K \in \mathbb{S}^2$  ο σφαιρικός κύκλος με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $(\pi/2)$  είναι ο ισημερινός  $\varepsilon_K$  του  $K$ .

$4_{\mathbb{S}^2}$  Αν ένα σημείο  $P \in \mathbb{S}^2$  δεν είναι πόλος της σφαιρικής ευθείας  $\varepsilon \subset \mathbb{S}^2$ , τότε από το  $P$  υπάρχει μοναδική σφαιρική κάθετος στην  $\varepsilon$  (είναι η τομή της  $\mathbb{S}^2$  με το επίπεδο που διέρχεται από τους πόλους της  $\varepsilon$  και το  $P$ ).

Από έναν πόλο  $P$  μιας σφαιρικής ευθείας  $\varepsilon \subset \mathbb{S}^2$  διέρχονται άπειρου πλήθους σφαιρικές κάθετοι προς την  $\varepsilon$  (είναι το σύνολο των σφαιρικών ευθειών που περιέχουν και τους δύο πόλους της  $\varepsilon$ ).

$5_{\mathbb{S}^2}$  Οποιοσδήποτε δύο σφαιρικές ευθείες τέμνονται σε δύο αντιποδικά σημεία (δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες στην σφαιρική γεωμετρία).

## 5.5 Σφαιρικές ισομετρίες.

**Πρόταση 5.5.1.** Η απεικόνιση  $d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow [0, \infty)$ , η οποία σε οποιαδήποτε δύο σημεία της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  αντιστοιχεί την σφαιρική απόσταση είναι μετρική.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η  $d_{\mathbb{S}^2}$  ικανοποιεί τα τρία αξιώματα της μετρικής.

$$(i) \quad d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = 0 \iff A = B$$

$$(ii) \quad d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = d_{\mathbb{S}^2}(B, A) \text{ για κάθε } A, B \in \mathbb{S}^2.$$

$$(iii) \quad \text{Έστω } A, B, C \in \mathbb{S}^2. \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι } \widehat{AOC} \leq \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$

Έστω ότι  $A, B, C$  ανήκουν σε μέγιστο κύκλο. Αν  $B$  ανήκει στο τόξο του μέγιστου κύκλου με άκρα τα σημεία  $A$  και  $C$  που είναι  $\leq \pi$ , τότε  $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$ . Αν  $B$  ανήκει στο τόξο του μέγιστου κύκλου με άκρα τα σημεία  $A$  και  $C$  που είναι  $> \pi$ , τότε  $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} > \pi \geq \widehat{AOC}$ .

Έστω ότι  $A, B, C$  δεν ανήκουν σε μέγιστο κύκλο. θεωρούμε το τετράεδρο  $OABC$ . Είναι γνωστό ότι σε μία τριεδρη γωνία που αντιστοιχεί σε ημιευθείες  $[OA)$ ,  $[OB)$  και  $[OC)$  οι γωνία μεταξύ οποιονδήποτε από τις δύο ημιευθείες είναι μικρότερη από το άθροισμα μεταξύ των δύο άλλων. 'ρα,  $\widehat{AOC} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$ .  $\square$

**Ορισμός 5.5.2.** Σφαιρική ισομετρία καλείται κάθε απεικόνιση  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  που διατηρεί την σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων της  $\mathbb{S}^2$ , δηλαδή

$$d_{\mathbb{S}^2}(p, q) = d_{\mathbb{S}^2}(g(p), g(q)), \forall p, \forall q \in \mathbb{S}^2.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι:

- Κάθε σφαιρική ισομετρία διατηρεί την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$ .
- Κάθε  $g \in S(2)$  είναι σφαιρική ισομετρία.
- Κάθε σφαιρική ισομετρία είναι 1-1 και επί.
- Το σύνολο όλων των σφαιρικών ισομετριών με την πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

**Πρόταση 5.5.3.** Κάθε σφαιρική ισομετρία απεικονίζει τις σφαιρικές ευθείες σε σφαιρικές ευθείες.

Απόδειξη. Έστω  $g$  σφαιρική ισομετρία. Τότε  $g$  είναι ισομετρία του μετρικού χώρου  $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$  επί του εαυτού του. 'ρα, η απεικόνιση  $g$  είναι ομοιομορφισμός.

Θεωρούμε μια σφαιρική ευθεία  $\ell$ . Έστω  $K$  είναι ένας πόλος της  $\ell$ . Τότε η  $\ell$  συμπίπτει με τον σφαιρικό κύκλο  $S(K, \frac{\pi}{2})$ . Έστω  $x \in \ell$ . Επειδή η  $g$  είναι ισομετρία, έπεται ότι  $d_{\mathbb{S}^2}(g(x), g(K)) = d_{\mathbb{S}^2}(K, x) = \frac{\pi}{2}$ . 'ρα,  $g(x) \in S(g(K), \frac{\pi}{2})$ , όπου  $S(g(K), \frac{\pi}{2})$  είναι σφαιρικός κύκλος κέντρου  $g(K)$  και ακτίνας  $\frac{\pi}{2}$ . Επομένως  $S(g(K), \frac{\pi}{2})$  είναι ισημερινός του  $g(K)$ . 'ρα,  $S(g(K), \frac{\pi}{2})$  είναι μέγιστος κύκλος που περιέχει την ομοιομορφική εικόνα  $g(\ell)$  του μέγιστου κύκλου  $\ell$ . Επειδή κανένας κύκλος δεν μπορεί να περιέχει γνήσιο υποσύνολο ομοιομορφικό με κύκλο, έπεται ότι  $g(\ell) = S(g(K), \frac{\pi}{2})$ . Δηλαδή  $g(\ell)$  είναι μέγιστος κύκλος.  $\square$

Θα δείξουμε ότι κάθε σφαιρική ισομετρία ανήκει στο σύνολο  $S(2)$ .

**Πρόταση 5.5.4.** *Αν μια σφαιρική ισομετρία  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  αφήνει σταθερά τρία σημεία  $P, Q, R \in \mathbb{S}^2$  που δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο, τότε  $f$  είναι ταυτοτική ( $f \equiv \tau_{\mathbb{S}^2}$ ).*

*Απόδειξη.* Έστω  $M \in \mathbb{S}^2 \setminus \{P, Q, R\}$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $f(M) = M$ .

Έστω ότι  $r_P = PM$ ,  $r_Q = QM$ ,  $r_R = RM$ . Επειδή η  $f$  διατηρεί και την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων της σφαίρας και αφήνει σταθερά τα  $P, Q, R$ , συμπεραίνουμε ότι  $M, f(M) \in S(P, r_P) \cap S(Q, r_Q) \cap S(R, r_R) \cap \mathbb{S}^2$ .

Ίσως να δείξουμε ότι  $S(P, r_P) \cap S(Q, r_Q) \cap S(R, r_R) \cap \mathbb{S}^2$  αποτελείται από ένα σημείο, οπότε  $M = f(M)$ . Αν  $M$  είναι αντιδιαμετρικό του  $P$  ως προς  $\mathbb{S}^2$  (ή του  $Q$ , ή του  $R$ ), τότε  $S(P, r_P) \cap \mathbb{S}^2$  αποτελείται από ένα σημείο.

Έστω ότι  $M$  δεν είναι αντιδιαμετρικό κανενός από τα  $P, Q, R$ , τότε οι αριθμοί  $r_P, r_Q, r_R$  είναι μικρότεροι από την διάμετρο της  $\mathbb{S}^2$ , επομένως οι σφαίρες  $S(P, r_P)$ ,  $S(Q, r_Q)$ ,  $S(R, r_R)$  τέμνουν τη σφαίρα  $\mathbb{S}^2$  κύκλους  $C_P, C_Q, C_R$ , αντίστοιχα. Ίρα,

$$S(P, r_P) \cap S(Q, r_Q) \cap S(R, r_R) \cap \mathbb{S}^2 = C_P \cap C_Q \cap C_R.$$

Ας υποθέσουμε ότι  $C_P \cap C_Q \cap C_R$  περιέχει δύο σημεία  $M_1$  και  $M_2$ . Τότε  $M_1M_2$  είναι χορδή και τον τριών κύκλων  $C_P, C_Q, C_R$ . Ίρα,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  είναι παράλληλο στα επίπεδα και των τριών κύκλων  $C_P, C_Q, C_R$ . Όμως  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$  είναι κάθετα στα επίπεδα των κύκλων  $C_P, C_Q, C_R$ , αντίστοιχα. Ίρα,  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$  είναι κάθετα στο ίδιο διάνυσμα  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Έστω  $\Pi$  είναι το επίπεδο που διέρχεται από το  $O$  και είναι κάθετο στο  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Τότε  $P, Q, R \in \Pi$ . Ίρα,  $P, Q, R$  ανήκουν στον μέγιστο κύκλο  $\Pi \cap \mathbb{S}^2$ , που είναι άτοπο.  $\square$

**Πρόταση 5.5.5.** *Κάθε σφαιρική ισομετρία ορίζεται μονοσήμαντα από εικόνες τριών σημείων που δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $g, t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  διατηρούν την σφαιρική απόσταση και απεικονίζουν τα σημεία  $P, Q, R \in \mathbb{S}^2$  που δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο της  $\mathbb{S}^2$  στα σημεία  $P', Q', R' \in \mathbb{S}^2$ , αντίστοιχα. Τότε η  $g^{-1} \circ t$  διατηρεί την σφαιρική απόσταση και αφήνει τα  $P, Q, R$  σταθερά. Ίρα,  $g^{-1} \circ t = \tau_{\mathbb{S}^2}$ . Συνεπώς  $g = t$ .  $\square$

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη ένα βασικό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του  $\mathbb{R}^3$ :

**Θεώρημα 5.5.6.** *Αν  $P_1, P_2, P_3, P_4$  και  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$  είναι τετράδες μη συνεπίπεδων και ανά τρία μη συνευθειακών σημείων του  $\mathbb{R}^3$  με  $P_i P_j = P'_i P'_j$  για οποιαδήποτε  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , τότε υπάρχει μοναδική ισομετρία  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $f(P_i) = P'_i$  για κάθε  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .*

**Πρόταση 5.5.7.** *Αν  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  είναι σφαιρική ισομετρία, τότε  $g \in S(2)$ .*

*Απόδειξη.* Έστω ότι τρία σημεία  $P, Q, R \in \mathbb{S}^2$  δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο και  $g(P) = P', g(Q) = Q', g(R) = R'$ . Τότε τα σημεία  $P', Q', R' \in \mathbb{S}^2$  δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο. Επομένως τα σημεία  $O, P, Q, R$  είναι μη συνεπίπεδα και τα σημεία  $O, P', Q', R'$  είναι μη συνεπίπεδα. Επειδή  $g$  διατηρεί τις σφαιρικές αποστάσεις μεταξύ των σημείων της  $\mathbb{S}^2$ , η  $g$  διατηρεί και τις Ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των σημείων (στα ίσα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσες χορδες). Επομένως  $PQ = P'Q', QR = Q'R', RP = R'P'$ .

Έχουμε επίσης  $PO = P'O = 1$ ,  $QO = Q'O = 1$ ,  $RO = R'O = 1$ .

Συνεπώς υπάρχει μοναδική ισομετρία  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  η οποία απεικονίζει τα μη συνεπίπεδα σημεία  $O, P, Q, R$  στα μη συνεπίπεδα σημεία  $O, P', Q', R'$ , αντίστοιχα.

Για την  $G$  έχουμε ότι  $G(O) = O$ , άρα  $G|_{\mathbb{S}^2} \in S(2)$ ,

$$G|_{\mathbb{S}^2}(P) = P', \quad G|_{\mathbb{S}^2}(Q) = Q', \quad G|_{\mathbb{S}^2}(R) = R'.$$

Επειδή κάθε σφαιρική ισομετρία της  $\mathbb{S}^2$  ορίζεται μονοσήμαντα από εικόνες τριών σημείων που δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο, προκύπτει ότι  $G|_{\mathbb{S}^2} = g$ . 'ρα,  $g \in S(2)$ .  $\square$

Επειδή κάθε στοιχείο της ομάδας  $S(2)$  είναι σφαιρική ισομετρία, από την Πρόταση 5.5.7 έπεται το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 5.5.8.** Το σύνολο  $S(2)$  αποτελείται από όλες της σφαιρικές ισομετρίες.

## 5.6 Σφαιρικές ευθείες ως ελάχιστες διαδρομές.

Αν κατά μήκος ενός τόξου  $\tau(A, B)$  που ενώνει δύο σημεία  $A$  και  $B$  μιας επιφάνειας το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας (διάνυσμα καμπυλότητας της προβολής του τόξου στο εφαπτόμενο επίπεδο) μηδενίζεται, τότε το τόξο  $\tau(A, B)$  έχει το μικρότερο μήκος από όλα τα τόξα που ενώνουν το  $A$  και  $B$ . Οι καμπύλες των επιφανειών κατά μήκος των οποίων το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας μηδενίζεται καλούνται γεωδαισιακές γραμμές. Οι γεωδαισιακές γραμμές της σφαίρας είναι οι μέγιστοι κύκλοι. Επομένως η σφαιρικές ευθείες είναι διαδρομές ελάχιστου μήκους, όπως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι οι ευθείες.

**Πρόταση 5.6.1.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο σημεία μιας σφαίρας και  $\widehat{AB}$  είναι το μικρότερο τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ .

Από όλα τα διφορίσιμα τόξα της σφαίρας με άκρα  $A$  και  $B$ , το  $\widehat{AB}$  έχει το μικρότερο μήκος.

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε το μήκος ενός τόξου  $\tau$  με  $\ell(\tau)$ . Έστω  $\tau$  ένα διφορίσιμο τόξο της σφαίρας με άκρα  $A$  και  $B$ . Ας υποθέσουμε ότι  $A$  και  $B$  δεν είναι αντιδιαμετρικά, οπότε  $\ell(\widehat{AB}) < \pi$ . Επιλέγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$  έτσι ώστε το  $Oxz$ -επίπεδο να είναι το επίπεδο που περιέχει το μέγιστο κύκλο  $C$  που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$  και ορίζουμε τον άξονα  $Oz$  διαλέγοντας τα σημεία  $N = (0, 0, 1)$  και  $S = (0, 0, -1)$  πάνω στο  $C$  να μην ανήκουν στην τομή  $\tau \cap C$  και τα σημεία  $A$  και  $B$  να ανήκουν στο ίδιο ημικύκλιο  $\widehat{NS}$  (αποδεικνύεται ότι αν αυτό δεν γίνεται, τότε  $\ell(\tau) \geq \pi > \ell(\widehat{AB})$ .)

Η σφαίρα χωρίς τους πόλους  $N$  και  $S$  έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi,$$

όπου για ένα σημείο  $M$  της σφαίρας διαφορετικό από τα  $N$  και  $S$ ,  $\varphi$  είναι η γωνία  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$  προς το  $\vec{M}'$  που είναι η τομή του μέγιστου κύκλου από τα  $M$  και  $N$  με το  $Oxy$  και που είναι η τομή του μέγιστου κύκλου από τα  $M$  και  $N$  με το  $Oxy$  και  $\theta$  η γωνία μεταξύ των  $\vec{N}$  και

Το  $\tau$  έχει διανυσματική εξίσωση:  $\vec{r}(t) = (r \cos \phi(t) \sin \theta(t), r \sin \phi(t) \sin \theta(t), r \cos \theta(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , όπου  $\vec{r}(0) = \vec{r}(\phi(0), \theta(0)) = \vec{A}$  και  $\vec{r}(1) = \vec{r}(\phi(1), \theta(1)) = \vec{B}$ ,  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ .

Υποθέτουμε ότι  $\theta(1) > \theta(0)$ . Οπότε  $\ell(\widehat{AB}) = r(\theta(1) - \theta(0))$ . Επομένως

$$\vec{r}'^2(t) = (-r \sin \phi(t) \sin \theta(t) \phi'(t) + r \cos \phi(t) \cos \theta(t) \theta'(t))^2 +$$

$$+ (r \cos \phi(t) \sin \theta(t) \phi'(t) + r \sin \phi(t) \cos \theta(t) \theta'(t))^2 + (-r \sin \theta(t) \theta'(t))^2.$$

Ήρα,

$$\ell(\tau) = \int_0^1 |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^1 r \sqrt{\sin^2 \theta(t) \phi'^2(t) + \cos^2 \theta(t) \theta'^2(t) + \sin^2 \theta(t) \theta'^2(t)} dt =$$

$$= \int_0^1 r \sqrt{\sin^2 \theta(t) \phi'^2(t) + \theta'^2(t)} dt \geq \int_0^1 r \sqrt{\theta'^2(t)} dt = \int_0^1 r |\theta'(t)| dt \geq r \int_0^1 \theta'(t) dt =$$

$$= r(\theta(1) - \theta(0)) = \ell(\widehat{AB}).$$

Αν  $A$  και  $B$  είναι αντιδιαμετρικά, τότε υπάρχουν τόξα  $\tau_1 = \widehat{AC}$  και  $\tau_2 = \widehat{CB}$ , τέτοια ώστε  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ , όπου  $C$  ανήκει σε κάποιο μέγιστο κύκλο που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ . Τότε  $A$  και  $C$  δεν είναι αντιδιαμετρικά και  $C$  και  $B$  δεν είναι αντιδιαμετρικά. Οπότε  $\ell(\tau) = \ell(\tau_1) + \ell(\tau_2) \geq \ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB}) \geq \ell(\widehat{AB})$ .  $\square$

## 5.7 Εμβαδα σχημάτων στη σφαιρική γεωμετρία.

Το εμβαδόν της σφαίρας ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας κυκλικού κυλίνδρου διαμέτρου και ύψους ίσου με τη διάμετρο της σφαίρας, αν εξαιρεθούν οι βάσεις, όπως απέδειξε ο Αρχιμήδης πάνω από 2200 χρόνια πριν χωρίς τη χρήση του λογισμού.

Επομένως το εμβαδόν της σφαίρας ακτίνας  $r$  ισούται με  $2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$  (εμβαδο των 4 μέγιστων κύκλων) και, άρα, το εμβαδόν της της μοναδιαίας σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  είναι  $4\pi$ .

Συμφωνούμε ότι ανάμεσα στα σχήματα της  $\mathbb{S}^2$  υπάρχουν σχήματα με μετρήσιμα εμβαδά και τα λέμε μετρήσιμα σχήματα. Σε κάθε μετρήσιμο σχήμα  $\Sigma$  μπορεί να αντιστοιχηθεί ένας θετικός αριθμός  $E(\Sigma)$  έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες (αξιώματα):

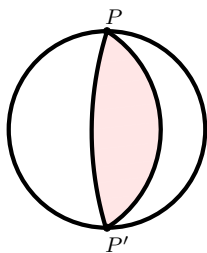
(i) Ίσα μετρήσιμα σχήματα έχουν τον ίδιο εμβαδόν.

(ii)  $E(\mathbb{S}^2) = 4\pi$

(iii) Αν ένα μετρήσιμο σχήμα  $\Sigma$  είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους σχημάτων  $\Sigma_i$ ,  $i \in \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ , που δεν επικαλύπτονται (δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία), τότε  $E(\Sigma) = \sum_{i \in \mathbb{N}'} E(\Sigma_i)$ .

### 5.7.1 Εμβαδόν διγώνου.

Έστω ότι δύο σφαιρικές ευθείες  $\ell$  και  $m$  τέμνονται στα δύο αντιδιαμετρικά σημεία  $P$  και  $P'$  και σχηματίζουν γωνίες  $\alpha$  και  $\pi - \alpha$ . Οι  $\ell$  και  $m$  χωρίζουν την  $\mathbb{S}^2$  σε 4 “φέτες”, καθεμιά από αυτές καλείται *δίγωνο* (ή *άτρακτος*) και αντιστοιχεί σε κάποια από τις 4 διέδρες γωνίες των επιπέδων της  $\ell$  και της  $m$ . Κάθε δίγωνο περιορίζεται από δύο ημικύκλια που καλούνται πλευρές του διγώνου, τα σημεία  $P$  και  $P'$  καλούνται κορυφές του διγώνου. Το μέγεθος του διγώνου είναι το μέγεθος σε ακτίνια της αντίστοιχης διέδρης γωνίας. Ισοδύναμα, το μέγεθος του διγώνου είναι το μέγεθος σε ακτίνια της γωνίας μεταξύ των εφαπτομένων στα ημικύκλια στο σημείο  $P$ . Ήρα, δύο γωνίες είναι ίσες με  $\alpha \in (0, \pi)$  και δύο με  $\pi - \alpha$ .



Σχήμα 5.1: 'τρακτος ή δίγωνο.

Επειδή κάθε σφαιρική ισομετρία είναι περιορισμός στη σφαίρα  $S^2$  μιας ισομετρίας του  $\mathbb{R}^3$  και το μέγεθος μιας διεδρης γωνίας είναι αναλλοίωτο στις ισομετρίες του  $\mathbb{R}^3$ , συνεπάγεται η ακόλουθη Πρόταση.

**Πρόταση 5.7.1.** Το μέγεθος ενός διγώνου είναι αναλλοίωτο στις σφαιρικές ισομετρίες.

**Πρόταση 5.7.2.** Το εμβαδόν  $E_\alpha$  του διγώνου μέγεθους  $\alpha$  της  $S^2$  ισούται με  $2\alpha$ .

Απόδειξη.  $E_\alpha = \frac{E(S^2)}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot \alpha = 2\alpha$ . □

**Σημείωση 5.7.3.** Το εμβαδόν του διγώνου μέγεθους  $\alpha$  μιας σφαίρας ακτίνας  $r$  είναι  $2\alpha r^2$ .

### 5.7.2 Εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου.

Για οποιαδήποτε δύο σημεία  $A, B \in S^2$  συμβολίζουμε με  $A\overset{\circ}{O}B$  τη μοναδική σφαιρική ευθεία (τον μέγιστο κλυκλο) που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ .

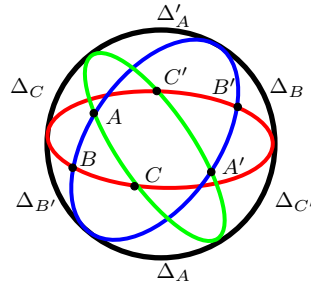
Ένα σφαιρικό τρίγωνο ορίζεται από τρία σημεία  $A, B, C$  (κορυφές του τριγώνου) της σφαίρας που δεν βρίσκονται στον ίδιο μέγιστο κύκλο και από τα τρία τόξα (πλευρές του τριγώνου)  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$  ελάχιστου μήκους. Το σφαιρικό τρίγωνο  $\Delta ABC$  είναι η περιοχή της  $S^2$  που περιορίζεται από την καμπύλη  $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA}$  και περιέχεται σε κάποιο δίγωνο που ορίζεται από τους μέγιστους κύκλους  $A\overset{\circ}{O}B$  και  $B\overset{\circ}{O}C$  (Σχήμα 5.2). Συμβολίζουμε με  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  τα μεγέθη των διγώνων με κορυφές  $A, B, C$ , αντίστοιχα, που περιέχουν το σφαιρικό τρίγωνο  $\Delta ABC$ .

**Θεώρημα 5.7.3.** Το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου  $\Delta ABC$  υπολογίζεται από τον τύπο

$$E(\Delta ABC) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι τα σημεία αντιδιαμετρικά των  $A, B, C$  είναι τα  $A', B', C'$ , αντίστοιχα. Τότε  $AB = A'B', BC = B'C'$  και  $AC = A'C'$ . Επειδή τα σημεία  $A, B, C$  δεν ανήκουν σε κανένα μέγιστο κύκλο, υπάρχει σφαιρική ισομετρία  $g \in S(2)$  που απεικονίζει το σφαιρικό τρίγωνο  $ABC$  στο αντιδιαμετρικό του σφαιρικό τρίγωνο  $A'B'C'$ . 'ρα,  $E(ABC) = E(A'B'C')$ , διότι ίσα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά.

Από τα επίπεδα των τριών σφαιρικών ευθειών  $(AB), (BC)$  και  $(AC)$  ορίζονται 12 δίγωνα (4 από τις τα επίπεδα των  $(AB)$  και  $(BC)$ , 4 από τις τα επίπεδα των  $(AB)$  και  $(AC)$ , 4 από τις τα επίπεδα των  $(AC)$  και  $(BC)$ ).

Σχήμα 5.2: Το σφαιρικό τρίγωνο  $\Delta ABC$ 

Έστω ότι  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$  και  $\Delta_C$  είναι εκείνα από τα 12 δίγωνα που περιέχουν το σφαιρικό τρίγωνο  $\Delta ABC$  και έχουν ως κορυφές τα σημεία  $A, B, C$ , αντίστοιχα.

Έστω ότι  $\Delta_{A'}$ ,  $\Delta_{B'}$  και  $\Delta_{C'}$  είναι εκείνα από τα 12 δίγωνα που περιέχουν το σφαιρικό τρίγωνο  $\Delta A'B'C'$  και έχουν ως κορυφές τα σημεία  $A', B', C'$ , αντίστοιχα.

Κάθε σημείο της σφαίρας που δεν ανήκει στα σφαιρικά τρίγωνα  $\Delta ABC$  και  $\Delta A'B'C'$  ανήκει μόνο σε ένα από τα δίγωνα  $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_{A'}, \Delta_{B'}, \Delta_{C'}$ .

Επειδή  $\Delta ABC = \Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C$  και  $\Delta A'B'C' = \Delta_{A'} \cap \Delta_{B'} \cap \Delta_{C'}$ , έπεται ότι

$$\begin{aligned} 4\pi &= E(\Delta_{A'}) + E(\Delta_{B'}) + E(\Delta_{C'}) + E(\Delta_A) + E(\Delta_B) + E(\Delta_C) - \\ &\quad - 2E(\Delta ABC) - 2E(\Delta A'B'C') = \\ &= 2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C} + 2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C} - 4E(\Delta ABC) \\ &\implies E(\Delta ABC) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi. \end{aligned}$$

□

**Πόρισμα 5.7.4.** Το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι  $> \pi$ .

**Πόρισμα 5.7.5.** Δύο όμοια σφαιρικά τρίγωνα (τρίγωνα που έχουν τις γωνίες ίσες μια προς μία) έχουν το ίδιο εμβαδόν.

## 5.8 Σφαιρική τριγωνομετρία.

Έστω  $\Delta ABC$  σφαιρικό τρίγωνο της μοναδιαίας σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  στο οποίο οι πλευρές  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{AC}$  και  $\widehat{AB}$  είναι ίσες με  $a = \widehat{BOC}$ ,  $b = \widehat{AOC}$  και  $c = \widehat{AOB}$ , αντίστοιχα.

**Πρόταση 5.8.1.** Αν  $A$  και  $B$  δύο σημεία της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  με καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_A, y_A, z_A)$  και  $(x_B, y_B, z_B)$ , αντίστοιχα, τότε η σφαιρική απόσταση  $d$  μεταξύ των  $A$  και  $B$  δίνεται από τον τύπο

$$\cos d = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B.$$

**Πρόταση 5.8.2.** Κάθε σφαιρικό τρίγωνο εγγράφεται σε σφαιρικό κύκλο.

*Απόδειξη.* Οι τρεις κορυφές του σφαιρικού τριγώνου  $ABC$  ορίζουν μονοσήμαντα ένα επίπεδο  $\pi$  που τις περιέχει. Το επίπεδο  $\pi$  τέμνει τη σφαίρα κατά έναν κύκλο  $K$ . Η κορυφές του σφαιρικού τριγώνου  $ABC$  ανήκουν στον κύκλο  $K$ . □

**Πυθαγόρειο Θεώρημα στο σφαιρικό τρίγωνο:** Αν το σφαιρικό τρίγωνο  $\triangle ABC$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $\widehat{C}$ , τότε  $\cos c = \cos a \cos b$ .

*Απόδειξη.* Επειδή  $\widehat{C} = \pi/2$ , μπορούμε να επιλέξουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$  έτσι ώστε  $C = (0, 0, 1)$ , το  $Oxz$ -επίπεδο να είναι το επίπεδο των σημείων  $O, C, A$  και  $Oyz$ -επίπεδο να είναι το επίπεδο των σημείων  $O, C, B$ . Τότε  $A = (x_A, 0, z_A)$  και  $B = (0, y_B, z_B)$ . Επειδή τα διανύσματα  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  είναι μοναδιαία, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos \widehat{BOC} = \vec{B} \cdot \vec{C} = z_B \\ \cos b &= \cos \widehat{AOC} = \vec{A} \cdot \vec{C} = z_A \\ \cos c &= \cos \widehat{AOB} = \vec{A} \cdot \vec{B} = z_A z_B\end{aligned}$$

Έρα,  $\cos c = \cos a \cos b$ . □

**Παρατήρηση 5.8.3.** Από τη σειρά Taylor του συνημιτόνου έχουμε:

$$\begin{aligned}\cos a &= 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4!} - \dots, \\ \cos b &= 1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{4!} - \dots, \\ \cos c &= 1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

Οπότε,  $\cos c \approx 1 - \frac{c^2}{2}$ . Βρίσκοντας το γινόμενο κατά Cauchy των πρώτων δυο σειρών πέρνουμε

$$\cos a \cos b = 1 + \left(-\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) + \dots \approx 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Συνεπώς  $a^2 + b^2 \approx c^2$ .

**Θεώρημα 5.8.4.** (Τριών καθέτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας.)

Έστω  $\Pi$  ένα επίπεδο του χώρου,  $A$  ένα σημείο του χώρου που δεν ανήκει στο  $\Pi$  και  $A_\pi$  η ορθογώνια προβολή του  $A$  στο  $\Pi$  και  $L \in \Pi \setminus \{A_\pi\}$ .

Μια ευθεία  $\ell$  του  $\Pi$  που διέρχεται από το  $L$  είναι κάθετη στην  $(LA)$  αν και μόνον αν  $\ell$  είναι κάθετη στην  $LA_\pi$ .

**Νόμος των ημιτόνων στο σφαιρικό τρίγωνο:**  $\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $H$  είναι η προβολή του  $A$  στο επίπεδο  $BOC$ .

Ας υποθέσουμε ότι  $H \notin (OB)$  και  $H \notin (OC)$ . Έστω ότι  $L$  είναι η προβολή του  $A$  στο  $OB$  και  $M$  είναι η προβολή του  $A$  στο  $OC$ . Τότε  $AL = OA \sin \widehat{AOB} = \sin c$  και  $AM = OA \sin \widehat{AOC} = \sin b$ . Από το θεώρημα τριών καθέτων:  $HL \perp OB$  και  $HM \perp OC$ .

Έρα,  $\widehat{HLA} = \widehat{B}$  και  $\widehat{HMA} = \widehat{C}$ . Επομένως

$$HA = AL \sin \widehat{B} = \sin c \sin \widehat{B} \text{ και } HA = AM \sin \widehat{C} = \sin b \sin \widehat{C}.$$

Έρα,  $\sin c \sin \widehat{B} = \sin b \sin \widehat{C}$ , δηλαδή  $\frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$ .

Στην περίπτωση που  $H \in (OB)$  ή  $H \in (OC)$  η απόδειξη είναι όμοια.

Όμοια αποδεκνύεται ότι  $\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b}$ . □



Νόμος των συνημιτόνων για τις πλευρές του σφαιρικού τριγώνου:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$$

Νόμος των συνημιτόνων για τις γωνίες του σφαιρικού τριγώνου:

$$\cos \hat{A} = \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a - \cos \hat{B} \cos \hat{C}$$

## 5.9 Ισότητα σφαιρικών τριγώνων.

Δύο σφαιρικά τρίγωνα  $\Delta ABC$  και  $\Delta A'B'C'$  καλούνται ίσα όταν υπάρχει σφαιρική ισομετρία  $g \in S(2)$  με  $g(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ ,

**Θεώρημα 5.9.1.** Τα όμοια σφαιρικά τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη. Έστω ότι  $\Delta ABC$  και  $\Delta A'B'C'$  είναι δύο σφαιρικά τρίγωνα στα οποία

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

Από τον νόμο των συνημιτόνων για τις γωνίες του σφαιρικού τριγώνου προκύπτει ότι  $a = a'$ ,  $b = b'$  και  $c = c'$ . Έρα,  $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{BC} = \widehat{B'C'}$  και  $\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$ . Από την Πρόταση 5.5.5 υπάρχει μοναδική σφαιρική ισομετρία  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  για την οποία  $g(A) = A'$ ,  $g(B) = B'$  και  $g(C) = C'$ .  $\square$

**Σημείωση 5.9.2.** Αποδεικνύεται ότι εκτός από το κριτήριο ισότητας ΓΓΓ που αποδείχθηκε παραπάνω, κριτήρια ισότητας σφαιρικών τριγώνων είναι και τα ΠΠΠ, ΠΓΠ και ΓΠΓ, που ισχύουν και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δεν είναι κριτήρια ισότητας τα ΓΓΠ και ΠΠΓ.

## 5.10 Στερεογραφική προβολή.

Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Θέτουμε  $N = (0, 0, 1)$ .

Στερεογραφική προβολή είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση  $p : \mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$  που ορίζεται ως εξής: σε κάθε  $A \in \mathbb{S}^2 \setminus N$  αντιστοιχούμε το σημείο  $p(A) = A^*$ , που είναι η τομή της ευθείας  $(NA)$  με το  $Oxy$ -επίπεδο.

Ορίζοντας  $p(N) = \infty$ , παίρνουμε απεικόνιση της σφαίρας στο εκτεταμένο επίπεδο  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .

Για κάθε ευθεία  $\varepsilon$  του  $\mathbb{R}^2$  το σύνολο  $\varepsilon \cup \{\infty\}$  καλείται *εκτεταμένη ευθεία*.

**Θεώρημα 5.10.1.** Έστω  $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  η στερεογραφική προβολή. Τότε

$$p(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \quad \text{για κάθε } (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

$$p^{-1}(x^*, y^*) = \left( \frac{2x^*}{x^{*2} + y^{*2} + 1}, \frac{2y^*}{x^{*2} + y^{*2} + 1}, \frac{x^{*2} + y^{*2} - 1}{x^{*2} + y^{*2} + 1} \right), \quad \text{για κάθε } (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$$

Απόδειξη. Η ευθεία  $\varepsilon_A$  που διέρχεται από τα σημεία  $N = (0, 0, 1)$  και  $A = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  έχει διανυσματική εξίσωση :

$$r(t) = (xt, yt, 1 + (z - 1)t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Έστω  $A^* = p(A)$ . Τότε  $A^* = \varepsilon_{A \cap Oxy} = (x^*, y^*, 0)$ . Ύρα,  $A^*$  αντιστοιχεί στο  $t^*$  για το οποίο  $1 + (z - 1)t^* = 0$ . Συνεπώς  $t^* = \frac{1}{1-z}$  και  $r(t^*) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$ , δηλαδή  $p(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ .

Η ευθεία  $\varepsilon_{A^*}$  που διέρχεται από το  $N = (0, 0, 1)$  και  $A^* = (x^*, y^*, 0) \in Oxy$  έχει διανυσματική εξίσωση:

$$r^*(t) = (x^*t, y^*t, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Έστω  $A = p^{-1}(A^*)$ . Τότε  $A = \varepsilon_{A^*} \cap \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} = (x, y, z)$  με  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Επομένως  $A$  αντιστοιχεί στο  $t_A \neq 0$  για το οποίο  $(x^*t_A)^2 + (y^*t_A)^2 + (1 - t_A)^2 = 1$ . Ύρα,  $t_A = \frac{2}{x^{*2} + y^{*2} + 1}$ .

Συνεπώς  $p^{-1}(x^*, y^*) = r^*(t_A) = \left(\frac{2x^*}{x^{*2} + y^{*2} + 1}, \frac{2y^*}{x^{*2} + y^{*2} + 1}, \frac{x^{*2} + y^{*2} - 1}{x^{*2} + y^{*2} + 1}\right)$ .

□

**Πόρισμα 5.10.2.** Η στερεογραφική προβολή  $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της  $p$  και από το Θεώρημα 5.10.1 συνεπάγεται ότι η  $p$  είναι 1-1, επί και συνεχής, και ότι  $p^{-1}$  είναι συνεχής. Ύρα, η  $p$  είναι ομοιομορφισμός. □

**Λήμμα 5.10.1.** Έστω ότι μια καμπύλη  $C$  του  $\mathbb{R}^2$  και μια επιφάνεια  $S$  του  $\mathbb{R}^3$  ορίζονται από τις λείες παραμετρικοποιήσεις  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I$  ανοικτό διάστημα του  $\mathbb{R}$ ) και  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , αντίστοιχα.

Αν  $\varepsilon$  είναι η εφαπτομένη της  $C$  στο σημείο  $A$ , τότε οι καμπύλες  $r(C)$  και  $r(\varepsilon)$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $r(A)$ .

Απόδειξη. Έστω ότι  $\vec{\beta}(t) = (x(t), y(t))$  και  $\vec{r}(x, y) = (f(x, y), g(x, y), h(x, y))$ .

Η εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C$  στο  $A = \beta(t_0) = (x_0, y_0)$  έχει εξίσωση

$$\varepsilon : \vec{\gamma}(t) = (x(t_0) + x'(t_0)t, y(t_0) + y'(t_0)t) = (x_1(t), x_2(t)) \implies$$

$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (x'_1(t), x'_2(t)), \quad \forall t \in I.$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο  $r(A)$  της  $r(C) = r(\beta(t)) = r(x(t), y(t))$  είναι το

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_x(x_0, y_0)x'(t_0) + \vec{r}_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο  $r(A)$  της  $r(\varepsilon) = r(\gamma(t)) = r(x_1(t), x_2(t))$  είναι το

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_x(x_0, y_0)x'_1(t_0) + \vec{r}_y(x_0, y_0)x'_2(t_0) = \vec{r}_x(x_0, y_0)x'(t_0) + \vec{r}_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \tau_1.$$

Ύρα, οι καμπύλες  $r(C)$  και  $r(\varepsilon)$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $r(A)$ . □

**Θεώρημα 5.10.4.** Η στερεογραφική προβολή  $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  διατηρεί της γωνίες μεταξύ των καμπυλών.

Απόδειξη. Έστω ότι  $A$  είναι κοινό σημείο των καμπυλών  $C_1$  και  $C_2$  της  $\mathbb{S}^2$ .

Η γωνία μεταξύ των καμπυλών  $p(C_1)$  και  $p(C_2)$  του  $\mathbb{R}^2$  στο κοινό σημείο  $p(A) = (x_A, y_A, 0)$  είναι η γωνία μεταξύ των εφαπτομένων τους  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στο σημείο  $p(A)$ , αντίστοιχα. Επειδή,

- (i) οι καμπύλες  $p^{-1}(\varepsilon_1)$  και  $C_1$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $A$ ,
- (ii) οι καμπύλες  $p^{-1}(\varepsilon_2)$  και  $C_2$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $A$ .

αρκεί να δείξουμε ότι οι εφαπτομένες των  $p^{-1}(\varepsilon_1)$  και  $p^{-1}(\varepsilon_2)$  στο κοινό σημείο  $A$  σχηματίζουν την ίδια γωνία με την γωνία μεταξύ των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

Θεωρούμε τις διανυσματικές εξισώσεις των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στο  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 : \vec{r}_1(t) &= (x_A + a_1 t, y_A + a_2 t), \quad a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ \varepsilon_2 : \vec{r}_2(t) &= (x_A + b_1 t, y_A + b_2 t), \quad b_1^2 + b_2^2 = 1\end{aligned}$$

Επειδή  $\vec{a} = (a_1, a_2) \parallel \varepsilon_1$  και  $\vec{b} = (b_1, b_2) \parallel \varepsilon_2$ , για μια από τις γωνίες  $\theta$  μεταξύ των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  έχουμε:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{a^2} \sqrt{b^2}} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη απεικόνιση  $p^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  της στερεογραφικής προβολής ορίζεται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Ήρα,

$$p^{-1}(\varepsilon_1) : \vec{r}(x_A + a_1 t, y_A + a_2 t), \quad p^{-1}(\varepsilon_2) : \vec{r}(x_A + b_1 t, y_A + b_2 t)$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα της  $p^{-1}(\varepsilon_1)$  στο  $A$  είναι  $\vec{k}_1 = a_1 \vec{r}_x(x_A, y_A) + a_2 \vec{r}_y(x_A, y_A)$ .

Το εφαπτόμενο διάνυσμα της  $p^{-1}(\varepsilon_2)$  στο  $A$  είναι  $\vec{k}_2 = b_1 \vec{r}_x(x_A, y_A) + b_2 \vec{r}_y(x_A, y_A)$ .

Επειδή  $\vec{r}_x^2(x_A, y_A) = \vec{r}_y^2(x_A, y_A)$  και  $\vec{r}_x(x_A, y_A) \vec{r}_y(x_A, y_A) = 0$ , για μια από τις γωνίες  $\tilde{\theta}$  μεταξύ των  $p^{-1}(\varepsilon_1)$  και  $p^{-1}(\varepsilon_2)$  έχουμε:

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{\sqrt{k_1^2} \sqrt{k_2^2}} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) \vec{r}_x^2(x_A, y_A)}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2) \vec{r}_x^2(x_A, y_A)} \sqrt{(b_1^2 + b_2^2) \vec{r}_x^2(x_A, y_A)}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \cos \theta.$$

□

## 5.11 Διδιάστατη ελλειπτική γεωμετρία.

Η διδιάστατη ελλειπτική γεωμετρία κατασκευάζεται από την σφαιρική γεωμετρία με την "συγκόληση" των αντιδιαμετρικών σημείων.

Θέτουμε  $\mathbb{E}\mathbb{L}^2 = \{\{P, -P\} : P \in \mathbb{S}^2\}$ .

Κάθε σφαιρική ισομετρία  $g \in S(2)$  απεικονίζει τα αντιδιαμετρικά σημεία  $P$  και  $-P$  σε αντιδιαμετρικά σημεία  $g(P)$  και  $g(-P) \equiv -g(P)$ . Σε κάθε σφαιρική ισομετρία  $g \in S(2)$  αντιστοιχούμε την ένα προς ένα και επί απεικόνιση  $\tilde{g} : \mathbb{E}\mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{E}\mathbb{L}^2$  που ορίζεται ως εξής:  $\tilde{g}(\{P, -P\}) = \{g(P), g(-P)\}$ . Προφανώς  $\tilde{S}(2) = \{\tilde{g} : g \in S(2)\}$  είναι ομάδα.

Η γεωμετρία  $(\mathbb{E}\mathbb{P}^2, \tilde{S}(2))$  καλείται *ελλειπτική*.

Ευθείες (ελλειπτικές ευθείες) στην  $(\mathbb{E}\mathbb{P}^2, \tilde{S}(2))$  είναι τα σύνολα  $\tilde{\ell} = \{\{P, -P\} : P \in \ell\}$ , όπου  $\ell$  είναι σφαιρική ευθεία.

Στην ελλειπτική γεωμετρία ισχύουν τα εξής:

- Οποιοδήποτε ζεύγος σημείων ορίζει μοναδική (ελλειπτική) ευθεία.
- Δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες (οποιοσδήποτε δύο ελλειπτικές ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο).

## 5.12 Ασκήσεις

**5.12.1.** Να αποδειχθεί ότι αν η απόσταση του κέντρου της σφαίρας  $S(K, R)$  από το επίπεδο  $\Pi$  είναι  $< R$ , τότε  $S(K, R) \cap \Pi$  είναι κύκλος.

**5.12.2.** Να αποδειχθεί ότι αν για τις σφαίρες  $S(K_1, r)$  και  $S(K_2, R)$  ισχύει

$$R - r < K_1 K_2 < R + r,$$

τότε  $S(K_1, r) \cap S(K_2, R)$  είναι κύκλος.

**5.12.3.** Να αποδειχθεί ότι κάθε γωνία σφαιρικού τριγώνου με κορυφές  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  και  $C = (0, 0, 1)$  είναι ορθή.

**5.12.4.** Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν παραλληλόγραμμα στη σφαιρική γεωμετρία.

**5.12.5.** Να αποδειχθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

- (α') Κάθε σημείο  $N \in \mathbb{S}^2$  απέχει από κάθε σημείο  $P$  του ισημερινού  $\varepsilon_N$  σφαιρική απόσταση  $\pi/2$ .
- (β') Κάθε σφαιρική ευθεία που διέρχεται από το  $N \in \mathbb{S}^2$  είναι κάθετη στον ισημερινό  $\varepsilon_N$  του  $N$ .
- (γ') Κάθε σφαιρική ευθεία που είναι κάθετη στην σφαιρική ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται και από τους δύο πόλους της  $\varepsilon$ .

**5.12.6.** Να κατασκευαστεί σφαιρικό τρίγωνο με εμβαδόν: (α)  $\pi/2$ , (β)  $\pi/6$ .

**5.12.7.** Να αποδειχθεί ότι στη σφαιρική γεωμετρία :

- (α') Αν οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι  $a, b, c$ , τότε  $a + b + c < 2\pi$ .
- (β') Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι  $> 2\pi$ .
- (γ') Το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου είναι  $< 2\pi$ .

**5.12.8.** Να αποδειχθεί ότι:

- (α') ΠΠΠ, ΠΓΠ, ΓΠΓ είναι κριτήρια ισότητας τριγώνων στη σφαιρική γεωμετρία.
- (β') ΠΠΓ και ΠΠΠ δεν είναι κριτήρια ισότητας τριγώνων στη σφαιρική γεωμετρία.

**5.12.9.** Έστω  $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  στερεογραφική προβολή. Να βρεθεί η σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων  $L, M \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  αν  $p(L) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  και  $p(M) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ .

**5.12.10.** Θεωρούμε την στερεογραφική προβολή  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  της σφαίρας στο εκτεταμένο επίπεδο. Να αποδειχθεί ότι η στερεογραφική προβολή του κύκλου  $\ell$ , που είναι η τομή της  $\mathbb{S}^2$  με το επίπεδο  $\Pi : ax + by + cz + d = 0, d \neq 0$ , είναι

(α') κύκλος του  $Oxy$ -επιπέδου όταν  $N = (0, 0, 1) \notin \ell$ .

(β') εκτεταμένη ευθεία του  $Oxy \cup \{\infty\}$  όταν  $N = (0, 0, 1) \in \ell$ .

**Απάντηση:** Ανικαθιστώντας τα  $x, y, z$  στην εξίσωση του επιπέδου από τους τύπους

$$x = \frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1}, y = \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1}, z = \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1}$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{2ax' + 2by' + c(x'^2 + y'^2 - 1)}{x'^2 + y'^2 + 1} + d = 0,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2ax' + 2by' + c(x'^2 + y'^2 - 1) + d(x'^2 + y'^2 + 1) = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$(c + d)x'^2 + (c + d)y'^2 + 2ax' + 2by' + (d - c) = 0$$

Ήρα,  $p(\ell)$  είναι κύκλος αν  $c \neq -d$  (δηλαδή  $N = (0, 0, 1) \notin \ell$ ) και  $p(\ell)$  είναι εκτεταμένη ευθεία αν  $c = -d$  (δηλαδή  $N = (0, 0, 1) \in \ell$ ).

**5.12.11.** Θεωρούμε την στερεογραφική προβολή  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  της σφαίρας στο εκτεταμένο επίπεδο. Να αποδειχθεί ότι η στερεογραφική προβολή της σφαιρικής ευθείας  $\ell$  είναι

(α') κύκλος του  $Oxy$ -επιπέδου όταν  $N = (0, 0, 1) \notin \ell$ .

(β') εκτεταμένη ευθεία του  $Oxy \cup \{\infty\}$  όταν  $N = (0, 0, 1) \in \ell$ .

(Υπόδειξη: Τροποποιήστε την λύση της προηγούμενης άσκησης.)

**5.12.12.** Έστω  $\ell$  είναι σφαιρική ευθεία, η οποία είναι η τομή της μοναδιαίας σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  με το επίπεδο  $\Pi : ax + by + cz = 0$  με  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  και  $c \neq 0$ .

(α') Να βρεθεί το  $p(N^*)$ , όπου  $N^*$  είναι συμμετρικό του  $N = (0, 0, 1)$  ως προς το  $\Pi$ .

(β') Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου  $p(\Pi \cap \mathbb{S}^2)$ .

(γ') Να αποδειχθεί ότι  $p(N^*)$  είναι κέντρο του κύκλου  $p(\Pi \cap \mathbb{S}^2)$ .

**5.12.13.** Δίνονται τα σημεία της σφαίρας  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ :

$$M = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), N = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ και } L = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \text{ Να βρεθούν:}$$

(α') Το (σφαιρικό) κέντρο και η (σφαιρική) ακτίνα του σφαιρικού κύκλου της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  που διέρχεται από τα  $M$ ,  $N$  και  $L$ .

(β') Το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχεται από τα  $M$ ,  $N$  και  $L$ .

**5.12.14.** Να αποδειχθεί ότι οι διάμεσοι ενός σφαιρικού τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο.

(Υπόδειξη: Τα επίπεδα των διαμέσων περιέχουν την ευθεία  $(OT)$ , όπου  $T$  είναι το σημείο τομής των διαμέσων του αντίστοιχου Ευκλείδειου τριγώνου.)

**5.12.15.** Να αποδειχθεί ότι τα ύψη ενός σφαιρικού τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο.

(Υπόδειξη: Τα επίπεδα των υψών περιέχουν την ευθεία  $(OT)$ , όπου  $T$  είναι το σημείο τομής των υψών του αντίστοιχου Ευκλείδειου τριγώνου.)

# Κεφάλαιο 6

## Προβολική Γεωμετρία.

### Η ιδέα της προβολικής γεωμετρίας.

Φανταζόμαστε ότι ένα αντικείμενο του τριδιάστατου χώρου είναι ανάμεσα σε μια πηγή φωτός και μια οθόνη προβολής. Όταν το αντικείμενο φωτίζεται, όλα τα σημεία του που ανήκουν στην ίδια ακτίνα φωτός δίνουν την ίδια σκιά την οθόνη. Έτσι μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε ακτίνα φωτός ένα σημείο της οθόνης. Είναι σαν να ταυτίζουμε την ακτίνα με σημείο. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε μια διδιάστατη εικόνα ενός τριδιάστατου αντικειμένου.

Ένας τρόπος να κατασκευάζουμε νέους χώρους είναι να ορίζουμε σχέσεις ισοδυναμίας σε ήδη γνωστούς χώρους. Κάθε κλάση ισοδυναμίας θα είναι σημείο του νέου χώρου.

Σε ένα διανυσματικό χώρο  $V$  πάνω στο σώμα  $K$  μια σχέση ισοδυναμίας στο  $V \setminus \{0_V\}$  μπορεί να οριστεί ως εξής: δύο μη μηδενικά διανύσματα  $v$  και  $u$  είναι ισοδύναμα όταν  $v = \lambda u$  για κάποιο  $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$ , δηλαδή  $v$  και  $u$  ανήκουν στον ίδιο μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας καλείται προβολικός χώρος του  $V$  και συμβολίζεται με  $P(V)$ .

Για  $V = \mathbb{R}^2$  παίρνουμε την προβολική ευθεία  $P(\mathbb{R}^2)$ .

Για  $V = \mathbb{R}^3$  παίρνουμε το προβολικό επίπεδο  $P(\mathbb{R}^3)$ .

### 6.1 Προβολικό επίπεδο $\mathbb{RP}^2$ .

**Ορισμός 6.1.1.** Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(0, 0, 0)$  του  $\mathbb{R}^3$  καλείται *προβολικό σημείο*.

Προβολικό επίπεδο  $\mathbb{RP}^2$  (ή  $P^2(\mathbb{R})$ ) είναι το σύνολο όλων των προβολικών σημείων.

Για κάθε  $P \in \mathbb{RP}^2$  θα συμβολίζουμε με  $\ell_P$  την αντίστοιχη ευθεία του  $\mathbb{R}^3$ .

Για κάθε ευθεία  $\ell$  του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  συμβολίζουμε με  $P_\ell$  το αντίστοιχο προβολικό σημείο.

#### 6.1.1 Ομογενείς συντεταγμένες προβολικών σημείων.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των ευθειών που διέρχονται από το σημείο  $(0, 0, 0)$  και των διευθύνσεων του  $\mathbb{R}^3$ .

Κάθε ευθεία  $\ell$  του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  ορίζεται μονοσήμαντα από ένα σημείο της διαφορετικό από το  $(0, 0, 0)$ . Αν  $(x, y, z) \in \ell$  και  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , τότε κάθε σημείο της  $\ell$  διαφορετικό από το  $(0, 0, 0)$  έχει συντεταγμένες  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  όπου  $\lambda \neq 0$ .

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ως εξής:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ τέτοιο ώστε } (x, y, z) = \lambda(x', y', z')$$

Η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει την διατεταγμένη τριάδα  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  συμβολίζεται με  $(x : y : z)$ . Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των προβολικών σημείων και του χώρου πηλίκου  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \sim$ .

Κάθε τριάδα  $(x : y : z)$  με  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$  ορίζει μονοσήμαντα ένα προβολικό σημείο  $P \in \mathbb{RP}^2$ , που είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $(x, y, z)$  και  $(0, 0, 0)$ .

**Ορισμός 6.1.2.** Θα λέμε ότι το προβολικό σημείο  $P$  έχει *ομογενείς συντεταγμένες*  $(x : y : z)$ , με  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ , όταν το σημείο  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  είναι σημείο της αντίστοιχης Ευκλείδειας ευθείας  $\ell_P$  του  $\mathbb{R}^3$ .

Οι ομογενείς συντεταγμένες ενός προβολικού σημείου  $P$  δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες. Αν  $(x : y : z)$  είναι ομογενείς συντεταγμένες ενός προβολικού σημείου  $P$  και  $\lambda \neq 0$ , τότε και  $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$  είναι ομογενείς συντεταγμένες του  $P$ .

## 6.2 Προβολικές ευθείες του $\mathbb{RP}^2$ .

**Ορισμός 6.2.1.** Κάθε υποσύνολο του  $\mathbb{RP}^2$  καλείται *προβολικό σχήμα*.

Προβολικά σχήματα είναι σύνολα που αποτελούνται από ευθείες του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχονται από το  $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$ . Επομένως, κάθε κώνος με κορυφή το  $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$  είναι προβολικό σχήμα.

**Ορισμός 6.2.2.** Για κάθε επίπεδο  $\Pi$  του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχονται από το  $(0, 0, 0)$  το σύνολο  $L_\Pi$  όλων των προβολικών σημείων που περιέχονται στο  $\Pi$  καλείται *προβολική ευθεία*.

Για κάθε προβολική ευθεία  $L$  θα συμβολίζουμε με  $\Pi_L$  το αντίστοιχο επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$ .

Για να γίνεται διάκριση στο γραπτό κείμενο μεταξύ των σημείων και ευθειών του  $\mathbb{R}^3$  και των (προβολικών) σημείων και (προβολικών) ευθειών του  $\mathbb{RP}^2$ , όταν θα αναφερόμαστε σε σημείο  $P$  και στην ευθεία  $L$  του  $\mathbb{RP}^2$  θα γράφουμε Σημείο  $P$  και Ευθεία  $L$ .

**Ορισμός 6.2.3.** Τα σημεία του  $Y \subseteq \mathbb{RP}^2$  καλούνται *συνευθειακά*, όταν υπάρχει προβολική ευθεία  $L$  με  $Y \subseteq L$ .

**Θεώρημα 6.2.4.** Κάθε προβολική ευθεία του  $\mathbb{RP}^2$  έχει σε ομογενείς συντεταγμένες εξίσωση της μορφής

$$ax + by + cz = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \quad (6.1)$$

και το σύνολο όλων των προβολικών σημείων με ομογενείς συντεταγμένες  $(x : y : z)$  που ικανοποιούν την (6.1) είναι μια προβολική ευθεία.

*Απόδειξη.* Έστω  $L$  μια προβολική ευθεία. Τότε  $\Pi_L$  είναι επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  και, άρα έχει στο  $\mathbb{R}^3$  εξίσωση:

$$ax + by + cz = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Ένα προβολικό σημείο  $(x : y : z)$  ανήκει στην  $L$  αν και μόνο αν η ευθεία  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , που διέρχεται από το  $(x, y, z)$  και  $(0, 0, 0)$  είναι υποσύνολο του επιπέδου  $\Pi_L$ . Δηλαδή αν και μόνον αν

$$a\lambda x + b\lambda y + c\lambda z = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$



Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με  $ax + by + cz = 0$ .

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι το σύνολο των  $(x : y : z)$  που ικανοποιούν την (6.1) είναι προβολική ευθεία. Θεωρούμε το επίπεδο  $\Pi$  του  $\mathbb{R}^3$  με εξίσωση (6.1). Τότε το  $\Pi$  διέρχεται από την αρχή, επομένως  $L_\Pi$  είναι προβολική ευθεία.

Ένα προβολικό σημείο  $P = (x : y : z)$  ικανοποιεί την (6.1) αν και μόνον αν η ευθεία  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι στο επίπεδο  $\Pi_L$ , που ισοδυναμεί με το να ανήκει το  $P$  στην προβολική ευθεία  $L$ .  $\square$

**Πόρισμα 6.2.5.** Οποιαδήποτε δύο διαφορετικά προβολικά σημεία ανήκουν σε μοναδική προβολική ευθεία.

Απόδειξη. Τα διαφορετικά Σημεία  $(a_1 : a_2 : a_3)$  και  $(b_1 : b_2 : b_3)$  ανήκουν στην Ευθεία

$$\left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| y + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| z = 0.$$

$\square$

**Πόρισμα 6.2.6.** Οποιαδήποτε δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται σε μοναδικό προβολικό σημείο.

Απόδειξη. Οι διαφορετικές Ευθείες  $(a_1x + a_2y + a_3z = 0$  και  $b_1x + b_2y + b_3z = 0)$  τέμνονται στο Σημείο  $\left( \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \right)$ .  $\square$

**Ορισμός 6.2.7.** Έστω ότι  $\mathcal{L}$  είναι ένα σύνολο προβολικών ευθειών και  $\mathcal{P}$  είναι ένα σύνολο προβολικών σημείων.

Θα λέμε ότι οι Ευθείες του  $\mathcal{L}$  συντρέχουν όταν η τομή τους είναι ένα Σημείο.

Θα λέμε ότι τα Σημεία του  $\mathcal{P}$  συντρέχουν (ή ότι είναι συνευθειακά) όταν ανήκουν σε μία Ευθεία.

Προφανώς τρία Σημεία  $(a_1 : a_2 : a_3)$ ,  $(b_1 : b_2 : b_3)$  και  $(c_1 : c_2 : c_3)$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\left| \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right| = 0$$

**Ορισμός 6.2.8.** Το σύνολο  $\{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$  καλείται *τρίγωνο αναφοράς*. Το Σημείο  $(1 : 1 : 1)$  καλείται *μοναδιαίο Σημείο*.

### 6.3 Επίπεδα προβολής (εναλλακτικό μοντέλο προβολικού επιπέδου) του $\mathbb{RP}^2$ .

**Ορισμός 6.3.1.** Έστω  $\Pi$  ένα επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$  που δεν περιέχει το  $(0, 0, 0)$ .

Συμβολίζουμε με  $\Pi_\infty$  το επίπεδο που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  και είναι παράλληλο στο  $\Pi$ .

- Το σύνολο  $\hat{\Pi} = \Pi \cup L_{\Pi_\infty}$  καλείται *επίπεδο προβολής*.
- Οι ευθείες του  $\Pi_\infty$  που διέρχονται από το  $(0, 0, 0)$  καλούνται *ιδεατά σημεία του  $\hat{\Pi}$* .
- Το σύνολο όλων των ιδεατών σημείων, δηλαδή η προβολική ευθεία  $L_{\Pi_\infty}$ , του  $\hat{\Pi}$  καλείται *ιδεατή Ευθεία του  $\hat{\Pi}$* .
- Τα σημεία του  $\Pi$  καλούνται *πραγματικά σημεία του επιπέδου προβολής  $\hat{\Pi}$* .
- Για κάθε Ευκλείδεια ευθεία  $\ell$  του  $\Pi$  συμβολίζουμε με  $\ell_\infty$  (σημείο της  $\ell$  στο άπειρο) το ιδεατό σημείο της  $L_{\Pi_\infty}$  που αντιστοιχεί στην ευθεία που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  και είναι παράλληλη στην  $\ell$ . Το σύνολο  $\ell \cup \{\ell_\infty\}$  καλείται *πραγματική ευθεία του  $\hat{\Pi}$* . Τα σημεία της  $\ell \cup \{\ell_\infty\}$  είναι τα πραγματικά σημεία της  $\ell$  και το ιδεατό σημείο  $\ell_\infty$ .

Εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες δύο προτάσεις.

**Πρόταση 6.3.2.** Δύο διαφορετικά σημεία ενός επιπέδου προβολής  $\hat{\Pi}$  περιέχονται σε μοναδική ευθεία του  $\hat{\Pi}$ .

**Πρόταση 6.3.3.** Δύο διαφορετικές ευθείες ενός επιπέδου προβολής  $\hat{\Pi}$  τέμνονται σε ένα σημείο.

Προβολή του  $\mathbb{RP}^2$  στο  $\hat{\Pi}$  είναι η 1-1 και επί απεικόνιση  $p_\Pi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \hat{\Pi}$  που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{RP}^2 \text{ και } \ell_P \not\parallel \Pi &\implies p_\Pi(P) = \ell_P \cap \Pi \\ P \in \mathbb{RP}^2 \text{ και } \ell_P \parallel \Pi &\implies p_\Pi(P) = P \in L_{\Pi_\infty}. \end{aligned}$$

Το επίπεδο προβολής που αντιστοιχεί στο επίπεδο  $\Pi_1 : z = 1$  καλείται *πρότυπο επίπεδο προβολής*. Η πρότυπη προβολή  $p_{\Pi_1} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \hat{\Pi}_1$  ορίζεται ως εξής:

$$p_{\Pi_1}(x : y : z) = (x/z, y/z, 1) \text{ για } z \neq 0.$$

$p_{\Pi_1}(x : y : 0) = \ell_{\frac{x}{y}}$  για  $y \neq 0$ , όπου  $\ell_{\frac{x}{y}}$  είναι το ιδεατό σημείο του  $\hat{\Pi}_1$  που αντιστοιχεί στην ευθεία του  $Oxy$  επιπέδου που διέρχεται από την αρχή και έχει διεύθυνση  $(\frac{x}{y}, 1, 0)$ .

$p_{\Pi_1}(x : 0 : 0)$  είναι το ιδεατό σημείο του  $\hat{\Pi}_1$  που αντιστοιχεί στον άξονα  $Ox$  του  $Oxy$  επιπέδου.

#### Παραδείγματα 6.3.4.

1. Η προβολή του Σημείου  $(2 : 4 : -2)$  στο  $\hat{\Pi}_1$  είναι το πραγματικό σημείο  $(-1, -2, 1)$ .
2. Η προβολή του Σημείου  $(4 : 4 : 0)$  στο  $\hat{\Pi}_1$  είναι το ιδεατό Σημείο της ιδεατής ευθείας  $L_{\Pi_\infty}$  που αντιστοιχεί στην ευθεία  $y = x$  του  $Oxy$  επιπέδου.

3. Στην επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  με εξίσωση

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 + F^2 + G^2 + H^2 \neq 0$$

αντιστοιχεί σχήμα  $F$  του  $\mathbb{RP}^2$ :

$$F = \{P = (x : y : z) \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0\}.$$

Τα σημεία  $(x : y : 1)$  του  $F$  προβάλλονται στην καμπύλη του επιπέδου  $z = 1$  με εξίσωση  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0$  και τα σημεία  $(x : y : 0)$  του  $F$  προβάλλονται στα ιδεατά σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ .

## 6.4 Προβολικές απεικονίσεις του $\mathbb{RP}^2$ .

Ο σκοπός μας θα είναι να ορίσουμε μια απεικόνιση  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  που να έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i)  $f$  είναι ένα προς ένα και επί
- (ii)  $f$  απεικονίζει προβολική ευθεία σε προβολική ευθεία.

**Παράδειγμα 6.4.1.** Θεωρούμε μια αφινική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  που ορίζεται από την

$$\text{σχέση } f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}),$$

$$\text{Αν } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{τότε } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

- (i) Η  $f$  απεικονίζει κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή σε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή.

Πράγματι, θεωρούμε ένα επίπεδο  $\Pi : ax + by + cz = 0$  που διέρχεται από την αρχή.

$$\Pi : (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \implies (a, b, c) A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

Επειδή  $(a, b, c) A^{-1}$  είναι κάποιος  $1 \times 3$  πίνακας  $(a', b', c')$ , έπεται ότι το  $\Pi$  απεικονίζεται στο επίπεδο  $a'x' + b'y' + c'z' = 0$ .

- (ii) Η  $f$  απεικονίζει κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή.

Πράγματι, θεωρούμε μια ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από την αρχή και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(a, b, c)$ .

Τότε  $\varepsilon : (x, y, z) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν  $f(x, y, z) = (x', y', z')$ , τότε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 a + a_2 b + a_3 c \\ b_1 a + b_2 b + b_3 c \\ c_1 a + c_2 b + c_3 c \end{pmatrix}$$

΄ρα,  $\varepsilon$  απεικονίζεται στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(a_1 a + a_2 b + a_3 c, b_1 a + b_2 b + b_3 c, c_1 a + c_2 b + c_3 c)$ .

Για  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$  ορίζουμε  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  ως εξής:

$$f(x : y : z) = (x' : y' : z'), \text{ όπου } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή,  $f(x : y : z) = (a_1 x + a_2 y + a_3 z : b_1 x + b_2 y + b_3 z : c_1 x + c_2 y + c_3 z)$ .

Η  $f$  είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη από τις ομογενείς συντεταγμένες του  $P \in \mathbb{RP}^2$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} f(\lambda x : \lambda y : \lambda z) &= (\lambda(a_1 x + a_2 y + a_3 z) : \lambda(b_1 x + b_2 y + b_3 z) : \lambda(c_1 x + c_2 y + c_3 z)) = \\ &= (a_1 x + a_2 y + a_3 z : b_1 x + b_2 y + b_3 z : c_1 x + c_2 y + c_3 z) = \\ &= f(x : y : z) \end{aligned}$$

**Ορισμός 6.4.2.** Προβολικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{RP}^2$  είναι μια απεικόνιση  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  για την οποία υπάρχει  $A \in GL(3, \mathbb{R})$  τέτοιος ώστε

$$f(x : y : z) = (x' : y' : z'), \text{ όπου } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A$  καλείται *συσχετισμένος* με στον προβολικό μετασχηματισμό  $f$ .

Το σύνολο όλων των προβολικών μετασχηματισμών του  $\mathbb{RP}^2$  συμβολίζεται με  $P(2)$ .

**Πόρισμα 6.4.3.** Έστω  $f \in P(2)$  και  $A \in GL(3, \mathbb{R})$  είναι ο συσχετισμένος πίνακας του  $f$ .

Αν  $(a', b', c') = (a, b, c)A^{-1}$ , τότε  $f$  απεικονίζει την Ευθεία  $ax + by + cz = 0$  στην Ευθεία  $a'x + b'y + c'z = 0$ .

**Θεώρημα 6.4.4.** Το σύνολο των προβολικών μετασχηματισμών  $P(2)$  με πράξη σύνθεσης των προβολικών απεικονίσεων είναι ομάδα.

*Απόδειξη.* Στη σύνθεση προβολικών μετασχηματισμών  $f$  με συσχετισμένο πίνακα  $A$  και  $g$  με συσχετισμένο πίνακα  $B$  αντιστοιχεί προβολικός μετασχηματισμός με συσχετισμένο πίνακα  $AB$ . ΄ρα, η σύνθεση προβολικών μετασχηματισμών είναι προβολικός μετασχηματισμός.

(i) Αν  $f \in P(2)$  και  $A \in GL(3, \mathbb{R})$  είναι συσχετισμένος στον  $f$ , τότε  $\det(A) \neq 0$ . Ο  $f^{-1}$  είναι ο προβολικός μετασχηματισμός με συσχετισμένο πίνακα  $A^{-1}$ .

(ii) Το ουδέτερο στοιχείο είναι ο μοναδιαίος πίνακας  $I \in GL(3, \mathbb{R})$ .

(iii) Επειδή ο πολλαπλασιασμός των πινάκων έχει προσεταιριστική ιδιότητα, η σύνθεση προβολικών απεικονίσεων έχει προσεταιριστική ιδιότητα.

□

**Ομάδα**  $PGL(3, \mathbb{R})$ .

Αν  $A_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$  είναι ο πίνακας συσχετισμένος με τον προβολικό μετασχηματισμό  $f$  και  $\lambda A_f \in GL(3, \mathbb{R})$ ,  $\lambda \neq 0$ , είναι ο πίνακας συσχετισμένος με τον προβολικό μετασχηματισμό  $g$ , τότε  $f \equiv g$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} f(x : y : z) &= (a_1x + a_2y + a_3z : b_1x + b_2y + b_3z : c_1x + c_2y + c_3z) \implies \\ g(x : y : z) &= (\lambda(a_1x + a_2y + a_3z) : \lambda(b_1x + b_2y + b_3z) : \lambda(c_1x + c_2y + c_3z)) = \\ &= (a_1x + a_2y + a_3z : b_1x + b_2y + b_3z : c_1x + c_2y + c_3z) \\ &= f(x : y : z) \implies f \equiv g. \end{aligned}$$

Στο σύνολο  $GL(3, \mathbb{R})$  ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$A \sim B \iff B = \lambda A, \lambda \neq 0.$$

Συμβολίζουμε  $PGL(3, \mathbb{R}) = GL(3, \mathbb{R}) / \sim$ .

Για κάθε  $A \in GL(3, \mathbb{R})$  το σύνολο όλων των πινάκων της μορφής  $\lambda A$ ,  $\lambda \neq 0$  είναι στοιχείο της  $PGL(3, \mathbb{R})$ , το οποίο θα το συμβολίζουμε με  $[A]$ .

Ορίζουμε την πράξη στο  $PGL(3, \mathbb{R})$  ως εξής:

$$[A] \cdot [B] = [A \cdot B].$$

Η πράξη παραπάνω είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη από τους πίνακες  $A$  και  $B$ .

Το σύνολο  $PGL(3, \mathbb{R})$  με την παραπάνω ορισμένη πράξη είναι ομάδα, η οποία συμβολίζεται επίσης με  $PGL(3, \mathbb{R})$ .

Η ομάδες  $P(2)$  και  $PGL(3, \mathbb{R})$  είναι ισομορφικές.

**Ορισμός 6.4.6.** Το ζεύγος  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$  καλείται Προβολική Γεωμετρία (στο επίπεδο).

## 6.5 Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας.

**Ορισμός 6.5.1.** Για δύο διαφορετικά προβολικά σημεία  $P, Q \in \mathbb{RP}^2$  θα συμβολίζουμε με  $PQ$  την μοναδική προβολική ευθεία που τα περιέχει. Λέμε ότι η  $PQ$  ενώνει τα  $P$  και  $Q$ . Τετράπλευρο στο  $\mathbb{RP}^2$  είναι οι τετράδα ανά τρία μη συνευθεικών προβολικών σημείων  $P, Q, R, S$  μαζί με προβολικές ευθείες  $PQ, QR, RS, SP$ , που τα ενώνουν.

Το τετράπλευρο με κορυφές  $P, Q, R, S$  συμβολίζεται με  $PQRS$ .

**Θεώρημα 6.5.2.** Αν  $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ ,  $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ ,  $R = (r_1 : r_2 : r_3)$  και  $S = (s_1 : s_2 : s_3)$  είναι ανά τρία μη συνευθειακά σημεία του  $\mathbb{RP}^2$ , τότε υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα σημεία  $P, Q, R$  και  $S$ , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Έστω ότι  $f(x : y : z) = (a_1x + a_2y + a_3z : b_1x + b_2y + b_3z : c_1x + c_2y + c_3z)$  και

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}). \text{ Τότε}$$

$$f(1 : 0 : 0) = (a_1 : b_1 : c_1) = (p_1 : p_2 : p_3) \implies (a_1, b_1, c_1) = u(p_1, p_2, p_3), \quad u \neq 0,$$

$$f(0 : 1 : 0) = (a_2 : b_2 : c_2) = (q_1 : q_2 : q_3) \implies (a_2, b_2, c_2) = v(q_1, q_2, q_3), \quad v \neq 0,$$

$$f(0 : 0 : 1) = (a_3 : b_3 : c_3) = (r_1 : r_2 : r_3) \implies (a_3, b_3, c_3) = w(r_1, r_2, r_3), \quad w \neq 0.$$

$$\text{Ύρα, } A = \begin{pmatrix} up_1 & vq_1 & wr_1 \\ up_2 & vq_2 & wr_2 \\ up_3 & vq_3 & wr_3 \end{pmatrix}, \text{ όπου } u \neq 0, \quad v \neq 0, \quad w \neq 0. \text{ Επίσης}$$

$$f(1 : 1 : 1) = (up_1 + vq_1 + wr_1 : up_2 + vq_2 + wr_2 : up_3 + vq_3 + wr_3) = (s_1 : s_2 : s_3) \implies$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} up_1 + vq_1 + wr_1 \\ up_2 + vq_2 + wr_2 \\ up_3 + vq_3 + wr_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \\ \lambda w \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0 \quad (6.2)$$

$$\text{Επειδή τα προβολικά σημεία } P, Q, R \text{ είναι μη συνευθειακά, } \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ύρα, το σύστημα (6.2) για κάθε  $\lambda \neq 0$  έχει μοναδική λύση  $(u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda)$ .

$$\text{Οι πίνακες } A_\lambda = \begin{pmatrix} u_\lambda p_1 & v_\lambda q_1 & w_\lambda r_1 \\ u_\lambda p_2 & v_\lambda q_2 & w_\lambda r_2 \\ u_\lambda p_3 & v_\lambda q_3 & w_\lambda r_3 \end{pmatrix} \text{ είναι ισοδύναμοι και είναι οι συσχετισμένοι πίνακες}$$

το ζητούμενου προβολικού μετασχηματισμού  $f$ . □

**Σημείωσεις 6.5.3.** Από την απόδειξη του θεωρήματος 6.5.2 συνεπάγεται ότι:

1. Αν  $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ ,  $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ ,  $R = (r_1 : r_2 : r_3)$  είναι προβολικά μη συνευθειακά σημεία του  $\mathbb{RP}^2$ , τότε υπάρχουν άπειρου πλήθους προβολικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν τα σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  στα σημεία  $P, Q, R$ , αντίστοιχα. Σε κάθε τριάδα  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  αντιστοιχεί προβολικός μετασχηματισμός  $f$  με

$$\text{συσχετισμένο πίνακα } A_f = \begin{pmatrix} up_1 & vq_1 & wr_1 \\ up_2 & vq_2 & wr_2 \\ up_3 & vq_3 & wr_3 \end{pmatrix}, \text{ που απεικονίζει τα σημεία } (1 : 0 : 0),$$

$(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  στα σημεία  $P, Q, R$ , αντίστοιχα.

2. Αν  $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ ,  $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ ,  $R = (r_1 : r_2 : r_3)$  και  $S = (s_1 : s_2 : s_3)$  είναι ανά τρία μη συνευθειακά σημεία του  $\mathbb{RP}^2$ , τότε ο μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  που απεικονίζει τα σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα σημεία  $P, Q, R$  και  $S$ , αντίστοιχα έχει συσχετισμένο πίνακα:

$$A_f = \begin{pmatrix} up_1 & vq_1 & wr_1 \\ up_2 & vq_2 & wr_2 \\ up_3 & vq_3 & wr_3 \end{pmatrix}, \text{ όπου } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

**Θεώρημα 6.5.4.** (Θεμελιώδες Θεώρημα Προβολικής Γεωμετρίας.)

Αν  $P, Q, R, S$  και  $P', Q', R', S'$  είναι τετράδες ανά τρία μη συνευθειακών σημείων του  $\mathbb{RP}^2$ , τότε υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  για τον οποίον ισχύει:  $f(P) = P', f(Q) = Q', f(R) = R',$  και  $f(S) = S'$ .

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5.2 υπάρχουν μοναδικοί προβολικοί μετασχηματισμοί  $f_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  και  $f_2 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  για τους οποίους ισχύει ότι:

$f_1$  απεικονίζει τα σημεία  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα σημεία  $P, Q, R,$  και  $S,$  αντίστοιχα, και

$f_2$  απεικονίζει τα σημεία  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα σημεία  $P', Q', R'$  και  $S',$  αντίστοιχα.

Συνεπώς,  $f = f_2 \circ f_1^{-1} \in P(2)$  απεικονίζει τα  $P, Q, R, S$  στα  $P', Q', R', S',$  αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε ότι  $q \in P(2)$  απεικονίζει τα σημεία  $P, Q, R, S$  στα  $P', Q', R', S',$  αντίστοιχα. Τότε οι προβολικοί μετασχηματισμοί  $f_2$  και  $q \circ f_1$  απεικονίζουν τα σημεία  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα σημεία  $P', Q', R'$  και  $S',$  αντίστοιχα. Έρα,

$$f_2 = q \circ f_1 \implies q = f_2 \circ f_1^{-1} \implies q = f.$$

□

**Πόρισμα 6.5.5.** Όλα τα τετράπλευρα του  $\mathbb{RP}^2$  είναι ισοδύναμα.

## 6.6 Δυϊσμός στην προβολική γεωμετρία.

Γνωρίζουμε ότι στο  $\mathbb{R}^3$  υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ μεταξύ των επιπέδων που διέρχονται από την αρχή και των διευθύνσεων του χώρου: σε κάθε επίπεδο  $a_1x + a_2y + a_3z = 0$  αντιστοιχεί μοναδική διεύθυνση  $(a_1 : a_2 : a_3)$  κάθετη στο επίπεδο, και αντίστροφα.

Η αντιστοιχία αυτή μεταφέρεται στο  $\mathbb{RP}^2$ : σε κάθε Ευθεία  $a_1x + a_2y + a_3z = 0$  αντιστοιχεί μοναδικό Σημείο  $(a_1 : a_2 : a_3),$  και αντίστροφα.

**Ορισμός 6.6.1.** Συμβολίζουμε με  $DIRP^2$  το σύνολο όλων των επιπέδων του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχονται από το  $(0, 0, 0).$

Το επίπεδο  $\Pi : a_1x + a_2y + a_3z = 0$  του  $\mathbb{R}^3$  ως στοιχείο του  $DIRP^2$  θα συμβολίζεται με  $P_\Pi.$  Η ομογενείς συντεταγμένες του σημείου  $P_\Pi$  είναι  $(a_1 : a_2 : a_3).$

Καλούμε Ευθεία του  $DIRP^2$  κάθε δέσμη επιπέδων που τέμνονται κατά ευθεία, η οποία διέρχεται από το  $(0, 0, 0).$

Σε κάθε ευθεία  $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$  με διεύθυνση  $(a_1 : a_2 : a_3)$  αντιστοιχεί η Ευθεία  $L_\ell$  του  $DIRP^2,$  η οποία σε ομογενείς έχει εξίσωση  $a_1x + a_2y + a_3z = 0.$

Πράγματι, έστω  $P_\Pi = (x : y : z) \in DIRP^2.$  Τότε

$$P_\Pi \in L_\ell \iff \ell \subseteq \Pi \iff (x, y, z) \perp (a_1, a_2, a_3) \iff a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

Ορίζουμε το σύνολο  $P(2)$  των μετασχηματισμών του  $DIRP^2$  με τον ίδιο τρόπο, όπως και για το προβολικό επίπεδο  $\mathbb{RP}^2.$

Η γεωμετρία  $(DIRP^2, P(2))$  καλείται *δυϊκή γεωμετρία της  $(\mathbb{RP}^2, P(2)).$*

Δύο γεωμετρίες  $(X, G_X)$  και  $(Y, G_Y)$  καλούνται ισομορφικές, όταν υπάρχουν μια 1-1 και επί απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  και ένας ισομορφισμός  $i : G_X \rightarrow G_Y$  ομάδων  $G_X$  και  $G_Y$  έτσι ώστε

$$f(g(x)) = i(g)(f(x)), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G_X.$$

**Θεώρημα 6.6.2.** *Οι γεωμετρίες  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$  και  $(D\mathbb{RP}^2, P(2))$  είναι ισομορφικές.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $D : \mathbb{RP}^2 \rightarrow D\mathbb{RP}^2$  είναι η 1-1 και επί απεικόνιση, η οποία στο Σημείο  $(a_1 : a_2 : a_3)$  του  $\mathbb{RP}^2$  αντιστοιχεί το Σημείο  $(a_1 : a_2 : a_3)$  του  $D\mathbb{RP}^2$ . Δηλαδή, η  $D$  στην ευθεία που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(a_1, a_2, a_3)$  αντιστοιχεί επίπεδο που διέρχεται από το  $(0, 0, 0)$  κάθετο στο διάνυσμα  $(a_1, a_2, a_3)$ .

Έστω επίσης  $i : P(2) \rightarrow P(2)$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$D(g(a_1 : a_2 : a_3)) = i(g)(D(a_1 : a_2 : a_3)), \quad \forall (a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{RP}^2, \quad \forall g \in P(2).$$

Δηλαδή,  $D(g(a_1 : a_2 : a_3)) = g(D(a_1 : a_2 : a_3))$ ,  $\forall (a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{RP}^2, \quad \forall g \in P(2)$ .

Έστω ότι  $g(a_1 : a_2 : a_3) = (b_1 : b_2 : b_3)$ . Τότε

$$\begin{aligned} D(g(a_1 : a_2 : a_3)) &= D(b_1 : b_2 : b_3) = (b_1 : b_2 : b_3) \\ g(D(a_1 : a_2 : a_3)) &= g(a_1 : a_2 : a_3) = (b_1 : b_2 : b_3). \end{aligned}$$

□

## Η αρχή του δυϊσμού.

Η απεικόνιση  $D$  σε κάθε σχήμα στη γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$  αντιστοιχεί ένα σχήμα στη γεωμετρία  $(D\mathbb{RP}^2, P(2))$ .

Θα λέμε ότι ένα Σημείο  $A$  και η Ευθεία  $L$  “συντρέχουν” όταν  $A \in L$ .

Οι σχέση  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$  μπορεί να ερμηνευτεί στο  $\mathbb{RP}^2$  με δύο τρόπους:

1. Το Σημείο  $(a_1 : a_2 : a_3)$  και η Ευθεία  $b_1x + b_2y + b_3z = 0$  συντρέχουν.
2. Η Ευθεία  $a_1x + a_2y + a_3z = 0$  και το Σημείο  $(b_1 : b_2 : b_3)$  συντρέχουν.

Οι παραπάνω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες. Επομένως σε Θεώρημα  $\Theta$  στο  $\mathbb{RP}^2$  αντιστοιχεί ένα Θεώρημα  $\Theta^D$  στο  $D\mathbb{RP}^2$ , που προκύπτει αν στη  $\Theta$  αντικαταστήσουμε

1. Κάθε Σημείο  $A = (a_1 : a_2 : a_3)$  με Σημείο  $D(A) = (a_1 : a_2 : a_3)$  (που αντιστοιχεί στην Ευθεία  $a_1x + a_2y + a_3z = 0$  του  $\mathbb{RP}^2$ ).
2. Κάθε Ευθεία  $L : b_1x + b_2y + b_3z = 0$  με Ευθεία  $D(L) : b_1x + b_2y + b_3z = 0$  (που αντιστοιχεί στη Σημείο  $(b_1 : b_2 : b_3)$  του  $\mathbb{RP}^2$ ).

Εναλλάσσοντας στη συνέχεια στο Θεώρημα  $\Theta^D$  της λέξεις “Σημείο” και “Ευθεία” παίρνουμε νέο Θεώρημα  $\Theta^*$  της  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ . Το Θεώρημα  $\Theta^*$  καλείται δυϊκό του  $\Theta$ .

Από τα παραπάνω προκύπτει η αρχή του δυϊσμού στην προβολική γεωμετρία:

*Αν στη προβολική γεωμετρία ισχύει μια Πρόταση  $\Theta$  αναφερόμενη στη σχετική θέση μεταξύ των Σημείων και Ευθειών, τότε ισχύει και η δυϊκή της Πρόταση  $\Theta^*$  που προκύπτει από την αρχική με εναλλαγή των λέξεων “Σημείο” και “Ευθεία” και των φράσεων “ανήκουν σε μια ευθεία” και “τέμνονται σε ένα σημείο”.*



Η αρχή του δυΐσμού προσφέρει μια σημαντική διευκόλυνση στη μελέτη της Προβολικής Γεωμετρίας, αφού μαζί με κάθε θεώρημα που αποδεικνύουμε ισχύει αυτόματα και το δυϊκό του, χωρίς να χρειάζεται να το αποδείξουμε. Η διαδικασία της απόδειξης του δυϊκού θεωρήματος είναι δυϊκή της απόδειξης του αρχικού θεωρήματος, δηλαδή προκύπτει από την αρχική απόδειξη με τη εναλλαγή που αναφέρθηκε παραπάνω.

Παράδειγμα δυϊκών προτάσεων είναι το παρακάτω.

*Οποιαδήποτε δύο διαφορετικά Σημεία ανήκουν (συντρέχουν) σε μοναδική Ευθεία.*

*Οποιαδήποτε δύο διαφορετικές Ευθείες τέμνονται (συντρέχουν) σε μοναδικό Σημείο.*

Έστω ότι  $\Pi$  είναι ένα επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$  που δεν περιέχει το  $(0,0,0)$  και  $\Pi \cup L_{\Pi_\infty}$  είναι το αντίστοιχο επίπεδο προβολής. Σε κάθε Σημείο του  $\mathbb{RP}^2$  αντιστοιχεί μοναδικό σημείο του  $\Pi \cup L_{\Pi_\infty}$  και σε κάθε Ευθεία του  $\mathbb{RP}^2$  αντιστοιχεί μοναδική ευθεία του  $\Pi \cup L_{\Pi_\infty}$ . Σε κάθε Θεώρημα στην προβολική γεωμετρία, όπως και στο δυϊκό του, αντιστοιχούν Θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να διατυπώσουμε νέα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Όμως η αναδιατύπωση των Θεωρημάτων της προβολικής γεωμετρίας στην Ευκλείδεια Γεωμετρία απαιτεί κάποια προσαρμογή διότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία υπάρχουν παράλληλες ευθείες (είναι οι Ευθείες του επιπέδου προβολής που τέμνονται στα ιδεατά σημεία).

**Ορισμός 6.6.3.** Καλούμε τρίγωνο του  $\mathbb{RP}^2$  το σχήμα που αποτελείται από τρία μη συνευθειακά Σημεία  $A, B, C$  μαζί με τις Ευθείες  $AB, BC, CA$ .

**Ορισμός 6.6.4.** Καλούμε εξαγώνο στο  $\mathbb{RP}^2$  το σχήμα που αποτελείται από έξι ανά τρία μη συνευθειακά Σημεία (κορυφές)  $1,2,3,4,5,6$  και έξι Ευθείες (πλευρές)  $12,23,34,45,56,61$ , όπου  $ij$  είναι Ευθεία που περιέχει τα σημεία  $i$  και  $j$ . Τα ζεύγη απέναντι κορυφών είναι  $(1, 4), (2, 5), (3, 6)$ . Τα ζεύγη απέναντι ακμών είναι  $(12, 45), (23, 56), (34, 61)$ .

Τα ακόλουθα κλασσικά Θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύονται και ως θεωρήματα προβολικής γεωμετρίας (βλ. [1]).

**Θεώρημα 6.6.5.** (Πάπου) Έστω ότι  $A, B, C$  είναι τρία σημεία μιας ευθείας και  $A', B', C'$  είναι τρία σημεία μιας άλλης ευθείας. Αν οι ευθείες  $BC'$  και  $B'C$  τέμνονται στο σημείο  $P$ , οι ευθείες  $BA'$  και  $B'A$  τέμνονται στο σημείο  $Q$ , οι ευθείες  $AC'$  και  $A'C$  τέμνονται στο σημείο  $R$ , τότε τα σημεία  $P, Q, R$  είναι συνευθειακά.

**Θεώρημα 6.6.6.** (Desargue) Αν δύο τρίγωνα  $\triangle ABC$  και  $\triangle A'B'C'$  είναι τέτοια ώστε οι ευθείες  $(AA')$ ,  $(BB')$  και  $(CC')$  που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές τέμνονται σε ένα σημείο, τότε τα σημεία  $(AB) \cap (A'B') = \{P\}$ ,  $(BC) \cap (B'C') = \{Q\}$  και  $(AC) \cap (A'C') = \{R\}$  στα οποία τέμνονται οι αντίστοιχες πλευρές είναι συνευθειακά (στην περίπτωση που κάποιες από τις πλευρές είναι παράλληλες, το σημείο τομής είναι σημείο ιδεατής ευθείας και η ευθεία που περιέχει τα σημεία  $P, Q, R$  μπορεί να είναι ιδεατή ή πραγματική ευθεία ενός επιπέδου προβολής).

**Θεώρημα 6.6.7.** (Pascal) Τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών ενός εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι συνευθειακά (η τομή των παράλληλων απέναντι πλευρών είναι το ιδεατό σημείο της ιδεατής ευθείας, το οποίο αντιστοιχεί στην κοινή διεύθυνση τους).

**Θεώρημα 6.6.8.** (Briachon) Οι ευθείες που ενώνουν τις απέναντι κορυφές ενός εξαγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο τέμνονται σε ένα σημείο.

## Παραδείγματα 6.6.9.

1. Το Θεώρημα του Desargues μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

*Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε οι Ευθείες στις οποίες ανήκουν οι αντίστοιχες κορυφές τέμνονται σε ένα σημείο, τότε τα Σημεία στα οποία τέμνονται οι αντίστοιχες πλευρές ανήκουν σε μία ευθεία.*

*Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε οι Ευθείες στις οποίες συντρέχουν οι αντίστοιχες κορυφές συντρέχουν, τότε τα Σημεία στα οποία συντρέχουν οι αντίστοιχες πλευρές συντρέχουν.*

Το Θεώρημα δυϊκό του Θεωρήματος του Desargues προκύπτει εύκολα από την δεύτερη μορφή ως δυϊκή πρόταση:

*Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε τα Σημεία στα οποία συντρέχουν οι αντίστοιχες πλευρές συντρέχουν, τότε οι Ευθείες στις οποίες συντρέχουν οι αντίστοιχες κορυφές συντρέχουν.*

Αναδιατυπώνοντας την παραπάνω πρόταση σε μια συνηθισμένη μορφή, παίρνουμε Θεώρημα αντίστροφο του Θεωρήματος του Desargues:

*Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε τα Σημεία στα οποία τέμνονται οι αντίστοιχες πλευρές ανήκουν σε μία ευθεία, τότε οι Ευθείες στις οποίες ανήκουν οι αντίστοιχες κορυφές τέμνονται σε ένα σημείο.*

2. Το Θεώρημα του Πάπου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

*Έστω ότι  $A, B, C$  είναι τρία Σημεία μιας Ευθείας και  $A', B', C'$  είναι τρία Σημεία μιας άλλης Ευθείας. Αν*

*οι Ευθείες  $BC'$  και  $B'C$  συντρέχουν στο Σημείο  $P$ ,*

*οι Ευθείες  $BA'$  και  $B'A$  συντρέχουν στο Σημείο  $Q$ ,*

*οι Ευθείες  $AC'$  και  $A'C$  συντρέχουν στο Σημείο  $R$ , τότε τα Σημεία  $P, Q, R$  συντρέχουν.*

Το δυϊκό του Θεωρήματος του Πάπου είναι:

*Έστω ότι  $A, B, C$  είναι τρεις Ευθείες που συντρέχουν σε ένα Σημείο και  $A', B', C'$  είναι τρεις Ευθείες που συντρέχουν σε ένα άλλο Σημείο. Αν*

*τα Σημεία  $B \cap C'$  και  $B' \cap C$  συντρέχουν στην Ευθεία  $P$ ,*

*τα Σημεία  $B \cap A'$  και  $B' \cap A$  συντρέχουν στην Ευθεία  $Q$ ,*

*τα Σημεία  $A \cap C'$  και  $A' \cap C$  συντρέχουν στην Ευθεία  $R$ ,*

*τότε οι Ευθείες  $P, Q, R$  συντρέχουν.*

Το παραπάνω δυϊκό του Θεωρήματος του Πάπου διατυπώνεται και ως εξής:

*Έστω ότι  $A, B, C$  είναι τρεις ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο και  $A', B', C'$  είναι άλλες τρεις ευθείες που τέμνονται σε ένα άλλο σημείο. Αν*

*τα Σημεία  $B \cap C'$  και  $B' \cap C$  ανήκουν στην ευθεία  $P$ ,*

*τα Σημεία  $B \cap A'$  και  $B' \cap A$  ανήκουν στην Ευθεία  $Q$ ,*

*τα Σημεία  $A \cap C'$  και  $A' \cap C$  ανήκουν στην Ευθεία  $R$ ,*

*τότε οι Ευθείες  $P, Q, R$  τέμνονται σε ένα Σημείο.*

3. Τα Θεωρήματα του Μενέλαου και του Ceva είναι δυϊκά.
4. Τα Θεωρήματα του Pascal και του Briachon είναι δυϊκά.

## 6.7 Διπλός λόγος τεσσάρων συνευθειακών Σημείων του $\mathbb{RP}^2$ .

**Ορισμός 6.7.1.** Έστω  $A = (x_A : y_A : z_A)$ ,  $B = (x_B : y_B : z_B)$ ,  $C = (x_C : y_C : z_C)$ ,  $D = (x_D : y_D : z_D)$  τέσσερα συνευθειακά Σημεία  $\mathbb{RP}^2$ .

Για  $\bar{a} = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $\bar{b} = (x_B, y_B, z_B)$ ,  $\bar{c} = (x_C, y_C, z_C)$ ,  $\bar{d} = (x_D, y_D, z_D) \in \mathbb{R}^3$  ανήκουν σε ένα επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$  που περιέχει το  $(0, 0, 0)$  και  $\bar{a}$  και  $\bar{b}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως

$$\bar{c} = c_1\bar{a} + c_2\bar{b}, \quad \bar{d} = d_1\bar{a} + d_2\bar{b}, \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Διπλός λόγος των  $A, B, C, D$  είναι ο αριθμός  $(ABCD) = \frac{c_2}{c_1} / \frac{d_2}{d_1}$ .

**Θεώρημα 6.7.2.** Ο διπλός λόγος τεσσάρων συνευθειακών Σημείων  $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$  είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των ομογενών συντεταγμένων τους.

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $a, b, c, d$  σημεία διαφορετικά των  $(0, 0, 0)$  των ευθειών του  $\mathbb{R}^3$ , αντίστοιχων στα  $A, B, C, D$ . Τότε

$$\bar{c} = c_1\bar{a} + c_2\bar{b}, \quad \bar{d} = d_1\bar{a} + d_2\bar{b}, \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Έστω ότι  $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}', \bar{d}'$  επίσης σημεία διαφορετικά των  $(0, 0, 0)$  των ευθειών του  $\mathbb{R}^3$ , αντίστοιχων στα  $A, B, C, D$ . Τότε

$$\bar{c}' = c'_1\bar{a}' + c'_2\bar{b}', \quad \bar{d}' = d'_1\bar{a}' + d'_2\bar{b}', \quad c'_1, c'_2, d'_1, d'_2 \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε  $\bar{a}' = k\bar{a}$ ,  $\bar{b}' = l\bar{b}$ ,  $\bar{c}' = m\bar{c}$  και  $\bar{d}' = n\bar{d}$  όπου  $k, m, l, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Επομένως

$$\begin{aligned} \bar{c}' &= m\bar{c} = mc_1\bar{a} + mc_2\bar{b} = \frac{mc_1}{k}\bar{a}' + \frac{mc_2}{l}\bar{b}' \implies \frac{c'_2}{c'_1} = \frac{kc_2}{lc_1} \\ \bar{d}' &= n\bar{d} = nd_1\bar{a} + nd_2\bar{b} = \frac{nd_1}{k}\bar{a}' + \frac{nd_2}{l}\bar{b}' \implies \frac{d'_2}{d'_1} = \frac{kd_2}{ld_1} \end{aligned}$$

$$\text{ρα, } \frac{c_2}{c_1} / \frac{d_2}{d_1} = \frac{c'_2}{c'_1} / \frac{d'_2}{d'_1}. \quad \square$$

**Θεώρημα 6.7.3.** Κάθε προβολικός μετασχηματισμός διατηρεί τον διπλό λόγο των τεσσάρων συνευθειακών σημείων.

*Απόδειξη.* Έστω  $A = (x_A : y_A : z_A)$ ,  $B = (x_B : y_B : z_B)$ ,  $C = (x_C : y_C : z_C)$  και  $D = (x_D : y_D : z_D)$  τέσσερα συνευθειακά Σημεία  $\mathbb{RP}^2$ .

Αν για τα σημεία  $\bar{a} = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $\bar{b} = (x_B, y_B, z_B)$ ,  $\bar{c} = (x_C, y_C, z_C)$ ,  $\bar{d} = (x_D, y_D, z_D)$  του  $\mathbb{R}^3$  έχουμε

$$\bar{c} = c_1\bar{a} + c_2\bar{b}, \quad \bar{d} = d_1\bar{a} + d_2\bar{b}, \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \quad (6.3)$$

$$\text{τότε } (ABCD) = \frac{c_2}{c_1} / \frac{d_2}{d_1}.$$

Έστω  $p \in P(2)$  με συσχετισμένο πίνακα  $P \in GL(3, \mathbb{R})$ .

Για  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  συμβολίζουμε:  $P\bar{x} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Πολλαπλασιάζοντας τις (6.3) με τον πίνακα  $P$  από αριστερά παίρνουμε

$$P\bar{c} = c_1 P\bar{a} + c_2 P\bar{b}, \quad P\bar{d} = d_1 P\bar{a} + d_2 P\bar{b}, \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

Έστω ότι

$$P\bar{a} = \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{pmatrix}, \quad P\bar{b} = \begin{pmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{pmatrix}, \quad P\bar{c} = \begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \\ z'_C \end{pmatrix}, \quad P\bar{d} = \begin{pmatrix} x'_D \\ y'_D \\ z'_D \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Τότε για τα σημεία  $\bar{a}' = (x'_A, y'_A, z'_A)$ ,  $\bar{b}' = (x'_B, y'_B, z'_B)$ ,  $\bar{c}' = (x'_C, y'_C, z'_C)$ ,  $\bar{d}' = (x'_D, y'_D, z'_D)$  του  $\mathbb{R}^3$  έχουμε

$$\bar{c}' = c_1 \bar{a}' + c_2 \bar{b}', \quad \bar{d}' = d_1 \bar{a}' + d_2 \bar{b}', \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \quad (6.6)$$

Όμως

$$\begin{aligned} A' &= p(A) = (x'_A : y'_A : z'_A), & B' &= p(B) = (x'_B : y'_B : z'_B), \\ C' &= p(C) = (x'_C : y'_C : z'_C), & D' &= p(D) = (x'_D : y'_D : z'_D) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Από τις σχέσεις (6.4), (6.6) και (6.7) έπεται ότι  $(A'B'C'D') = \frac{c_2}{c_1} \frac{d_2}{d_1} = (ABCD)$ .  $\square$

**Σημείωση 6.7.4.** Ο απλός λόγος τριών συνευθειακών Σημείων εξαρτάται από τις ομογενείς συντεταγμένες.

Πράγματι, έστω  $A, B$  και  $C$  τρία Σημεία με αντίστοιχα διανύσματα  $\vec{a} \parallel \ell_A$ ,  $\vec{b} \parallel \ell_B$  και  $\vec{c} \parallel \ell_C$  τέτοια ώστε  $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ . Τότε  $A, B$  και  $C$  ανήκουν σε μια προβολική ευθεία και  $(ABC) = 2/3$ .

Για  $\vec{c}' = \frac{5}{2}\vec{c}$ ,  $\vec{a}' = 3\vec{a}$  και  $\vec{b}' = 2\vec{b}$  έχουμε  $\vec{c}' = \frac{1}{2}\vec{a}' + \frac{1}{2}\vec{b}'$ . 'ρα,  $(ABC) = 1$ .

## 6.7.1 Διπλός λόγος πάνω στο επίπεδο προβολής.

Έστω ότι  $A', B', C', D' \in \mathbb{RP}^2$  τέσσερα συνευθειακά Σημεία με αντίστοιχες προβολές  $A, B, C, D$  στο πρότυπο επίπεδο προβολής  $\hat{\Pi}_1$ . Επειδή τα ιδεατά σημεία του  $\hat{\Pi}_1$  είναι τα Σημεία της (ιδεατής) Ευθείας  $z = 0$ , προκύπτει ότι ή και τα τέσσερα Σημεία  $A', B', C', D'$  ανήκουν στην Ευθεία  $z = 0$  ή το πολύ ένα από αυτά.

Έστω ότι  $A', B', C', D' \in \mathbb{RP}^2$  προβάλλονται στα σημεία  $A, B, C, D$  του επιπέδου  $z = 1$ . Τότε τα σημεία  $A, B, C, D$  ανήκουν σε μια ευθεία του επιπέδου  $z = 1$ . Παίρνουμε

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \text{ και } \vec{D} = \gamma \vec{A} + \delta \vec{B} \implies (ABCD) = \frac{\beta/\delta}{\alpha/\gamma} = \frac{ABC}{ABD} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} / \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Αν  $A$  είναι ιδεατό σημείο του πρότυπου επιπέδου προβολής, τότε  $A = (x_A : y_A : 0)$  και το διάνυσμα  $\vec{a} = \left( \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}, \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}, 0 \right)$  είναι μοναδιαίο και παράλληλο στην ευθεία που περιέχει τα σημεία  $B, C, D$ .

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{B} + \overrightarrow{BC} = \pm |\overrightarrow{CB}| \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{D} &= \vec{B} + \overrightarrow{BD} = \pm |\overrightarrow{DB}| \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BD} &\implies \frac{DB}{BC} = -\frac{|\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{CB}|} \text{ και } (ABCD) = \frac{|\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{CB}|} \implies (ABCD) = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}} \\ \overrightarrow{BC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{BD} &\implies \frac{DB}{BC} = \frac{|\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{CB}|} \text{ και } (ABCD) = -\frac{|\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{CB}|} \implies (ABCD) = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}} \end{aligned}$$

ήρα,

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}} = -(DCB)$$

Αν  $B$  είναι ιδεατό σημείο του πρότυπου επιπέδου προβολής, τότε

$$(ABCD) = \frac{1}{(BACD)} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA}}$$

Αν  $C$  είναι ιδεατό σημείο του πρότυπου επιπέδου προβολής, τότε

$$(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{DA}} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}$$

Αν  $D$  είναι ιδεατό σημείο του πρότυπου επιπέδου προβολής, τότε

$$(ABCD) = 1 - (DBCA) = 1 - \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = -(ABC)$$

## 6.8 Αναλλοίωτες της προβολικής γεωμετρίας ( $\mathbb{RP}^2, P(2)$ ).

Καλούμε κωνική του  $\mathbb{RP}^2$  το σύνολο των Σημείων  $(x : y : z)$  που ικανοποιεί την εξίσωση της μορφής

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0, \text{ όπου } A^2 + B^2 + C^2 + F^2 + G^2 + H^2 \neq 0$$

Μια κωνική του  $\mathbb{RP}^2$  καλείται μη εκφυλισμένη αν η τομή της με το πρότυπο επίπεδο προβολής είναι μία από τις καμπύλες: παραβολή, υπερβολή, έλλειψη.

Κάθε προβολικός μετασχηματισμός

- απεικονίζει Ευθεία σε Ευθεία,
- απεικονίζει συνευθειακά Σημεία σε συνευθειακά,
- απεικονίζει Τρίγωνο σε Τρίγωνο,
- απεικονίζει Τετράπλευρο σε Τετράπλευρο,
- απεικονίζει το Σημείο τομής των Ευθειών στην τομή των εικόνων τους,
- διατηρεί τον διπλό λόγο των τεσσάρων συνευθειακών Σημείων,
- απεικονίζει μη εκφυλισμένη κωνική σε μη εκφυλισμένη κωνική.

**Ισα σχήματα στο  $\mathbb{RP}^2$ .**

Αποδεικνύεται ότι στην προβολική γεωμετρία

- όλα τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα,
- όλα τα τετράπλευρα είναι ισοδύναμα,
- όλες οι μη εκφυλισμένες κωνικές είναι ισοδύναμες.

## 6.9 Ασκήσεις

**6.9.1.** Ποιες από τις παρακάτω ομογενείς συντεταγμένες παριστάνουν το ίδιο σημείο του  $\mathbb{RP}^2$  με το  $(2 : -3 : 4)$

$$(i) (2 : 3 : -4), \quad (ii) (4 : -6 : 8), \quad (iii) \left(\frac{2}{3} : -1 : \frac{4}{3}\right), \quad (iv) (2 : 3 : 4).$$

**6.9.2.** Για την καθεμιά από τις παρακάτω τριάδες ομογενών συντεταγμένων να βρεθούν από δύο τριάδες ομογενών συντεταγμένων που παριστάνουν το ίδιο προβολικό σημείο:

$$(i) (4 : 2 : -6), \quad (ii) (5 : 4 : 8), \quad (iii) \left(\frac{2}{3} : 0 : \frac{4}{3}\right), \quad (iv) (2 : 3 : 0).$$

**6.9.3.** Να βρεθούν οι ομογενείς συντεταγμένες της μορφής  $(x : y : 1)$  για τα παρακάτω προβολικά σημεία

$$(i) (2 : 3 : -4), \quad (ii) (4 : -6 : 8), \quad (iii) \left(\frac{2}{3} : -1 : \frac{4}{3}\right), \quad (iv) (2 : 3 : 4).$$

**6.9.4.** Να βρεθούν οι ομογενείς συντεταγμένες της μορφής  $(x : 1 : 0)$  για τα παρακάτω προβολικά σημεία

$$(i) (2 : 3 : 0), \quad (ii) (4 : -6 : 0), \quad (iii) \left(\frac{2}{3} : -1 : 0\right), \quad (iv) (6 : 3 : 0).$$

**6.9.5.** Να αποδειχθεί ότι η Ευθεία του  $\mathbb{RP}^2$  που διέρχεται από τα Σημεία  $(a_1 : a_2 : a_3)$  και  $(b_1 : b_2 : b_3)$  έχει εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

**6.9.6.** Βρείτε την εξίσωση της Εύθείας που διέρχεται από τα σημεία  $(2 : 5 : 4)$  και  $(3 : 1 : 7)$ .

**6.9.7.** Να αποδειχθεί ότι τα Σημεία  $(a_1 : a_2 : a_3)$ ,  $(b_1 : b_2 : b_3)$  και  $(c_1 : c_2 : c_3)$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

**6.9.8.** Να εξεταστεί αν οι τριάδες που ακολουθούν αποτελούνται από συνευθειακά Σημεία

$$(a) (2 : 5 : 4), (3 : 1 : 7), (1 : -4 : 3), \quad (b) (1 : 5 : 4), (5 : 1 : 7), (1 : -4 : 3).$$

**6.9.9.** Δείξτε ότι τα Σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$ ,  $(1 : 1 : 1)$  είναι ανά τρία μη συνευθειακά.

**6.9.10.** Να βρεθεί η εξίσωση της προβολικής ευθείας σε ομογενείς συντεταγμένες που διέρχεται από τα προβολικά σημεία  $P = (1 : 2 : 3)$  και  $Q = (3 : 0 : -2)$ .

**6.9.11.** Να βρεθούν οι ομογενείς συντεταγμένες του προβολικού σημείου που είναι η τομή των προβολικών ευθειών  $\ell_1$  και  $\ell_2$ , που δίνονται με εξίσωση σε ομογενείς συντεταγμένες:

$$\ell_1 : x - y - z = 0, \quad \ell_2 : x + 5y + 2z = 0.$$

**6.9.12.** Να βρεθούν οι ομογενείς συντεταγμένες του προβολικού σημείου που είναι η τομή των προβολικών ευθειών  $\ell_1 : x - 2y + z = 0$  και  $\ell_2 : x - y - z = 0$ .

**6.9.13.** Να βρεθεί το προβολικό σημείο, στο οποίο η προβολική ευθεία που διέρχεται από τα προβολικά σημεία  $P = (1 : 2 : -3)$  και  $Q = (2 : -1 : 0)$  τέμνει την προβολική ευθεία που διέρχεται από τα προβολικά σημεία  $A = (1 : 0 : -1)$  και  $B = (1 : 1 : 1)$ .

**6.9.14.** Έστω  $f$  ο προβολικός μετασχηματισμός με συσχετισμένο πίνακα  $P_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Να βρεθούν οι εικόνες των σημείων  $A = (1 : 2 : 3)$ ,  $B = (-1 : 4 : 0)$ ,  $C = (0 : 0 : 1)$ .

**6.9.15.** Να προσδιοριστεί ποιό από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι προβολικοί μετασχηματισμοί.

$$(\alpha') f(x : y : z) = (-2y + 3z : -x + 5y - z : -3x)$$

$$(\beta') g(x : y : z) = (x - 7y + 4z : -x + 5y - z : x - 9y + 7z)$$

**6.9.16.** Δίνονται τα προβολικά σημεία

$$P = (1 : -1 : 1), Q = (1 : -2 : 2), R = (-1 : 2 : -1), S = (0 : 1 : 2),$$

$$P' = (-1 : 3 : -2), Q' = (-3 : 7 : -5), R' = (2 : -5 : 4), S' = (-3 : 8 : -5).$$

- (α') Να βρεθεί ένας προβολικός μετασχηματισμός  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  που απεικονίζει τα Σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  και  $(0 : 0 : 1)$  στα σημεία  $P$ ,  $Q$  και  $R$ , αντίστοιχα.
- (β') Να βρεθεί ο προβολικός μετασχηματισμός  $g : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  που απεικονίζει τα Σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα σημεία  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  και  $S$ , αντίστοιχα.
- (γ') Να βρεθεί ο προβολικός μετασχηματισμός  $h : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  που απεικονίζει τα Σημεία  $P, Q, R, S$  στα Σημεία  $P', Q', R', S'$  αντίστοιχα.

**Απάντηση:**

- (α') Αν ο προβολικός μετασχηματισμός  $f$  απεικονίζει τα Σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  και  $(0 : 0 : 1)$  στα σημεία  $P$ ,  $Q$  και  $R$ , αντίστοιχα, τότε ο συσχετισμένος πίνακας του  $f$  έχει

$$\text{την μορφή } A_f(u, v, w) = \begin{pmatrix} u & v & -w \\ -u & -2v & 2w \\ u & 2v & -w \end{pmatrix}, \text{ όπου } u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0.$$

Σε κάθε τριάδα  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$  αντιστοιχεί ένας προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα Σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  και  $(0 : 0 : 1)$  στα σημεία  $P$ ,  $Q$  και  $R$ , αντίστοιχα. Π.χ., για  $(u, v, w) = (1, 1, 1)$  παίρνουμε τον μετασχηματισμό:

$$f(x, y, z) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

- (β')  $A_g = \begin{pmatrix} u & v & -w \\ -u & -2v & 2w \\ u & 2v & -w \end{pmatrix}$ , όπου  $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ .

$$\text{Επειδή } g(1 : 1 : 1) = (0 : 1 : 2), \text{ έπεται ότι } \begin{pmatrix} u & v & -w \\ -u & -2v & 2w \\ u & 2v & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε  $(u, v, w) = (1, 2, 3)$ .

$$\text{Ήρα, } g(x, y, z) = A_g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ όπου } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (γ') **Υπόδειξη:** Έστω  $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα Σημεία  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  και  $(1 : 1 : 1)$  στα Σημεία  $P', Q', R', S'$ . Τότε  $h = t \circ g^{-1}$ . Ήρα, υπολογίζουμε τον συσχετισμένο πίνακα του  $h$  από τον τύπο  $A_h = A_t \circ A_g^{-1}$ .



**6.9.17.** Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός  $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  με

$$t(x : y : z) = (x + z : x + y + 3z : -2x + z)$$

είναι προβολικός και βρείτε τον αντίστροφό του.

**Απάντηση:** Ένας συσχετισμένος πίνακας του  $t$  είναι ο  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$ .

Ο συσχετισμένος πίνακας του  $t^{-1}$  είναι ο  $A_t^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Συνεπώς

$$t^{-1}(x : y : z) = (x - z : -7x + 3y - 2z : 2x + z).$$

**6.9.18.** Να διατυπωθούν οι δυϊκές των παρακάτω προτάσης της προβολικής γεωμετρίας:

(α') Αν οι Ευθείες  $\ell_1, \ell_2$  και  $\ell_3$  τέμνονται σε ένα Σημείο, τότε η ευθεία  $\ell_3$  διέρχεται από το Σημείο τομής των Ευθειών  $\ell_1$  και  $\ell_2$ .

(β') Τα προβολικά σημεία  $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ ,  $B = (b_1 : b_2 : b_3)$  και  $C = (c_1 : c_2 : c_3)$  είναι συνευθειακά αν και μόνο αν 
$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**6.9.19.** Βρείτε τον διπλό λόγο  $(ABCD)$  για τα Σημεία

(α')  $A = (1 : -1 : -1)$ ,  $B = (1 : 3 : -2)$ ,  $C = (3 : 5 : -5)$ ,  $D = (1 : -5 : 0)$ .

(β')  $A = (2 : 1 : 3)$ ,  $B = (1 : 2 : 3)$ ,  $C = (8 : 1 : 9)$ ,  $D = (4 : -1 : 3)$ .

**6.9.20.** Να αποδειχθούν οι ιδιότητες του διπλού λόγου που ακολουθούν.

(α') Έστω  $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$  τέσσερα συνευθειακά Σημεία.

$$(ABCD) = k \implies \begin{aligned} (BACD) &= (ABDC) = 1/k \\ (ACBD) &= (DBCA) = 1 - k \end{aligned}$$

(β') Αν  $A, B, C, X, Y \in \mathbb{RP}^2$  είναι πέντε συνευθειακά Σημεία και  $(ABCX) = (ABCY)$ , τότε  $X = Y$ .

**6.9.21.** Αν  $A = (1 : -1 : 0)$ ,  $B = (1 : 0 : -2)$ ,  $C = (3 : 5 : -5)$ ,  $D = (1 : -5 : 0)$ , βρείτε τους διπλούς λόγους  $(ABDC)$ ,  $(BADC)$ ,  $(BDAC)$ ,  $(ADBC)$ .



# Κεφάλαιο 7

## Γεωμετρία της αντιστροφής.

### 7.1 Αντιστροφή ως προς κύκλο.

**Ορισμός 7.1.1.** Έστω  $C = (K, r)$  κύκλος του  $\mathbb{R}^2$  κέντρου  $K$  και ακτίνας  $r$ .

Αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $C = (K, r)$  είναι μια απεικόνιση  $t : \mathbb{R}^2 \setminus \{K\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  που σε κάθε σημείο  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  αντιστοιχεί το σημείο  $t(A) = A'$  της ημιευθείας  $[KA)$ , το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση

$$KA \cdot KA' = r^2.$$

Το σημείο  $K$  καλείται κέντρο και η ακτίνα  $r$  καλείται δύναμη της αντιστροφής  $t$ .

Ο κύκλος  $C = (K, r)$  καλείται κύκλος της αντιστροφής  $t$ .

Για κάθε  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  το σημείο  $t(A)$  καλείται αντίστροφο του  $A$  ως προς τον κύκλο  $C$ .

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

- Αν  $A'$  είναι αντίστροφο του  $A$  ως προς την αντιστροφή  $t$ , τότε  $A$  είναι αντίστροφο του  $A'$  ως προς την αντιστροφή  $t$ .
- Έστω  $A'$  είναι αντίστροφο του  $A$  ως προς τον κύκλο  $C$ . Τότε
  - (i) Αν  $A \in C$ , τότε  $A' = A$ .
  - (ii) Αν  $A$  είναι έξω από τον κύκλο, τότε  $A'$  είναι μέσα στον κύκλο.
  - (iii) Αν  $A$  είναι μέσα στον κύκλο, τότε  $A'$  είναι έξω από τον κύκλο.
- Κάθε αντιστροφή  $t$  ως προς τον κύκλο με κέντρο  $K$  είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση του  $\mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  στον εαυτό του.
- Αν  $t : \mathbb{R}^2 \setminus \{K\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο  $K$ , τότε  $t^{-1} = t$  (κάθε αντιστροφή είναι αυτοαντίστροφη).

Μια 1-1 και επί απεικόνιση  $t : X \rightarrow X$  καλείται ενελικτική, όταν  $t \circ t = id_X$ .

Επομένως κάθε αντιστροφή είναι ενελικτική απεικόνιση.

**Ορισμός 7.1.2.** Καλούμε ομοιοθεσία του  $\mathbb{R}^2$  με λόγο  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  και κέντρο  $(0, 0)$  την απεικόνιση  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $h(x, y) = (kx, ky)$ .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε ομοιοθεσία είναι 1-1 και επι, απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

**Γεωμετρικός ορισμός της αντιστροφής.**

Η αντιστροφή ενός σημείου  $A$  ως προς τον κύκλο  $C = (K, r)$  ορίζεται γεωμετρικά ως εξής:

1. Αν  $KA = r$ , τότε  $t(A) = A$ .
2. Αν  $KA > r$ , τότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα
  - (α') φέρνοντας από το  $A$  μια εφαπτομένη προς τον  $C = (K, r)$  βρίσκουμε το σημείο  $P$  τομής της εφαπτομένης με τον κύκλο,
  - (β')  $A' = t(A)$  είναι το ίχνος της καθέτου από το  $P$  προς την ευθεία  $(KA)$ .
3. Αν  $KA < r$ , τότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα
  - (α') φέρνοντας από το  $A$  ευθεία κάθετη στην  $(KA)$  βρίσκουμε το σημείο  $P$  τομής της με τον κύκλο,
  - (β')  $A' = t(A)$  είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης στο  $P$  με την  $(KA)$ .

**Παραδείγματα 7.1.3.**

1. Αν το σημείο  $A$  είναι έξω από τον κύκλο  $C = (K, r)$ , το σημείο  $A'$  είναι αντίστροφο του  $A$  ως προς τον  $C(K, r)$  και  $C(K, r) \cap AA' = N$ , τότε  $NA' = \frac{NA}{1 + NA/r}$ .

Πράγματι, από τον ορισμό του σημείου  $N$  έπεται ότι  $KA = r + NA$  και  $KA' = r - NA'$ . Οπότε παίρνουμε διαδοχικά

$$KA \cdot KA' = r^2 \implies (r + NA)(r - NA') = r^2 \implies NA' = \frac{NA \cdot r}{r + NA} = \frac{NA}{1 + NA/r}.$$

2. Έστω ότι  $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  και τα σημεία  $P, Q, K$  δεν είναι συνευθειακά.

Αν  $t$  είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $C = (K, r)$ ,  $t(P) = P'$  και  $Q' = t(Q)$ , τότε  $P'Q' = \frac{PQ \cdot r^2}{KP \cdot KQ}$ .

Πράγματι,  $KP \cdot KP' = r^2$  και  $KQ \cdot KQ' = r^2 \implies \frac{KP}{KQ} = \frac{KQ'}{KP'}$ .

Ίρα, τα τρίγωνα  $KPQ$  και  $KP'Q'$  είναι όμοια. Επομένως,

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{KP'}{KQ} = \frac{KP' \cdot KP}{KQ \cdot KP} = \frac{r^2}{KQ \cdot KP} \implies P'Q' = \frac{PQ \cdot r^2}{KP \cdot KQ}.$$

**Θεώρημα 7.1.4.** Η αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $C(O, r)$  όπου  $O = (0, 0)$  δίνεται από την σχέση

$$t(x, y) = \left( \frac{xr^2}{x^2 + y^2}, \frac{yr^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}.$$

Απόδειξη. Αν  $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  και  $A' = t(A)$ , τότε  $A' = (kx, ky)$  όπου  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ . Επειδή  $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $OA' = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2}$ , προκύπτει ότι

$$OA \cdot OA' = r^2 \implies k(x^2 + y^2) = r^2 \implies k = \frac{r^2}{x^2 + y^2}.$$

□

### 7.1.1 Η εικόνα μιας ευθείας και ενός κύκλου δια μέσου της αντιστροφής ως προς τον κύκλο.

Έστω  $\ell$  μια ευθεία και  $A \in \ell$ . Το σύνολο  $\ell \setminus \{A\}$  καλείται *ευθεία διάτρητη* στο  $A$ .

Έστω  $C$  ένας κύκλος και  $A \in C$ . Το σύνολο  $C \setminus \{A\}$  καλείται *κύκλος διάτρητος* στο  $A$ .

**Θεώρημα 7.1.5.** Η αντιστροφή  $t$  του επιπέδου ως προς τον κύκλο  $C(O, 1)$  απεικονίζει

(a) την ευθεία διάτρητη στο  $O$  στον εαυτό της,

(b) την ευθεία που δεν διέρχεται από το  $O$  επί έναν κύκλο διάτρητο στο  $O$ .

Απόδειξη. (a) Η ευθεία  $\ell$  διάτρητη στο  $(0, 0)$  έχει εξίσωση  $ax + by = 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$\text{Αν } t(x, y) = (x', y'), \text{ τότε } (x, y) = t(x', y') = \left( \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \right).$$

Ήρα,  $t(\ell \setminus \{O\})$  έχει εξίσωση  $a \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + b \frac{y'}{x'^2 + y'^2} = 0$ , όπου  $(x', y') \neq (0, 0)$  διότι  $(0, 0)$  δεν ικανοποιεί την εξίσωση της  $t(\ell)$ . Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $ax' + by' = 0$ ,  $(x', y') \neq (0, 0)$ , που είναι η εξίσωση της ευθείας  $\ell$  διατρητής στο  $(0, 0)$ .

(b) Η ευθεία  $\ell$  που δεν διέρχεται από το  $O$  έχει εξίσωση  $ax + by + c = 0$ ,  $c \neq 0$ . Ήρα,  $t(\ell)$  έχει εξίσωση  $a \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + b \frac{y'}{x'^2 + y'^2} + c = 0$ ,  $(x', y') \neq (0, 0)$ .

Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με  $cx'^2 + cy'^2 + ax' + by' = 0$ ,  $(x', y') \neq (0, 0)$ , η οποία είναι εξίσωση του κύκλου διάτρητου στο  $O = (0, 0)$ .

□

**Θεώρημα 7.1.6.** Η αντιστροφή  $t$  του επιπέδου ως προς τον κύκλο  $C(O, 1)$  απεικονίζει

(a) τον κύκλο διάτρητο στο  $O$  επί μια ευθεία που δεν διέρχεται από το  $O$ ,

(b) τον κύκλο που δεν διέρχεται από το  $O$  επί έναν κύκλο (που δεν περιέχει το  $O$ ).

Απόδειξη. Έστω  $C$  ένας κύκλος με εξίσωση  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Η τελευταία εξίσωση γράφεται  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ . Επομένως  $t(C \setminus \{O\})$  έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 - 2a \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - 2b \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) + a^2 + b^2 - r^2 = 0 &\iff \\ \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2ax}{x^2 + y^2} - \frac{2by}{x^2 + y^2} + a^2 + b^2 - r^2 = 0 &\iff \\ 1 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2)(x^2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$

(a) Αν ο κύκλος  $C$  είναι διάτρητος στο  $(0, 0)$ , τότε  $a^2 + b^2 - r^2 = 0$ , επομένως ο  $C$  απεικονίζεται επί της ευθείας που δεν διέρχεται από το  $(0, 0)$ :  $1 - 2ax - 2by = 0$ .

(b) Αν  $C$  δεν διέρχεται από  $(0, 0)$ , τότε  $a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$ , άρα ο  $C$  απεικονίζεται επί του κύκλου

$$x^2 + y^2 - \frac{2ax}{a^2 + b^2 - r^2} - \frac{2by}{a^2 + b^2 - r^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - r^2} = 0.$$

□

**Παρατήρηση 7.1.7.** Τα Θεωρήματα 7.1.5 και 7.1.6 ισχύουν για την αντιστροφή ως προς τον οποιονδήποτε κύκλο. Η αντιστροφή  $t$  ως προς τον κύκλο  $C(K, r)$  με  $K = (k_1, k_2)$  είναι σύνθεση των παρακάτω μετασχηματισμών, οι οποίοι απεικονίζουν κύκλους σε κύκλους και ευθείες σε ευθείες:

$$t_1(x, y) = \left( \frac{x-k_1}{r}, \frac{y-k_2}{r} \right) - \text{σύνθεση μεταφοράς κατά } (-k_1, -k_2) \text{ και ομοιοθεσίας με λόγο } 1/r, \\ \text{η οποία απεικονίζει τον κύκλο } C(K, r) \text{ στον κύκλο } C(O, 1),$$

$$t_2 - \text{αντιστροφή ως προς τον κύκλο } C(O, 1),$$

$$t_1^{-1} - \text{οποία απεικονίζει τον κύκλο } C(O, 1) \text{ στον κύκλο } C(K, r).$$

### 7.1.2 Εφαρμογές της αντιστροφής ως προς τον κύκλο για την απόδειξη θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

**Θεώρημα 7.1.8.** (Πτολεμαίου) Σε κάθε τετράπλευρο  $ABCD$  ισχύει η ανισότητα

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

Το  $ABCD$  είναι κυρτό και εγγεγραμμένο σε κύκλο αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA \quad (7.1)$$

(το γινόμενο των διαγωνίων ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών).

*Απόδειξη.* Έστω  $t$  αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $C(D, 1)$ . Έστω ότι  $A', B', C'$  η εικόνας των  $A, B, C$ , αντίστοιχα.

Έχουμε  $A'C' \leq A'B' + B'C'$  (τριγωνική ανισότητα). Επίσης, για την ακτίνα  $r$  του κύκλου της αντιστροφής ισχύει (βλ. Παράδειγμα 7.1.3(2))

$$A'C' = \frac{AC \cdot r^2}{DA \cdot DC}, \quad A'B' = \frac{AB \cdot r^2}{DA \cdot DB}, \quad B'C' = \frac{BC \cdot r^2}{DB \cdot DC}.$$

Επειδή  $r = 1$ , έπεται ότι

$$\frac{AC}{DA \cdot DC} \leq \frac{AB}{DA \cdot DB} + \frac{BC}{DB \cdot DC} \implies AC \cdot DB \leq AB \cdot DC + BC \cdot DA.$$

Αν  $AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot DA$ , τότε  $A'C' = A'B' + B'C'$ . Επομένως τα σημεία  $A', B', C'$  ανήκουν σε μια ευθεία  $\varepsilon$  και  $B'$  είναι μεταξύ των  $A'$  και  $C'$ . Η  $\varepsilon$  δεν διέρχεται από το  $D$  (διαφορετικά  $A, B, C, D$  είναι συνευθειακά, δηλαδή  $ABCD$  δεν είναι τετράπλευρο). Συνεπώς  $t(\varepsilon)$  είναι κύκλος που περνάει από τα  $A, B, C$  διάτρητος στο  $D$  και  $B$  είναι ανάμεσα στα  $A$  και  $C$ . Άρα,  $ABCD$  είναι κυρτό εγγεγραμμένο σε κύκλο.

Για να δείξουμε ότι για ένα κυρτό τετράπλευρο  $ABCD$  εγγεγραμμένο σε κύκλο ισχύει η ισότητα (7.1) αρκεί να ακολουθήσουμε αντίστροφα τους παραπάνω ισχυρισμούς.  $\square$

**7.2 Ορισμός της γεωμετρίας της αντιστροφής του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .**

Αντιστροφή του εκτεταμένου επιπέδου  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ως προς τον κύκλο  $C = (K, r)$  είναι η απεικόνιση  $t : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  που ορίζεται ως εξής:

$$t(A) = \begin{cases} \text{σημείο αντίστροφο του } A \text{ ως προς το } C, & \text{αν } A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}, \\ \infty, & \text{αν } A = K, \\ K, & \text{αν } A = \infty. \end{cases}$$

Έστω  $\ell$  μια ευθεία του  $\mathbb{R}^2$ . Αντιστροφή του εκτεταμένου επιπέδου  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ως προς την εκτεταμένη ευθεία  $\ell \cup \{\infty\}$  είναι η απεικόνιση  $t : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  που ορίζεται ως εξής:

$$t(A) = \begin{cases} \text{σημείο συμμετρικό του } A \text{ ως προς την } \ell, & \text{αν } A \in \mathbb{R}^2, \\ \infty, & \text{αν } A = \infty. \end{cases}$$

**Ορισμός 7.2.1.** Καλούμε γενικευμένο κύκλο του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  κάθε κύκλο του  $\mathbb{R}^2$  και κάθε εκτεταμένη ευθεία του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .

Αποδεικνύεται εύκολα η παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 7.2.2.** Οποιαδήποτε τρία (διαφορετικά) σημεία του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  περιέχονται σε μοναδικό γενικευμένο κύκλο.

**Ορισμός 7.2.2.** Μια απεικόνιση  $t : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  καλείται μετασχηματισμός της αντιστροφής, όταν  $t$  είναι σύνθεση πεπερασμένου πλήθους αντιστροφών του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ως προς γενικευμένους κύκλους του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Συμβολίζουμε

$$Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}) = \{t : t \text{ μετασχηματισμός της αντιστροφής του } \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}\}.$$

**Θεώρημα 7.2.3.** Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}))$  είναι γεωμετρία.

Απόδειξη. Έστω  $f = a_1 \circ \dots \circ a_n \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ , όπου κάθε  $a_i$  είναι αντιστροφή ως προς κάποιο γενικευμένο κύκλο. Επειδή κάθε  $a_i$  είναι 1-1 και επί, η σύνθεση  $f$  είναι 1-1 και επί.

Αν  $f = a_1 \circ \dots \circ a_n \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ , τότε  $f^{-1} = a_n^{-1} \circ \dots \circ a_1^{-1} \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ .

Αν  $f = a_1 \circ \dots \circ a_n \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$  και  $g = b_1 \circ \dots \circ b_m \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ , τότε  $f \circ g = a_1 \circ \dots \circ a_n \circ b_1 \circ \dots \circ b_m \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ .

Συνεπώς  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}))$  είναι γεωμετρία.  $\square$

**Ορισμός 7.2.4.** Το ζεύγος  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}))$  καλείται γεωμετρία της αντιστροφής.

Αποδεικνύεται ότι ( βλ. Ασκήσεις του Κεφαλαίου 5):

**Θεώρημα 7.2.5.** Η στερεογραφική προβολή  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  απεικονίζει τους κύκλους της σφαίρας επί των γενικευμένων κύκλων του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .

### 7.3 Μερικές ιδιότητες της γεωμετρίας της αντιστροφής.

**Θεώρημα 7.3.1.** Η αντιστροφή του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ως προς τον κύκλο με κέντρο  $K$  απεικονίζει την εκτεταμένη ευθεία  $\ell \cup \{\infty\}$  που δεν διέρχεται από το  $K$  επί έναν κύκλο που διέρχεται από το  $K$  και του οποίου η εφαπτομένη στο  $K$  είναι παράλληλη στην  $\ell$ .

*Απόδειξη.* Η αντιστροφή ως προς οποιονδήποτε κύκλο είναι σύνθεση μεταφορών, ομοιοθεσιών ως προς  $(0, 0)$  και της αντιστροφής ως προς τον κύκλο  $C(O, 1)$ . Η μεταφορά και ομοιοθεσία ως προς  $(0, 0)$  απεικονίζουν τις ευθείες που δεν διέρχονται από το  $(0, 0)$  σε παράλληλες ευθείες. Επμένως αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα για την αντιστροφή  $t$  ως προς τον κύκλο  $C(O, 1)$ .

Η  $t$  απεικονίζει την ευθεία  $\ell : ax + by + c = 0$  που δεν διέρχεται από την αρχή επί του διάτρητου στο  $O = (0, 0)$  κύκλου με εξίσωση  $cx^2 + cy^2 + ax + by = 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Επίσης  $t(\infty) = (0, 0)$ . 'ρα,  $t(\ell \cup \infty)$  είναι ο κύκλος  $cx^2 + cy^2 + ax + by = 0$ , του οποίου η εφαπτομένη στο  $(0, 0)$  έχει εξίσωση  $ax + by = 0$  και, άρα, είναι παράλληλη στην  $\ell$ .  $\square$

**Θεώρημα 7.3.2.** Η αντιστροφή του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ως προς έναν γενικευμένο κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:

1. απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους,
2. διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των καμπυλών (μπορεί όμως να αντιστρέφει τον προσανατολισμό τους).

*Απόδειξη.* 1. Από τα Θεωρήματα 7.1.5, 7.1.6 και την Παρατήρηση 7.1.7 συμπεραίνουμε ότι κάθε αντιστροφή  $t$  του επιπέδου ως προς τον κύκλο με κέντρο  $K$  απεικονίζει

- (a) την εκτεταμένη ευθεία  $\ell \cup \{\infty\}$  που διέρχεται από το  $K$  στον εαυτό της, αφού  $t(\ell \setminus \{K\}) = \ell \setminus \{K\}$ ,  $t(K) = \infty$  και  $t(\infty) = K$ .
- (c) την εκτεταμένη ευθεία  $\ell \cup \{\infty\}$  που δεν διέρχεται από  $K$  επί έναν κύκλο  $C$  που διέρχεται από το  $K$ , αφού  $t(\ell) = C \setminus \{K\}$  και  $t(\infty) = K$ .
- (d) τον κύκλο  $C$  που διέρχεται από το  $K$  επί μιας εκτεταμένης ευθείας  $\ell \cup \{\infty\}$  που δεν διέρχεται από το  $K$ , αφού  $t(C \setminus \{K\}) = \ell$  και  $t(K) = \infty$ .
- (b) τον κύκλο  $C$  που δεν διέρχεται από το  $O$  επί έναν κύκλο (που δεν διέρχεται από  $K$ ).

2. Η ανάκλαση ως προς ευθεία διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των καμπυλών και αντιστρέφει τον προσανατολισμό τους. 'ρα, τις ίδιες ιδιότητες έχει η αντιστροφή ως προς εκτεταμένη ευθεία. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αντιστροφή  $t$  ως προς έναν κύκλο με κέντρο  $K$  διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των ευθειών  $\ell_1$  και  $\ell_2$  που τέμνονται σε ένα σημείο  $A \in \mathbb{R}^2$ .

Αν  $A = K$ , τότε  $t(\ell_1) = \ell_1$  και  $t(\ell_2) = \ell_2$ . 'ρα,  $(t(\ell_1), t(\ell_2)) = (\ell_1, \ell_2)$ .

Αν  $A \neq K$  και καμιά από τις  $\ell_1$  και  $\ell_2$  δεν διέρχεται από το  $K$ , τότε  $t(\ell_1) = C_1$  και  $t(\ell_2) = C_2$ , όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι κύκλοι που τέμνονται στο  $K$  και  $t(A)$ .

Η γωνία μεταξύ των εφαπτομένων  $\varepsilon^{A_1}$  και  $\varepsilon^{A_2}$  των  $C_1$  και  $C_2$  στο  $t(A)$  ισούται με την γωνία μεταξύ των εφαπτομένων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  των  $C_1$  και  $C_2$  στο  $K$ . Από το Θεώρημα 7.3.1

οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες στις  $\ell_1$  και  $\ell_2$ , αντίστοιχα. 'ρα,  $(\varepsilon^{A_1}, \varepsilon^{A_2}) = (\widehat{\varepsilon_1}, \widehat{\varepsilon_2}) = (\widehat{\ell_1}, \widehat{\ell_2})$ .

Η απόδειξη είναι όμοια όταν  $A \neq K$  και μόνο μία από τις  $\ell_1$  και  $\ell_2$  διέρχεται από το  $K$ .  $\square$



**Πόρισμα 7.3.3.** Η αντιστροφή του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ως προς τον κύκλο  $C(K, r)$  απεικονίζει

1. κάθε γενικευμένο κύκλο που διέρχεται από το  $K$  σε μιά εκτεταμένη ευθεία  $\ell \cup \{\infty\}$ ,
2. κάθε γενικευμένο κύκλο που δεν διέρχεται από το  $K$  σε έναν κύκλο.

**Πόρισμα 7.3.4.** Κάθε μετασχηματισμός της αντιστροφής έχει τις εξής ιδιότητες:

1. απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους,
2. διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των καμπυλών (μπορεί όμως να αντιστρέφει τον προσανατολισμό τους).

### 7.3.1 Η σχέση της γεωμετρίας της αντιστροφής με άλλες γεωμετρίες.

Επειδή  $\mathbb{R}^2$  είναι υποσύνολο του εκτεταμένου επιπέδου  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , μερικά σχήματα του  $\mathbb{R}^2$  μπορούν να θεωρηθούν ως σχήματα του  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  και αντίστροφα.

Επειδή κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση ανακλάσεων από ευθείες, έπεται ότι κάθε ισομετρία είναι περιορισμός στο  $\mathbb{R}^2$  ενός μετασχηματισμού της αντιστροφής.

Ποιά είναι η σχέση των αφινικών μετασχηματισμών και της ομάδας  $Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ .

Είναι ο περιορισμός ενός  $f \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$  στο  $\mathbb{R}^2$  αφινικός; Η απάντηση είναι όχι, αφού οι αφινικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες, ενώ η αντιστροφή μιας ευθείας ως προς τον κύκλο μπορεί να είναι διάτρητος κύκλος.

Μπορεί κάθε αφινικός μετασχηματισμός  $f$  του  $\mathbb{R}^2$  να επεκταθεί σε έναν  $F \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ ;

Ο αφινικός μετασχηματισμός  $f(\bar{v}) = 2\bar{v}$ , που δεν είναι ισομετρία, είναι σύνθεση  $f_2 \circ f_1$ , όπου  $f_1$  είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  και  $f_2$  είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 2$ . Πράγματι,  $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  και  $f_2(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$ . 'ρα,

$$f_2(f_1(x, y)) = \left( \frac{2\frac{x}{x^2+y^2}}{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2}, \frac{2\frac{y}{x^2+y^2}}{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} \right) = (2x, 2y)$$

Από την άλλη μεριά υπάρχουν αφινικοί μετασχηματισμοί  $f$  που δεν μπορούν να επεκταθούν σε έναν  $F \in Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ . Για παράδειγμα, ο αφινικός μετασχηματισμός  $f(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{v}$ , απεικονίζει τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  στην έλλειψη  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , ενώ οι μετασχηματισμοί της ομάδας  $Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$  απεικονίζουν τους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

## 7.4 Αντιστροφή και κάθετοι κύκλοι.

**Ορισμός 7.4.1.** Δύο κύκλοι καλούνται κάθετοι αν οι εφαπτομένες τους στα σημεία τομής είναι κάθετες.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

- Δύο κύκλοι  $C(K, r)$  και  $C(K', r')$  είναι κάθετοι αν και μόνον αν  $KK'^2 = r^2 + r'^2$ .
- Οι κύκλοι κάθετοι στον κύκλο  $C(K, r)$  δεν διέρχονται από το κέντρο του  $K$ .
- Το κέντρο κάθε κύκλου κάθετου στον κύκλο  $C(K, r)$  βρίσκεται έξω από τον κύκλο.
- Αν οι κύκλοι  $C(K, r)$  και  $C(K', r')$  είναι κάθετοι, τότε υπάρχει διάμετρος του  $C(K, r)$  που δεν τέμνει τον  $C(K', r')$ .

**Θεώρημα 7.4.2.** Η αντιστροφή απεικονίζει κάθε γενικευμένο κύκλο κάθετο στον κύκλο της αντιστροφής στον εαυτό του.

*Απόδειξη.* Έστω  $t$  αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $C(K, r)$ .

Κάθε γενικευμένος κύκλος κάθετος στον  $C(K, r)$  είτε είναι εκτεταμένη ευθεία που διέρχεται από το  $K$  είτε είναι κύκλος που δεν διέρχεται από το  $K$ .

Αν  $\ell$  είναι ευθεία κάθετη στον  $C(K, r)$ , τότε  $\ell$  διέρχεται από το κέντρο  $K$  του κύκλου. ΄ρα,  $t(\ell) = \ell$ .

Αν  $C(K_1, r_1)$  είναι κύκλος κάθετος στον  $C(K, r)$ , τότε  $C(K_1, r_1)$  δεν διέρχεται από το κέντρο  $K$  του κύκλου. Επομένως  $t(C(K_1, r_1))$  είναι κύκλος. Έστω  $C(K, r) \cap C(K_1, r_1) = \{P, Q\}$ . Επειδή  $P, Q \in C(K, r)$  και  $t$  αφήνει σταθερά τα σημεία του  $C(K, r)$ , έπεται ότι  $t(P) = P$  και  $t(Q) = Q$ .

Έστω ότι  $(KK_1) \cap C(K_1, r_1) = \{M, N\}$ . Θα δείξουμε ότι  $t(M) = N$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $M$  είναι μεταξύ  $K$  και  $K_1$ . Τότε  $r^2 = KK_1^2 - r_1^2 = (KM + r_1)^2 - r_1^2$  και  $KN = KM + 2r_1$ . ΄ρα,

$$r^2 = KK_1^2 - r_1^2 = (KM + r_1)^2 - r_1^2 = KM \cdot (KM + 2r_1) = KM \cdot KN.$$

Συνεπώς  $P, Q, N \in t(C(K_1, r_1))$ . Επειδή τρία μη συνευθειακά σημεία προσδιορίζουν ένα μοναδικό κύκλο που τα περιέχει,  $t(C(K_1, r_1)) = C(K_1, r_1)$ .  $\square$

**Θεώρημα 7.4.3.** Για κάθε σημείο  $P$  στο εσωτερικό ενός κύκλου  $C(K, r)$  υπάρχει κύκλος  $C_P$  κάθετος στο  $C(K, r)$ , τέτοιος ώστε η αντιστροφή ως προς τον  $C_P$  απεικονίζει το  $P$  στο  $K$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $T$  ένα σημείο της καθέτου της  $(KP)$  από το  $P$  με τον  $C(K, r)$  και  $K_1$  το σημείο τομής της εφαπτομένης από του  $C(K, r)$  στο  $T$  με την  $(KP)$ . Θα δείξουμε ότι ο κύκλος  $C_P = C(K_1, |TK_1|)$  με κέντρο  $K_1$  και ακτίνα  $|TK_1|$  είναι ο ζητούμενος.

Από την κατασκευή ο  $C_P$  είναι κάθετος στον  $C(K, r)$  ( $|KK_1|^2 = |KT|^2 + |TK_1|^2$ ).

Από την ομοιότητα των τριγώνων  $TKK_1$  και  $K_1PT$  έχουμε  $|PK_1| \cdot |KK_1| = |TK_1|^2$ . ΄ρα, τα σημεία  $K$  και  $P$  είναι αντίστροφα ως προς τον  $C_P$ .  $\square$

**Θεώρημα 7.4.4.** Έστω  $\mathfrak{D}(K, r)$  ο κλειστός δίσκος που φράσσεται από τον κύκλο  $C(K, r)$ .

Για οποιαδήποτε δύο σημεία  $P, Q \in \mathfrak{D}(K, r)$  που δεν ανήκουν στην ίδια διάμετρο του  $C(K, r)$ , υπάρχει μοναδικός κύκλος  $C$  που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  και είναι κάθετος στο  $C(K, r)$ .

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $P$  είναι στο εσωτερικό του  $\mathfrak{D}(K, r)$ .

Από το Θεώρημα 7.4.3 υπάρχει κύκλος  $C_P = C(K_1, r_1)$  κάθετος στο  $C(K, r)$ , τέτοιος ώστε η αντιστροφή  $t_P$  ως προς τον  $C_P$  απεικονίζει το  $P$  στο  $K$ . Επειδή ο  $C_P$  είναι κάθετος στο  $C(K, r)$ , ισχύει επίσης ότι  $t_P(C(K, r)) = C(K, r)$ .

Έστω ότι  $t_P(Q) = Q'$  και  $d = (KQ') \cup \{\infty\}$ . Η απεικόνιση  $t_P^{-1} = t_P$  διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των καμπυλών  $C(K, r)$  και  $d$ . Επειδή η  $d$ , ως διάμετρος είναι κάθετη στον  $C(K, r)$ , έπεται ότι ο κύκλος  $t_P^{-1}(C(K, r)) = C(K, r)$  είναι κάθετος στον γενικευμένο κύκλο  $t_P^{-1}(d)$ .

Ο γενικευμένος κύκλος  $t_P^{-1}(d)$  διέρχεται από τα  $t_P^{-1}(K) = P$  και  $t_P^{-1}(Q') = Q$ .

Ας υποθέσουμε ότι  $t_P^{-1}(d)$  είναι εκτεταμένη ευθεία  $(PQ) \cup \{\infty\}$ . Τότε  $K_1 \notin (PQ)$ , διότι διαφορετικά  $K \in (PK_1) = (PQ)$ , δηλαδή  $P$  και  $Q$  ανήκουν στην ίδια διάμετρο του  $C(K, r)$ , που είναι άτοπο. Άρα,  $t(t_P^{-1}(d)) = d$  είναι κύκλος, που είναι άτοπο.

Συνεπώς  $t_P^{-1}(d)$  είναι κύκλος που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  και είναι κάθετος στο  $C(K, r)$ .

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλος κύκλος  $C_2$  που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  και είναι κάθετος στον  $C(K, r)$ . Τότε  $t_P(C_2)$  είναι γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα  $K = t_P(P)$  και  $Q' = t_P(Q)$  και είναι κάθετος στον  $C(K, r)$ . Άρα,  $t_P(C_2)$  εκτεταμένη ευθεία που διέρχεται από τα  $K$  και  $Q'$ . Επομένως  $t_P(C_2) = d$ . Άρα,  $C_2 = t_P^{-1}(d) = C_1$ .

Στην περίπτωση που  $P, Q \in C(K, r)$  η απόδειξη του Θεωρήματος είναι εύκολη. □

**Θεώρημα 7.4.5.** Η αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $C(K, r)$  κάθετου στον  $C(K_1, r_1)$  απεικονίζει τα σημεία που βρίσκονται εσωτερικά του  $C(K_1, r_1)$  επί τα σημεία που βρίσκονται εσωτερικά του  $C(K_1, r_1)$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{(M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{K\} : MK_1 < r_1\}, \quad A = \{(M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{K\} : MK_1 > r_1\}$$

Τα σύνολα  $A$  και  $B$  είναι συνεκτικά και  $A$  αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται εσωτερικά του  $C(K_1, r_1)$ .

Η αντιστροφή  $t : \mathbb{R}^2 \setminus \{K\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  ως προς τον κύκλο  $C(K, r)$  είναι 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση της οποίας η αντίστροφη  $t^{-1} = t$  είναι συνεχής.

Τα σύνολα  $t(A)$  και  $t(B)$  είναι συνεκτικά. Επειδή  $t(C(K_1, r_1)) = C(K_1, r_1)$ , έπεται ότι  $t(A) = A$  ή  $t(A) = B$ . Επειδή τα σημεία  $A \cap C(K, r)$  παραμένουν σταθερά, έπεται ότι  $t(A) = A$ . □

**Ορισμός 7.4.6.** Δύναμη του σημείου  $A$  του επιπέδου ως προς το κύκλο  $C(K, r)$  είναι ο αριθμός  $p(A) = KA^2 - r^2$  ( $p(A) = 0$  για  $A \in C(K, r)$ ).

Ριζικός άξονας δύο μη ομόκεντρων κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν ίσες δυνάμεις ως προς  $C_1$  και  $C_2$ .

**Θεώρημα 7.4.7.** Ο ριζικός άξονας δύο μη ομόκεντρων κύκλων είναι ευθεία κάθετη στην διάκεντρό τους.

Απόδειξη. Έστω  $C_1 = C(K_1, r_1)$  και  $C_2 = C(K_2, r_2)$  είναι δύο μη ομόκεντροι κύκλοι. Αν  $K_1 = (x_1, y_1)$  και  $K_2 = (x_2, y_2)$ , τότε  $\overrightarrow{K_1K_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} \neq \vec{0}$  είναι η διεύθυνση της διακέντρου των  $C_1$  και  $C_2$ .

Ο ριζικός άξονας των  $C_1$  και  $C_2$  είναι το σύνολο όλων των σημείων  $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\begin{aligned} AK_1^2 - r_1^2 &= AK_2^2 - r_2^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2 \\ (x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y &= x_1^2 + y_1^2 + r_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + r_2^2 \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση ευθείας που είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ , δηλαδή στο  $\overrightarrow{K_1K_2}$ . Ήρα, ο ριζικός άξονας των  $C_1$  και  $C_2$  είναι ευθεία κάθετη στην διάκεντρό τους.  $\square$

**Θεώρημα 7.4.8.** Τα κέντρα των κύκλων κάθετων και στους δύο μη ομόκεντρος κύκλους  $C_1$  και  $C_2$  βρίσκονται πάνω στον ριζικό άξονα τους.

Απόδειξη. Έστω ότι ο κύκλος  $C(K, r)$  είναι κάθετος στους δύο μη ομόκεντρος κύκλους  $C_1 = C(K_1, r_1)$  και  $C_2 = C(K_2, r_2)$ . Τότε

$$KK_1^2 = r^2 + r_1^2 \text{ και } KK_2^2 = r^2 + r_2^2.$$

Επομένως  $r^2 = KK_1^2 - r_1^2 = KK_2^2 - r_2^2$ .

Ήρα, το κέντρο  $K$  έχει ίσες δυνάμεις ως προς  $C_1$  και  $C_2$ .

Συνεπώς  $K$  είναι σημείο του ριζικού άξονα των  $C_1$  και  $C_2$ .  $\square$

**Θεώρημα 7.4.9.** Αν οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  είναι κάθετοι, τότε για κάθε σημείο  $P$  στο εσωτερικό του  $C_1$  υπάρχει μοναδικός κύκλος  $C$  κάθετος στο  $C_1$  και στο  $C_2$  που διέρχεται από τα  $P$ .

## 7.5 Ασκήσεις

**7.5.1.** Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις:

(α') Αν  $A'$  είναι αντίστροφο του  $A$  ως προς την αντιστροφή  $t$ , τότε  $A$  είναι αντίστροφο του  $A'$  ως προς την αντιστροφή  $t$ .

(β') Έστω  $A'$  είναι αντίστροφο του  $A$  ως προς τον κύκλο  $C$ . Τότε

(i) Αν  $A \in C$ , τότε  $A' = A$ .

(ii) Αν  $A$  είναι έξω από τον κύκλο, τότε  $A'$  είναι μέσα στον κύκλο.

(iii) Αν  $A$  είναι μέσα στον κύκλο, τότε  $A'$  είναι έξω από τον κύκλο.

(γ') Κάθε αντιστροφή  $t$  ως προς τον κύκλο με κέντρο  $K$  είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση του  $\mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  στον εαυτό του.

(δ') Αν  $t : \mathbb{R}^2 \setminus \{K\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{K\}$  είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο  $K$ , τότε  $t^{-1} = t$ .

**7.5.2.** Έστω  $\mathbb{C}$  το μιγαδικό επίπεδο και  $c \in \mathbb{C}$ . Να αποδειχθεί ότι η αντιστροφή  $t$  του  $\mathbb{C} \setminus \{c\}$  ως προς τον κύκλο  $|z - c| = r$  δίνεται από τον τύπο  $t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c$ .

**Απάντηση:** Έστω  $z \in \mathbb{C}$ . Τότε η απόσταση του  $z$  από τον κέντρο του κύκλου  $|z - c| = r$  είναι  $|z - c|$  και η απόσταση του σημείου  $z^* = \frac{r^2}{z - c} + c$  από τον κέντρο του κύκλου  $|z - c| = r$  είναι

$$|z^* - c| = \left| \frac{r^2}{z - c} \right| = \frac{r^2}{|z - c|} = \frac{r^2}{|z - c|}.$$

Επομένως  $|z - c| \cdot |z^* - c| = |z - c| \cdot \frac{r^2}{|z - c|} = r^2$ . Ήρα,  $z^* = t(z)$ .

**7.5.3.** Αν  $t$  είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ , να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $t(4, 5)$ .

**7.5.4.** Να βρεθεί η εξίσωση του γενικευμένου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία

(α')  $(1, 2)$ ,  $(4, 5)$  και  $\infty$ .

(β')  $(1, 2)$ ,  $(4, 5)$  και  $(5, -6)$ .

**7.5.5.** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου  $C^*$  κάθετου στον κύκλο  $C(O, 2) : x^2 + y^2 = 4$ , αν η αντιστροφή ως προς τον  $C^*$  απεικονίζει το  $P = (1, 0)$  στο κέντρο  $O = (0, 0)$  του  $C(O, 2)$ .

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 7.4.3.

**7.5.6.** Να αποδειχθεί ότι κάθε ομοιοθεσία με κέντρο  $(0, 0)$  απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

**7.5.7.** Δίνεται ο κύκλος  $K_0 : x^2 + y^2 = 4$  και η ευθεία  $\ell : x + y - 8 = 0$  του  $\mathbb{R}^2$ . Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης  $t(\ell)$  για την αντιστροφή  $t$  ως προς τον  $K_0$ .



## Κεφάλαιο 8

### Μετασχηματισμοί του μιγαδικού επιπέδου.

Το εκτεταμένο επίπεδο  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  μπορεί να ερμηνευτεί και ως το σύνολο των μιγαδικών αριθμών  $\mathbb{C}$  συμπληρωμένο ένα το σημείο  $\infty$ . Το σύνολο  $\widehat{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  καλείται σφαίρα του Riemann. Συμβολίζουμε με  $Inv(\widehat{\mathbb{C}})$  την ομάδα όλων των μετασχηματισμών της αντιστροφής του εκτεταμένου επιπέδου  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Κάθε  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  γράφεται και στην μορφή  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \theta = x/r$  και  $\sin \theta = y/r$  με  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

Αν  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  και  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , τότε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ z_1 / z_2 &= (r_1 / r_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Οι παρακάτω μετασχηματισμοί του  $\widehat{\mathbb{C}}$  ανήκουν στην ομάδα  $Inv(\widehat{\mathbb{C}})$ .

- Μεταφορά κατά  $c \in \mathbb{C}$ :  $\mu(z) = z + c$  για  $z \in \mathbb{C}$  και  $\mu(\infty) = \infty$ .
- Ανάκλαση ως προς τον  $Ox$ -άξονα:  $\sigma(z) = \bar{z}$  για  $z \in \mathbb{C}$  και  $\sigma(\infty) = \infty$ .
- Περιστροφή γύρω από την αρχή:  $t(z) = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$  και  $|a| = 1$ , για  $z \in \mathbb{C}$  και  $t(\infty) = \infty$ .
- Ισομετρία:  $t(z) = az + b$  ή  $t(z) = a\bar{z} + b$ , όπου  $a, b \in \mathbb{C}$  και  $|a| = 1$ , για  $z \in \mathbb{C}$  και  $t(\infty) = \infty$ .
- Αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $|z| = r$ :  $t(z) = r^2/\bar{z}$  για  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $t(0) = \infty$  και  $t(\infty) = 0$ .
- Ομοιοθεσία:  $t(z) = kz$ ,  $k \in \mathbb{R}$  και  $k > 0$ , για  $z \in \mathbb{C}$  και  $t(\infty) = \infty$ .  
Για ομοιοθεσία  $t(z) = kz$  ισχύει  $t = t_2 \circ t_1$ , όπου  $t_1(z) = 1/\bar{z}$  -αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $|z| = 1$  και  $t_2(z) = k/\bar{z}$  -αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $|z| = \sqrt{k}$ .
- Αφινικός μετασχηματισμός:  $t(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  για  $z \in \mathbb{C}$  και  $t(\infty) = \infty$ .  
Η  $t = t_2 \circ t_1$ , όπου  $t_1(z) = |a|z$  -ομοιοθεσία και  $t_2(z) = (a/|a|)z + b$  -ισομετρία.
- $t(z) = 1/z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $t(0) = \infty$  και  $t(\infty) = 0$ .  
 $t = t_1 \circ \sigma$ , όπου  $t_1(z) = 1/\bar{z}$ -αντιστροφή ως προς τον  $|z| = 1$  και  $\sigma(z) = \bar{z}$ -ανάκλαση.
- Αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $|z - c| = r$ :  $t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ ,  $t(c) = \infty$  και  $t(\infty) = c$ .

Η αντιστροφή  $t$  είναι σύνθεση  $t_1^{-1} \circ t_2 \circ t_1$  των παρακάτω μετασχηματισμών:

$$t_1(z) = \frac{z-c}{r} - \text{σύνθεση μεταφοράς και ομοιοθεσίας που στέλνει τον κύκλο } |z-c| = r$$

στον κύκλο  $|z| = 1$ ,

$$t_2(z) = 1/\bar{z} - \text{αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο,}$$

$$t_1^{-1}(z) = rz + c - \text{σύνθεση της ομοιοθεσίας και της μεταφοράς που στέλνει τον κύκλο } |z| = 1 \text{ πίσω στον } |z-c| = r.$$

## 8.1 Μετασχηματισμοί "bius του $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Ορισμός 8.1.1.** Μετασχηματισμός "bius του  $\widehat{\mathbb{C}}$  με συσχετισμένο πίνακα  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , όπου  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  και  $ad - bc \neq 0$ , είναι η απεικόνιση  $M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  που ορίζεται ως εξής:

$$1. \text{ Αν } c \neq 0, \text{ τότε } M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty, & \text{αν } z = -d/c \\ a/c, & \text{αν } z = \infty \end{cases}$$

2. Αν  $c = 0$ , τότε (επειδή  $ad - cb \neq 0$  στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι  $a \neq 0$  και  $d \neq 0$ )

$$M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d}, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{αν } z = \infty. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση  $\tau_{\widehat{\mathbb{C}}}(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$  είναι μετασχηματισμός "bius με συσχετισμένο πίνακα  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Συμβολίζουμε

$$\mathbb{M} = \{M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : M \text{ είναι μετασχηματισμός "bius}\}$$

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ και } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right\}$$

Η απεικόνιση  $GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}$  που σε κάθε  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$  αντιστοιχεί τον μετασχηματισμό "bius  $M$ , του οποίου ο πίνακας  $A$  είναι συσχετισμένος, δεν είναι 1-1, επειδή οι πίνακες  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  και  $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$  ορίζουν τον ίδιο μετασχηματισμό "bius για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Στο  $GL(2, \mathbb{C})$  ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$



Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του  $GL(2, \mathbb{C})$  ως προς τη σχέση  $\sim^P$  συμβολίζεται με  $PGL(2, \mathbb{C})$ . Η κλάση της  $PGL(2, \mathbb{C})$  που περιέχει τον πίνακα  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  συμβολίζεται με  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Ορίζουμε  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ .

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο  $PGL(2, \mathbb{C})$  με την πράξη πολλαπλασιασμού των κλάσεων όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι ομάδα.

Η απεικόνιση  $f : \mathbb{M} \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$  με  $f(M) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , όπου  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  είναι πίνακας συσχετισμένος με τον μετασχηματισμό "bius  $M$ , είναι 1-1.

**Θεώρημα 8.1.2.** Το ζεύγος  $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{M})$  είναι γεωμετρία.

Απόδειξη. Το Θεώρημα συνεπάγεται από τις παρακάτω προτάσεις που αποδεικνύονται εύκολα.

1. Κάθε μετασχηματισμός "bius είναι 1-1 και επί.

2. Αν  $M$  είναι μετασχηματισμός "bius, τότε  $M^{-1}$  είναι μετασχηματισμός "bius.

Αν  $M$  είναι μετασχηματισμός "bius με συσχετισμένο πίνακα  $A$ , τότε  $M^{-1}$  είναι μετασχηματισμός "bius με συσχετισμένο πίνακα  $A^{-1}$ .

3. Η σύνθεση δύο μετασχηματισμών "bius είναι μετασχηματισμός "bius.

Αν  $M_1$  και  $M_2$  είναι μετασχηματισμοί "bius με συσχετισμένους πίνακες  $A_1$  και  $A_2$ , αντίστοιχα, τότε  $M_1 \circ M_2$  είναι μετασχηματισμός "bius με συσχετισμένο πίνακα  $A_1 \cdot A_2$ .

□

**Πόρισμα 8.1.2.** Η ομάδα όλων των μετασχηματισμών "bius με την πράξη σύνθεσης μετασχηματισμών είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα  $PGL(2, \mathbb{C})$ .

### 8.1.1 Ιδιότητες μετασχηματισμών "bius.

**Πρόταση 8.1.2.** Η ταυτοτική απεικόνιση  $\tau_{\widehat{\mathbb{C}}}(z) = z$  είναι ο μοναδικός μετασχηματισμός "bius που αφήνει σταθερά τα σημεία  $0, 1$  και  $\infty$ .

Απόδειξη. Έστω  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  για τον οποίον  $M(0) = 0$ ,  $M(1) = 1$  και  $M(\infty) = \infty$ .

$$M(\infty) = \infty \implies c = 0 \implies d \neq 0$$

$$M(0) = 0 \implies b/d = 0 \implies b = 0$$

$$M(1) = 1 \implies \frac{a}{d} = 1 \implies a = d$$

Συνεπώς,  $M(z) = \frac{az+0}{0 \cdot z+a} = z$ . Άρα,  $M = \tau_{\widehat{\mathbb{C}}}$

□

**Θεώρημα 8.1.3.** Για κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων  $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$  υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός "bius  $M$  για τον οποίον  $M(z_1) = 0$ ,  $M(z_2) = 1$  και  $M(z_3) = \infty$ .

Απόδειξη. Έστω  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Εύκολα επαληθεύεται ότι για τον μετασχηματισμό "bious

$$M(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

με συσχετισμένο πίνακα  $\begin{pmatrix} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} & -\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} z_1 \\ 1 & -z_3 \end{pmatrix}$  ισχύει  $M(z_1) = 0$ ,  $M(z_2) = 1$  και  $M(z_3) = \infty$ .

Θα δείξουμε ότι ο  $M$  είναι μοναδικός. Ας υποθέσουμε ότι για έναν μετασχηματισμό "bious  $S$  ισχύει  $S(z_1) = 0$ ,  $S(z_2) = 1$  και  $S(z_3) = \infty$ . Τότε ο μετασχηματισμός "bious  $S \circ M^{-1}$  αφήνει σταθερά τα σημεία  $0, 1$  και  $\infty$ . Από την Πρόταση 8.1.2  $S \circ M = \tau_{\hat{\mathbb{C}}}$ . Άρα,  $S = M$ .

Αν  $z_1 = \infty$ , τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι  $M(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$ .

Αν  $z_2 = \infty$ , τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι  $M(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$ .

Αν  $z_3 = \infty$ , τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι  $M(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ .

□

**Θεώρημα 8.1.4.** Για οποιεσδήποτε τριάδες διαφορετικών σημείων  $z_1, z_2, z_3$  και  $w_1, w_2, w_3$  του  $\hat{\mathbb{C}}$  υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός "bious για τον οποίον  $M(z_1) = w_1$ ,  $M(z_2) = w_2$  και  $M(z_3) = w_3$ .

Απόδειξη. Υπάρχει μετασχηματισμός "bious  $M_1$  για τον οποίον  $M_1(z_1) = 0$ ,  $M_1(z_2) = 1$  και  $M_1(z_3) = \infty$ . Επίσης υπάρχει μετασχηματισμός "bious  $M_2$  για τον οποίον  $M_2(w_1) = 0$ ,  $M_2(w_2) = 1$  και  $M_2(w_3) = \infty$ . Ο μετασχηματισμός "bious  $M = M_2^{-1} \cdot M_1$  απεικονίζει τα  $z_1, z_2, z_3$  στα  $w_1, w_2, w_3$ , αντίστοιχα.

Θα δείξουμε την μοναδικότητα του  $M$ . Έστω ότι  $S$  είναι επίσης μετασχηματισμός "bious που απεικονίζει τα  $(z_1, z_2, z_3)$  στα  $(w_1, w_2, w_3)$ , αντίστοιχα. Τότε οι μετασχηματισμοί "bious  $M_2 \cdot M \cdot M_1^{-1}$  και  $M_2 \cdot S \cdot M_1^{-1}$  απεικονίζουν τα  $0, 1, \infty$  στα  $0, 1, \infty$ , αντίστοιχα. Επομένως

$$M_2 \cdot M \cdot M_1^{-1} = M_2 \cdot S \cdot M_1^{-1} = \tau_{\hat{\mathbb{C}}} \implies S = M.$$

□

## 8.2 Γενικευμένοι μετασχηματισμοί "bious.

**Ορισμός 8.2.1.** Έστω  $\sigma : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  με  $\sigma(z) = \bar{z}$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και  $\sigma(\infty) = \infty$ .

Μια απεικόνιση  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  καλείται γενικευμένος μετασχηματισμός "bious, αν  $T$  είναι μετασχηματισμός "bious ή  $T = M \circ \sigma$ , όπου  $M$  είναι μετασχηματισμός "bious.

Συμβολίζουμε

$$\mathbb{GM} = \mathbb{M} \cup \{M \circ \sigma : M \in \mathbb{M}\},$$

όπου  $\mathbb{M}$  είναι το σύνολο όλων των μετασχηματισμών "bious.

Κάθε γενικευμένος μετασχηματισμός "bious  $T$  έχει μιά από τις μορφές:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \text{με } ad - bc \neq 0.$$

**Πρόταση 8.2.2.** Για κάθε μετασχηματισμό "bius  $M$  υπάρχει μετασχηματισμός "bius  $M^*$  για τον οποίον  $\overline{M(z)} = M^*(\bar{z})$  (δηλαδή  $\sigma \circ M = M^* \circ \sigma$  για  $\sigma(z) = \bar{z}$ ).

Απόδειξη. Έστω ότι  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , τότε  $\overline{M(z)} = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} = M^*(\bar{z})$ , όπου  $M^*(z) = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$  και  $\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \overline{ad - bc} \neq 0$ , δηλαδή  $M^* \in \mathbb{M}$ .  $\square$

**Θεώρημα 8.2.3.** Το ζεύγος  $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{GM})$  είναι γεωμετρία.

Απόδειξη. Επειδή η απεικόνιση  $\sigma(z) = \bar{z}$  και κάθε μετασχηματισμός "bius είναι 1-1 και επί του  $\widehat{\mathbb{C}}$ , έπεται ότι κάθε γενικευμένος μετασχηματισμός "bius είναι 1-1 και επί  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Έστω  $T_1, T_2 \in \mathbb{GM}$ . Από την την Πρόταση 8.2.2 έπεται ότι για κάθε μετασχηματισμό "bius  $M$  υπάρχει μετασχηματισμός "bius  $M^*$  για τον οποίον  $\sigma \circ M = M^* \circ \sigma$ .

Παρακάτω αποδεικνύουμε ότι  $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{GM}$  θεωρώντας όλες τις πιθανές περιπτώσεις.

(i)  $T_1, T_2 \in \mathbb{M} \implies T_1 \circ T_2 \in \mathbb{M} \subset \mathbb{GM}$ .

(ii)  $T_1 \in \mathbb{M}$  και  $T_2 = M \circ \sigma$ , όπου  $M \in \mathbb{M} \implies T_1 \circ T_2 = (T_1 \circ M) \circ \sigma$ , όπου  $T_1 \circ M \in \mathbb{M} \implies T_1 \circ T_2 \in \mathbb{GM}$ .

(iii)  $T_1 = M \circ \sigma$ , όπου  $M \in \mathbb{M}$  και  $T_2 \in \mathbb{M}$ ,  $\implies T_1 \circ T_2 = M \circ (\sigma \circ T_2) = M \circ T_2^* \circ \sigma$ , όπου  $M, T_2^* \in \mathbb{M} \implies T_1 \circ T_2 \in \mathbb{GM}$ .

(iv)  $T_1 = M_1 \circ \sigma$  και  $T_2 = M_2 \circ \sigma$ , όπου  $M_1, M_2 \in \mathbb{M} \implies T_1 \circ T_2 = M_1 \circ (\sigma \circ M_2) \circ \sigma = M_1 \circ (M_2^* \circ \sigma) \circ \sigma = M_1 \circ M_2^*$  όπου  $M_1, M_2^* \in \mathbb{M} \implies T_1 \circ T_2 \in \mathbb{M} \subset \mathbb{GM}$ .

Έστω  $T \in \mathbb{GM}$  θα δείξουμε ότι  $T^{-1} \in \mathbb{GM}$ .

Αν  $T \in \mathbb{M}$ , τότε  $T^{-1} \in \mathbb{M} \subset \mathbb{GM}$  επειδή  $\mathbb{M}$  είναι ομάδα ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων.

Αν  $T = M \circ \sigma$  όπου  $M \in \mathbb{M}$ , τότε  $M^{-1} \in \mathbb{M}$ . Από την Πρόταση 8.2.2

$$T^{-1} = \sigma^{-1} \circ M^{-1} = \sigma \circ M^{-1} = M^* \circ \sigma, \quad M^* \in \mathbb{M}.$$

Ήρα,  $T^{-1} \in \mathbb{GM}$ .  $\square$

**Πρόταση 8.2.4.** Κάθε αντιστροφή  $t$  ως προς τον γενικευμένο κύκλο του  $\widehat{\mathbb{C}}$  είναι γενικευμένος μετασχηματισμός "bius της μορφής  $M(\bar{z})$ , όπου  $M \in \mathbb{M}$ .

Απόδειξη. Αν  $t$  είναι ανάκλαση ως προς την ευθεία  $l \cup \{\infty\}$  του  $\widehat{\mathbb{C}}$ , τότε  $t(z) = a\bar{z} + b$  με  $|a| = 1$ . Επομένως  $t(z) = \frac{a\bar{z}+b}{0\cdot\bar{z}+1}$ . Ήρα,  $t(z) = M(\bar{z})$ , όπου  $M$  μετασχηματισμός "bius με συσχετισμένο

πίνακα  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ .

Αν  $t$  είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $|z - c| = r$ , τότε  $t(c) = \infty$ ,  $t(\infty) = c$  και

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c = \frac{r^2 + c\bar{z} - c\bar{c}}{\bar{z} - \bar{c}} = \frac{c\bar{z} + (r^2 - c\bar{c})}{\bar{z} - \bar{c}}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{c, \infty\}.$$

Ήρα,  $t(z) = M(\bar{z})$ , όπου  $M \in \mathbb{M}$  με συσχετισμένο πίνακα  $\begin{pmatrix} c & r^2 - c\bar{c} \\ 1 & \bar{c} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

**Θεώρημα 8.2.5.** Κάθε μετασχηματισμός της αντιστροφής  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  είναι γενικευμένος μετασχηματισμός "bius ( $\text{Inv}(\widehat{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{GM}$ ).

Απόδειξη. Έστω  $f \in \text{Inv}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Τότε Έστω  $f = t_1 \circ \dots \circ t_n$ , όπου κάθε  $t_i$  είναι αντιστροφή ως προς κάποιο γενικευμένο κύκλο. Από την Πρόταση 8.2.4 για κάθε  $i$  ισχύει:  $t_i(z) = M_i(\bar{z})$ , όπου  $M_i$  είναι μετασχηματισμός "bius. Ήρα,  $t_i$  είναι γενικευμένος μετασχηματισμός "bius για κάθε  $i = 1, \dots, n$ .

Επειδή το σύνολο όλων των γενικευμένων μετασχηματισμών "bius είναι ομάδα ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων, συνεπάγεται ότι  $f$  είναι γενικευμένος μετασχηματισμός "bius.  $\square$

**Θεώρημα 8.2.6.** Κάθε γενικευμένος μετασχηματισμός "bius είναι μετασχηματισμός της αντιστροφής ( $\mathbb{GM} \subseteq \text{Inv}(\widehat{\mathbb{C}})$ ).

Απόδειξη. Έστω  $M$  ένας γενικευμένος μετασχηματισμός "bius.

Αν  $M$  είναι μετασχηματισμός "bius που ορίζεται από τον τύπο  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  με  $c \neq 0$ , τότε

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c}.$$

$$\text{Ήρα, } M = t_3 \circ t_2 \circ t_1, \text{ όπου } t_1(z) = \begin{cases} cz + d, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{αν } z = \infty \end{cases}, t_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty, & \text{αν } z = 0 \\ 0, & \text{αν } z = \infty \end{cases},$$

$$\text{και } t_3(z) = \begin{cases} \frac{bc-ad}{c}z + \frac{a}{c}, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{αν } z = \infty \end{cases}.$$

Καθεμιά από τις απεικονίσεις  $t_1, t_2, t_3$  είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς γενικευμένους κύκλους. Ήρα,  $M$  είναι μετασχηματισμός της αντιστροφής. Όμοια αποδεικνύεται ότι  $M$  είναι μετασχηματισμός της αντιστροφής αν  $c = 0$ .

Αν  $M = M^* \circ \sigma$ , όπου  $M^*$  είναι μετασχηματισμός "bius και  $\sigma(z) = \bar{z}$ , τότε, όπως αποδείξαμε παραπάνω  $M^*$  είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς γενικευμένους κύκλους. Επειδή  $\sigma$  είναι αντιστροφή ως προς τον  $Ox$ , έπεται ότι  $M$  είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς γενικευμένους κύκλους. Ήρα,  $M$  είναι μετασχηματισμός της αντιστροφής.  $\square$

**Πόρισμα 8.2.7.** Η ομάδα των μετασχηματισμών της αντιστροφής συμπίπτει με την ομάδα των γενικευμένων μετασχηματισμών "bius ( $\text{Inv}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{GM}$ ).

**Πόρισμα 8.2.8.** Κάθε γενικευμένος μετασχηματισμός "bius απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους και διατηρεί τις γωνίες.

**Πόρισμα 8.2.9.** Για οποιουδήποτε γενικευμένους κύκλους  $C_1$  και  $C_2$  του  $\widehat{\mathbb{C}}$  υπάρχει μετασχηματισμός "bius  $M$  για τον οποίον  $M(C_1) = C_2$ .

Απόδειξη. Έστω  $p_1, q_1, r_1 \in C_1$  και  $p_2, q_2, r_2 \in C_2$ . Από το Θεώρημα 8.1.4 υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός "bius  $M$  που απεικονίζει τα  $p_1, q_1, r_1 \in C_1$  στα  $p_2, q_2, r_2 \in C_2$ , αντίστοιχα. Από το Πόρισμα 8.2.8  $M(C_1)$  είναι γενικευμένος κύκλος. Επειδή  $C_2$  είναι ο μοναδικός γενικευμένος κύκλος που περιέχει τα σημεία  $p_2, q_2, r_2$ , συνεπάγεται ότι  $M(C_1) = C_2$ .  $\square$

**Σημειώσεις 8.2.10.** Έστω  $M$  ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα τρία σημεία  $z_1, z_2$  και  $z_3$  του  $\widehat{\mathbb{C}}$  στα σημεία  $0, 1$  και  $\infty$ , αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι  $C_1$  είναι ο γενικευμένος κύκλος που ορίζουν τα σημεία  $z_1, z_2$  και  $z_3$ .

1. Τα σημεία  $z_1, z_2, z_3$  και  $z_4$  ανήκουν σε έναν γενικευμένο κύκλο αν και μόνον αν  $M(z_4)$  είναι πραγματικός αριθμός.

Πράγματι, τα σημεία  $z_1, z_2, z_3$  και  $z_4$  ανήκουν σε έναν γενικευμένο κύκλο αν και μόνον αν  $z_4 \in C_1$ . Ισοδύναμα (επειδή η  $M$  είναι 1-1 και επί του  $Ox \cup \{\infty\}$ ):

$$M(z_4) \in M(C_1) \setminus \{M(z_3)\} = Ox \cup \{\infty\} \setminus \{\infty\} = Ox.$$

2. Ο γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία  $z_1, z_2$  και  $z_3$  του  $\widehat{\mathbb{C}}$  είναι ευκλείδειος κύκλος αν και μόνον αν  $M(\infty)$  δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Πράγματι, έστω ότι  $C_1$  είναι ο γενικευμένος κύκλος που ορίζουν τα σημεία  $z_1, z_2$  και  $z_3$ .

$$M(\infty) \in Ox = M(C_1) \setminus \{\infty\} \iff \infty \in C_1 \iff C_1 \text{ είναι εκτεταμένη ευθεία.}$$

### 8.3 Ασκήσεις

**8.3.1.** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius που έχουν μια από της μορφές

$$M(z) = \frac{mz + n}{\bar{n}z + \bar{m}} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{m\bar{z} + n}{\bar{n}\bar{z} + \bar{m}}, \quad m, n \in \mathbb{C}, \quad |m|^2 - |n|^2 = 1$$

με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

**8.3.2.** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius που έχουν μια από της μορφές

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad h(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

**8.3.3.** Για τους μετασχηματισμούς Möbius  $M(z) = \frac{2iz+3}{z+2}$  και  $N(z) = \frac{3z+1}{iz-2}$  να βρεθούν οι μετασχηματισμοί  $M \circ N$  και  $N^{-1}$ .

**8.3.4.** Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα σημεία  $z_1, z_2$  και  $z_3$  στα σημεία  $0, 1$  και  $\infty$  αντίστοιχα.

(α')  $z_1 = i, z_2 = 3, z_3 = 2i.$

(β')  $z_1 = \infty, z_2 = 3, z_3 = 2i.$

(γ')  $z_1 = i, z_2 = \infty, z_3 = 2i.$

**8.3.5.** Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα σημεία  $-1$ ,  $1$  και  $i$  στα σημεία  $-1$ ,  $0$  και  $-3$  αντίστοιχα.

**8.3.6.** Να παρασταθεί ο μετασχηματισμός  $t : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  με  $t(z) = 4z$  για  $z \in \mathbb{C}$  και  $t(\infty) = \infty$  ως σύνθεση αντιστροφών ως προς κύκλους με κέντρο το  $(0, 0)$ .

**8.3.7.** Δίνονται τα σημεία  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -i$ ,  $z_3 = i$ ,  $z_4 = 2 - i$  του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου  $\hat{\mathbb{C}}$ . Να προσδιοριστεί αν:

(α') τα σημεία  $z_1, z_2, z_3, z_4$  ανήκουν σε έναν γενικευμένο κύκλο,

(β') τα σημεία  $z_1, z_2, z_3$  ανήκουν σε έναν Ευκλείδειο κύκλο.

**8.3.8.** Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει την ευθεία  $x + 2y - 3 = 0$  στην ευθεία  $x + 2y = 0$ .

## Κεφάλαιο 9

### Υπερβολική Γεωμετρία.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε πέντε μοντέλα της υπερβολικής γεωμετρίας.

Για τον ορισμό της ομάδας μετασχηματισμών στα μοντέλα αυτά θα χρησιμοποιήσουμε τις ομάδες Αφινικών μετασχηματισμών, Ευκλείδειων μετασχηματισμών και μετασχηματισμούς Möbius, τις οποίες ήδη γνωρίζουμε από τα προηγούμενα Κεφάλαια.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το Θεώρημα που ακολουθεί. Διευκρινίζουμε ότι για κάθε απεικόνιση  $g : X \rightarrow X$  και  $Y \subseteq X$  συμβολίζεται με  $g|_Y$  ο περιορισμός της  $g$  στο  $Y$ . Δηλαδή,  $g|_Y : Y \rightarrow Y$  με  $g|_Y(y) = g(y)$ .

**Θεώρημα 9.0.1.** *Αν το ζεύγος  $(X, G_X)$  είναι γεωμετρία,  $Y \subseteq X$  και*

$$G_Y = \{g|_Y : g \in G_X \text{ και } g(Y) = Y\},$$

*τότε  $(Y, G_Y)$  είναι γεωμετρία.*

*Απόδειξη.* Το σύνολο  $G_Y$  αποτελείται από 1-1 και επί αυτοαπεικονίσεις του  $Y$ .

Πράγματι, έστω  $g|_Y \in G_Y$  με  $g \in G_X$ . Επειδή  $g \in G_X$  είναι 1-1 και  $g(Y) = Y$ , έπεται ότι  $g|_Y$  είναι 1-1 και επί του  $Y$ .

Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $f|_Y, g|_Y \in G_Y$  ισχύει  $f|_Y \circ g|_Y = (f \circ g)|_Y \in G_Y$ .

Για κάθε  $y \in Y$  βρίσκουμε:

$$(f|_Y \circ g|_Y)(y) = f|_Y(g|_Y(y)) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = (f \circ g)|_Y(y) \in Y.$$

Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $g|_Y \in G_Y$  ισχύει  $(g|_Y)^{-1} = g^{-1}|_Y \in G_Y$ .

Για κάθε  $y \in Y$  βρίσκουμε:

$$(g|_Y)^{-1}(y) = g^{-1}(y) = (g^{-1}|_Y)(y) \in Y.$$

□

## 9.1 Μοντέλο του άνω ημισφαιρίου.

Το επίπεδο στο μοντέλο του άνω ημισφαιρίου είναι η ημισφαίρα του  $\mathbb{R}^3$  χωρίς το σύνορο της. Ως μοντέλο του άνω ημισφαιρίου μπορούμε να θεωρήσουμε το θετικό ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας:

$$\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}.$$

Για το μοντέλο του άνω ημισφαιρίου  $\mathbb{S}_+^2$  η ομάδα μετασχηματισμών ορίζεται από την υποομάδα των Ευκλείδειων μετασχηματισμών  $h(\vec{v}) = A\vec{v}$ ,  $A \in O(3, \mathbb{R})$ , με  $h(\mathbb{S}_+^2) = \mathbb{S}_+^2$ . Δηλαδή,

$$G_{\mathbb{S}_+^2} = \{h|_{\mathbb{S}_+^2} : h \in E(3) \text{ και } h(\mathbb{S}_+^2) = \mathbb{S}_+^2\}.$$

Το ζεύγος  $(\mathbb{S}_+^2, G_{\mathbb{S}_+^2})$  είναι μοντέλο υπερβολικής γεωμετρίας του άνω ημισφαιρίου.

Υπερβολικές ευθείες στο μοντέλο αυτό είναι τα ανοικτά ημικύκλια που είναι οι τομές των επιπέδων που είναι κάθετα στο επίπεδο  $z = 0$  και έχουν απόσταση  $< 1$  από την αρχή  $(0, 0, 0)$  με την  $\mathbb{S}_+^2$ . Από τον ορισμό των υπερβολικών ευθειών προκύπτει ότι:

- Από δύο διαφορετικά σημεία  $A$  και  $B$  του υπερβολικού επιπέδου  $\mathbb{S}_+^2$  διέρχεται μοναδική υπερβολική ευθεία.
- Δύο διαφορετικές υπερβολικές ευθείες είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται σε ένα σημείο.
- Από κάθε σημείο  $P$  του  $\mathbb{S}_+^2$  που δεν ανήκει σε μια υπερβολική ευθεία  $\ell$  διέρχονται άπειρου πλήθους υπερβολικές ευθείες που δεν τέμνουν την  $\ell$ .

## 9.2 Μοντέλο του υπερβολοειδούς.

Όταν η υπερβολή  $z^2 - x^2 = 1$  του  $Oxz$  επιπέδου περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $Oz$ , παράγεται επιφάνεια  $\mathcal{Y}$  που καλείται δίχωνο υπερβολοειδές και έχει εξίσωση  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ .

Μοντέλο του υπερβολικού επιπέδου είναι το άνω φύλλο του δίχωνου υπερβολοειδούς  $\mathcal{Y}$ :

$$\mathcal{Y}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}.$$

Για το μοντέλο του υπερβολοειδούς  $\mathcal{Y}_+$  η ομάδα μετασχηματισμών ορίζεται από την υποομάδα των αφινικών μετασχηματισμών  $h(\vec{v}) = A\vec{v}$ ,  $A \in GL(3, \mathbb{R})$ , με  $h(\mathcal{Y}_+) = \mathcal{Y}_+$ . Δηλαδή,

$$G_{\mathcal{Y}_+} = \{h|_{\mathcal{Y}_+} : h \in A(3) \text{ και } h(\mathcal{Y}_+) = \mathcal{Y}_+\}.$$

Το ζεύγος  $(\mathcal{Y}_+, G_{\mathcal{Y}_+})$  είναι μοντέλο υπερβολικής γεωμετρίας του υπερβολοειδούς.

Υπερβολικές ευθείες στο μοντέλο αυτό είναι η καμπύλες που είναι οι τομές των επιπέδων που διέρχονται από την αρχή  $(0, 0, 0)$  των αξόνων με την  $\mathcal{Y}_+$ . Από τον ορισμό των υπερβολικών ευθειών προκύπτει ότι:

- Από δύο διαφορετικά σημεία  $A$  και  $B$  του υπερβολικού επιπέδου  $\mathcal{Y}$  διέρχεται μοναδική υπερβολική ευθεία.
- Δύο διαφορετικές υπερβολικές ευθείες είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται σε ένα σημείο.
- Από κάθε σημείο  $P$  του  $\mathcal{Y}_+$  που δεν ανήκει σε μια υπερβολική ευθεία  $\ell$  διέρχονται άπειρου πλήθους ευθείες που δεν τέμνουν την  $\ell$ .



### 9.3 Μοντέλο του δίσκου Beltrami-Klein.

Το **μοντέλο Beltrami-Klein** είναι μοντέλο της γεωμετρίας του Lobachevsky.

Το μοντέλο Beltrami-Klein καλείται επίσης **προβολικό μοντέλο** του υπερβολικού επιπέδου και μοντέλο **Cayley-Klein**.

Το επίπεδο στο **μοντέλο Beltrami-Klein** είναι ο δίσκος χωρίς το σύνορο του. Τα σημεία του εσωτερικού του δίσκου είναι τα σημεία του υπερβολικού επιπέδου. Το σύνορο του δίσκου καλείται **ορίζοντας** και τα σημεία του ορίζοντα καλούνται **σημεία στο απείρο** και δεν ανήκουν στο μοντέλο.

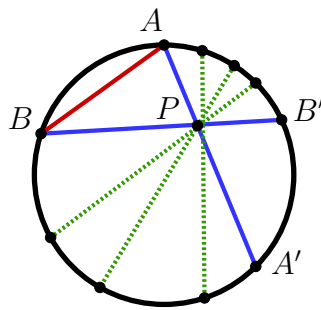
Ως μοντέλο του Beltrami-Klein μπορούμε να επιλέξουμε τον μοναδιαίο ανοιχτό δίσκο του επιπέδου  $z = 1$  του  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1.\}$$

Οι  $\mathcal{B}$ -ευθείες στο μοντέλο Beltrami-Klein είναι οι χορδές του δίσκου χωρίς τα άκρα τους. Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο σημεία του ορίζοντα, τότε συμβολίζουμε με  $(AB)$  την αντίστοιχη  $\mathcal{B}$ -ευθεία.

Δύο  $\mathcal{B}$ -ευθείες  $(AB)$  και  $(CD)$  καλούνται *παράλληλες* (αντίστοιχα, *υπερπαράλληλες*) αν οι αντίστοιχες χορδές  $AB$  και  $CD$  τέμνονται σε ένα από τα άκρα τους (αντίστοιχα δεν τέμνονται). Από τον ορισμό των  $\mathcal{B}$ -ευθειών προκύπτει ότι:

- Από δύο διαφορετικά σημεία του υπερβολικού επιπέδου διέρχεται μοναδική  $\mathcal{B}$ -ευθεία.
- Δύο διαφορετικές  $\mathcal{B}$ -ευθείες είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται σε ένα σημείο.
- Από ένα σημείο  $P$  έξω από μια  $\mathcal{B}$ -ευθεία  $(AB)$  μπορούμε να φέρουμε άπειρου πλήθους  $\mathcal{B}$ -ευθείες που δεν τέμνουν την  $(AB)$ , είναι άπειρου πλήθους υπερπαράλληλες στη  $(AB)$  που βρίσκονται μεταξύ των  $\mathcal{B}$ -ευθειών  $(AA')$  και  $(BB')$  που διέρχονται από το  $P$  και είναι παράλληλες στην  $(AB)$ .



Σχήμα 9.1: Παράλληλες και υπερπαράλληλες  $\mathcal{B}$ -ευθείες στην  $(AB)$ .

Το μοντέλο του δίσκου Beltrami-Klein καλείται **προβολικό** επειδή η ομάδα μετασχηματισμών του  $G_{\mathcal{B}}$ , που θα ορίσουμε παρακάτω είναι ισομορφική με μια υποομάδα της ομάδας  $P(2)$  των προβολικών μετασχηματισμών.

Έστω  $\mathcal{K} = \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ . Τα προβολικά σημεία του  $\mathcal{K}$  είναι οι γενέτειρες του κώνου  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  του  $\mathbb{R}^3$ .

Σε κάθε σημείο  $(x : y : z) \in \mathcal{K}$  αντιστοιχεί το μοναδικό σημείο τομής  $(x/z, y/z, 1)$  του κώνου  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  με το επίπεδο  $z = 1$ , το σημείο αυτό ανήκει στον κύκλο που είναι

το σύνορο του  $\mathcal{B}$ . Σε κάθε προβολικό σημείο  $(x : y : z)$  που αντιστοιχεί σε ευθεία  $(tx, ty, tz)$  εσωτερικά του κώνου  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  αντιστοιχεί το μοναδικό σημείο τομής  $(x/z, y/z, 1)$  της ευθείας  $(tx, ty, tz)$  με το επίπεδο  $z = 1$ , το σημείο αυτό ανήκει στο μοντέλο  $\mathcal{B}$ .

Εστω  $G_{\mathcal{K}} = \{T \in P(2) : T(\mathcal{K}) = \mathcal{K}\}$ . Αποδεικνύεται ότι αν  $T \in G_{\mathcal{K}}$ , τότε  $T$  απεικονίζει κάθε προβολικό σημείο που αντιστοιχεί σε ευθεία  $(tx, ty, tz)$  που βρίσκεται εσωτερικά του κώνου  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  σε προβολικό σημείο που αντιστοιχεί σε ευθεία που βρίσκεται εσωτερικά του κώνου. Σε κάθε  $T \in G_{\mathcal{K}}$  αντιστοιχούμε μια 1-1 και επί απεικόνιση  $T_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  που ορίζεται ως εξής: αν  $P = (x, y, 1) \in \mathcal{B}$  και  $T(x : y : 1) = (x' : y' : 1)$ , τότε  $T_{\mathcal{B}}(P) = (x', y', 1)$ .

Ορίζουμε  $G_{\mathcal{B}} = \{T_{\mathcal{B}} : T \in G_{\mathcal{K}}\}$ . Τότε  $G_{\mathcal{B}}$  αποτελείται από μετασχηματισμούς  $T_{\mathcal{B}}$ , που απεικονίζουν  $\mathcal{B}$ -ευθείες σε  $\mathcal{B}$ -ευθείες, επειδή οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί  $T \in G_{\mathcal{K}}$  απεικονίζουν τα επίπεδα που περιέχουν την αρχή και τέμνουν το εσωτερικό του κώνου σε επίπεδα που περιέχουν την αρχή και τέμνουν το εσωτερικό του κώνου και το καθένα από τα επίπεδα αυτά τέμνει τον δίσκο που επιλέξαμε ως μοντέλο του δίσκου του Beltrami-Klein κατά  $\mathcal{B}$ -ευθεία.

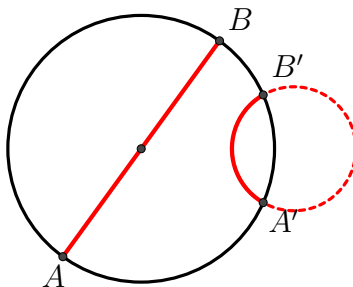
Το ζεύγος  $(\mathcal{B}, G_{\mathcal{B}})$  είναι το μοντέλο του δίσκου του Beltrami-Klein της υπερβολικής γεωμετρίας.

## 9.4 Μοντέλο του δίσκου του Poincaré.

Το επίπεδο στο **μοντέλο του δίσκου του Poincaré** είναι ένας δίσκος χωρίς το σύνορο του. Το σύνορο του δίσκου καλείται **ορίζοντας** και τα σημεία του ορίζοντα καλούνται **σημεία στο απείρο** και δεν ανήκουν στο μοντέλο. Ως μοντέλο του Poincaré μπορούμε να επιλέξουμε τον μοναδιαίο ανοικτό δίσκο του μιγαδικού επιπέδου

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Στο μοντέλο του δίσκου του Poincaré ως  $\Delta$ -ευθείες ορίζονται οι τομές των γενικευμένων κύκλων του  $\widehat{C}$  που είναι κάθετοι στο  $Bd(\Delta)$  με το  $\Delta$ . Δηλαδή, οι διάμετροι του  $\Delta$  και τόξα που είναι τομές των κύκλων κάθετων στο κύκλο  $|z| = 1$  με  $\Delta$ .

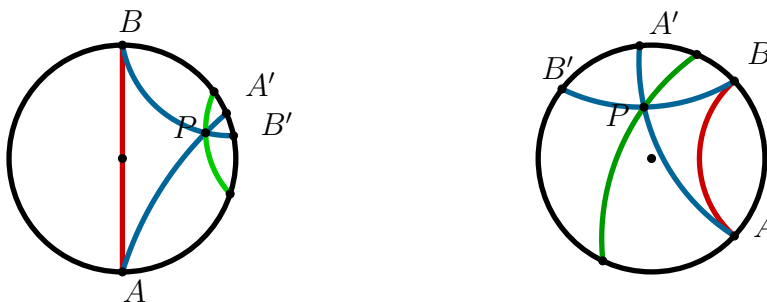


Σχήμα 9.2:  $\Delta$ -ευθείες  $(AB)$  και  $(A'B')$ .

Δύο  $\Delta$ -ευθείες καλούνται παράλληλες (αντίστοιχα, υπερπαράλληλες) όταν οι προεκτάσεις τους, κύκλοι ή ευθείες κάθετες στο σύνορο  $Bd(\Delta)$ , τέμνονται στο σημείο του ορίζοντα (αντίστοιχα δεν τέμνονται).

Από των ορισμό των  $\Delta$ -ευθειών προκύπτει ότι:

- Από δύο διαφορετικά σημεία του υπερβολικού επιπέδου διέρχεται μοναδική  $\Delta$ -ευθεία.  
(Έστω  $P, Q \in \Delta$ . Αν  $P$  και  $Q$  δεν ανήκουν σε διάμετρο, τότε από το Θεώρημα 7.4.4 περιέχονται σε μοναδικό κύκλο κάθετος στο  $Bd(\Delta)$ . Αν  $P$  και  $Q$  ανήκουν σε διάμετρο  $d$ , τότε  $d$  είναι ο μοναδικός γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  και είναι κάθετος στο  $Bd(\Delta)$ .)
- Δύο διαφορετικές  $\Delta$ -ευθείες είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται σε ένα σημείο.  
(Διότι δύο σημεία ορίζουν μοναδική  $\Delta$ -ευθεία).
- Από ένα σημείο  $P \in \Delta$  έξω από μια  $\Delta$ -ευθεία  $(AB)$  μπορούμε να φέρουμε άπειρου πλήθους  $\Delta$ -ευθείες που δεν τέμνουν την  $(AB)$   
(Είναι άπειρου πλήθους υπερπαράλληλες στην  $(AB)$  που βρίσκονται μεταξύ των  $\Delta$ -ευθειών  $(AA')$  και  $(BB')$  που διέρχονται από το  $P$  και είναι παράλληλες στην  $(AB)$ .)



Σχήμα 9.3: Παράλληλες και υπερπαλλήλες  $\Delta$ -ευθείες της  $(AB)$ .

### Ομάδα μετασχηματισμών στο μοντέλο του δίσκου του Poincaré.

Αν  $t$  είναι αντιστροφή του  $\widehat{\mathbb{C}}$  ως προς έναν γενικευμένο κύκλο κάθετο στο  $Bd(\Delta)$ , τότε  $t(\Delta) = \Delta$ . Έρα, η σύνθεση πεπερασμένου πλήθους αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στο  $Bd(\Delta)$  απεικονίζει το  $\Delta$  επί το  $\Delta$ .

Έστω ότι  $G_\Delta$  είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένου πλήθους συνθέσεων των περιορισμών στο  $\Delta$  των αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στο  $Bd(\Delta)$ . Δηλαδή  $h : \Delta \rightarrow \Delta$  είναι στοιχείο του  $G_\Delta$  αν και μόνον αν  $h = t_1|_\Delta \circ \cdots \circ t_n|_\Delta$ , όπου κάθε  $t_i$  είναι αντιστροφή ως προς τον γενικευμένο κύκλο κάθετο στο  $Bd(\Delta)$ . Αποδεικνύεται εύκολα ότι

- Αν  $h \in G_\Delta$ , τότε  $h(\Delta) = \Delta$  και  $h$  είναι 1-1.
- $G_\Delta$  με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.
- Κάθε  $h \in G_\Delta$  απεικονίζει  $\Delta$ -ευθεία σε  $\Delta$ -ευθεία και διατηρεί τις γωνίες.

Το ζεύγος  $(\Delta, G_\Delta)$  είναι το μοντέλο του δίσκου του Poincaré της υπερβολικής γεωμετρίας.

**Θεώρημα 9.4.1.** Έστω  $\tilde{G}_\Delta$  είναι το σύνολο των περιορισμών στο  $\Delta$  των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius που έχουν μια από τις μορφές

$$M(z) = \frac{mz + n}{\bar{n}z + \bar{m}} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{m\bar{z} + n}{\bar{n}\bar{z} + \bar{m}}, \quad m, n \in \mathbb{C} \text{ και } |m|^2 - |n|^2 = 1, \quad z \in \Delta. \quad (9.1)$$

Το ζεύγος  $(\Delta, \tilde{G}_\Delta)$  είναι γεωμετρία

Απόδειξη. Το σύνολο το σύνολο όλων των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius που έχουν μια από τις μορφές (9.1) με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα (σχηματισμός 8.3(1)).

Να προσδιοριστεί αν τα σημεία  $0, -4, -1 - 3i, -2i$  ανήκουν σε έναν γενικευμένο κύκλο.

Αρκεί να δείξουμε ότι  $M(\Delta) = \Delta$  για κάθε μετασχηματισμό Möbius  $M$  που έχει μια από τις μορφές (9.1).

Έστω ότι  $M(z) = \frac{mz+n}{\bar{n}z+\bar{m}}$ . Τότε

$$\begin{aligned} M(z) \in \Delta &\iff \left| \frac{mz+n}{\bar{n}z+\bar{m}} \right| < 1 \iff \left| \frac{mz+n}{\bar{n}z+\bar{m}} \right|^2 < 1 \iff \left( \frac{mz+n}{\bar{n}z+\bar{m}} \right) \left( \frac{\overline{mz+n}}{\overline{\bar{n}z+\bar{m}}} \right) < 1 \iff \\ &(mz+n)(\bar{m}\bar{z}+\bar{n}) < (\bar{n}z+\bar{m})(n\bar{z}+m) \iff |z|^2(|m|^2 - |n|^2) < |m|^2 - |n|^2 \iff \\ &|z| < 1 \iff z \in \Delta. \end{aligned}$$

Έστω  $M(z) = \frac{m\bar{z}+n}{\bar{n}\bar{z}+\bar{m}}$ . Τότε  $M = M_1 \circ \sigma$ , όπου  $M_1(z) = \frac{mz+n}{\bar{n}z+\bar{m}}$  και  $\sigma(z) = \bar{z}$  απεικονίζουν το  $\Delta$  επί του  $\Delta$ . Συνεπώς,  $M(\Delta) = \Delta$ . □

**Θεώρημα 9.4.2.** Κάθε  $g \in G_\Delta$  είναι ο περιορισμός στο  $\Delta$  ενός γενικευμένου μετασχηματισμού Möbius που έχει μια από τις μορφές:

$$M(z) = \frac{mz + n}{\bar{n}z + \bar{m}} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{m\bar{z} + n}{\bar{n}\bar{z} + \bar{m}}, \quad m, n \in \mathbb{C} \text{ και } |m|^2 - |n|^2 = 1, \quad z \in \Delta. \quad (9.2)$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι κάθε αντιστροφή ως προς γενικευμένο κύκλο κάθετο στο  $Bd(\Delta)$  έχει την μορφή (9.2).

Έστω ότι ο κύκλος  $C(K, r)$  είναι κάθετος στο  $Bd(\Delta)$  και  $\{P, Q\} = Bd(\Delta) \cap C(K, r)$ . Επειδή οι κύκλοι  $Bd(\Delta)$  και  $C(K, r)$  είναι κάθετοι,  $KP \perp OP$ . Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα  $KP^2 + OP^2 = OK^2$ . Άρα,  $r^2 + 1 = |c|^2 = c\bar{c}$ . Επομένως  $r^2 - c\bar{c} = -1$

Η αντιστροφή  $M$  του  $\mathbb{C} \setminus \{c\}$  ως προς τον  $C(c, r)$  δίνεται από τον τύπο

$$M(z) = \frac{r^2}{z-c} + c = \frac{r^2 + c\bar{z} - c\bar{c}}{\bar{z} - \bar{c}} = \frac{c\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{c}} = \frac{\frac{c}{r}\bar{z} + \frac{-i}{r}}{\left(\frac{i}{r}\right)\bar{z} + \left(\frac{-c\bar{c}}{r}\right)}.$$

Άρα,  $M$  έχει την μορφή (9.2).

Έστω ότι η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $y = x \tan \theta$  είναι κάθετη στο  $Bd(\Delta)$ . Η ανάκλαση  $\tilde{M}$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$  είναι σύνθεση περιστροφής  $t_1$  κατά γωνία  $-\theta$ , της ανάκλασης  $t_2$  ως προς τον  $x$ -άξονα και της περιστροφής  $t_1^{-1}$  κατά γωνία  $\theta$ . Για  $a = \cos \theta + i \sin \theta$ , παίρνουμε:

$$\tilde{M}(z) = (t_1^{-1} \circ t_2 \circ t_1)(z) = a(\bar{a}z) = a^2\bar{z} = \frac{a^2\bar{z}}{a\bar{a}} = \frac{a\bar{z}}{a} = \frac{a\bar{z} + 0}{0\bar{z} + a}.$$

Άρα,  $\tilde{M}$  έχει την μορφή (9.2).

Έστω  $g \in G_\Delta$ . Τότε  $g = g_1 \circ \dots \circ g_n$ , όπου  $g_i = M_i|_\Delta$  για κάποια αντιστροφή  $M_i$  ως προς γενικευμένο κύκλο κάθετο στο  $Bd(\Delta)$ . Άρα,  $M_i \in \tilde{G}_\Delta$ . Επειδή το σύνολο  $\tilde{G}_\Delta$  με την πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα και  $M(\Delta) = \Delta$  για κάθε  $M \in \tilde{G}_\Delta$ , συνεπάγεται ότι  $M = M_1 \circ \dots \circ M_n \in \tilde{G}_\Delta$ . Συνεπώς  $g = M_1|_\Delta \circ \dots \circ M_n|_\Delta = M|_\Delta$ . □

Αποδεικνύεται επίσης το παρακάτω Θεώρημα. (βλέπε [1])

**Θεώρημα 9.4.3.** Κάθε γενικευμένος μετασχηματισμός Möbius που έχει μια από τις μορφές

$$M(z) = \frac{mz + n}{\bar{n}z + \bar{m}} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{m\bar{z} + n}{\bar{n}\bar{z} + \bar{m}}, \quad m, n \in \mathbb{C} \text{ και } |m|^2 - |n|^2 = 1,$$

είναι σύνθεση το πολύ τριών αντιστροφών ως προς γενικευμένους κύκλους κάθετους στο  $Bd(\Delta)$ .

**Πόρισμα 9.4.4.** Η ομάδα  $G_\Delta$  αποτελείται από περιορισμούς στο  $\Delta$  όλων των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius του  $\hat{\mathbb{C}}$  που έχουν μια από τις μορφές

$$M(z) = \frac{mz + n}{\bar{n}z + \bar{m}} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{m\bar{z} + n}{\bar{n}\bar{z} + \bar{m}}, \quad m, n \in \mathbb{C}, \quad |m|^2 - |n|^2 = 1.$$

**Σημείωση 9.4.5.** Η συνθήκη  $|m|^2 - |n|^2 = 1$  στις σχέσεις (9.1) μπορεί να αντικατασταθεί με  $|m|^2 - |n|^2 > 0$ . Πράγματι, για  $\lambda = 1/\sqrt{|m|^2 - |n|^2}$  παίρνουμε  $M(z) = \frac{\lambda mz + \lambda n}{\lambda \bar{n}z + \lambda \bar{m}} = \frac{\lambda mz + \lambda n}{\lambda \bar{n}z + \lambda \bar{m}}$ , όπου

$$\lambda m \cdot \overline{\lambda m} - \lambda n \overline{\lambda n} = \lambda^2(m\bar{m} - n\bar{n}) = \lambda^2(|m|^2 - |n|^2) = 1.$$

## 9.5 Μοντέλο του ημιεπιπέδου του Poincaré.

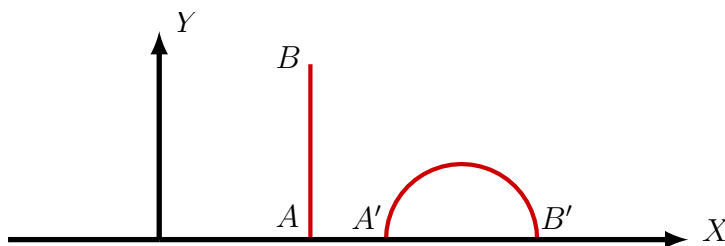
Το επίπεδο στο μοντέλο του ημιεπιπέδου του Poincaré ένα ανοικτό ημιεπίπεδο. Το σύνορο του ημιεπιπέδου καλείται **ορίζοντας** και τα σημεία του ορίζοντα καλούνται **σημεία στο απείρο** και δεν ανήκουν στο μοντέλο.

Ως μοντέλο του ημιεπιπέδου μπορούμε να επιλέξουμε το άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου:

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

με ορίζοντα  $\text{Im}(z) = 0$ .

Στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου του Poincaré ως  $\mathcal{H}$ -ευθείες ορίζονται οι τομές με το  $\mathcal{H}$  των γενικευμένων κύκλων του  $\hat{\mathbb{C}}$  κάθετων στον ορίζοντα. Δηλαδή,  $\mathcal{H}$ -ευθείες είναι οι τομές του  $\mathcal{H}$  με γενικευμένους κύκλους του  $\hat{\mathbb{C}}$  κάθετους στον  $Ox$ -άξονα.

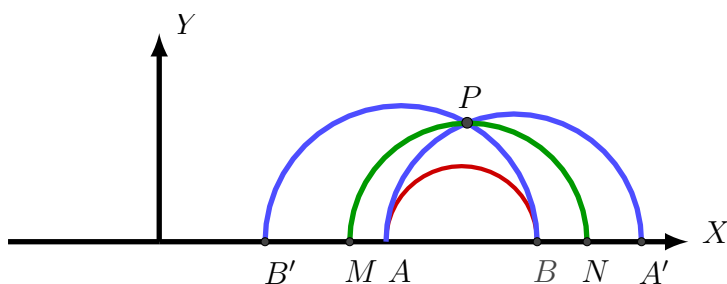


Σχήμα 9.4:  $\mathcal{H}$ -ευθείες  $(AB)$  και  $(A'B')$ .

Δύο  $\mathcal{H}$ -ευθείες καλούνται παράλληλες (αντίστοιχα, υπερπαράλληλες) αν οι προεκτάσεις τους – κύκλοι ή ευθείες κάθετες στον  $Ox$ -άξονα – τέμνονται στο σημείο του  $Ox$ -άξονα ή στο  $\{\infty\}$  (αντίστοιχα δεν τέμνονται).

Από των ορισμό των  $\mathcal{H}$ -ευθειών προκύπτει ότι:

- Από δύο διαφορετικά σημεία του υπερβολικού επιπέδου διέρχεται μοναδική  $\mathcal{H}$ -ευθεία.  
(Έστω  $P, Q \in \mathcal{H}$ . Αν  $(PQ)$  είναι κάθετη στον ορίζοντα, τότε  $(PQ) \cap \mathcal{H}$  είναι η  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$ . Διαφορετικά η  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  είναι η τομή του  $\mathcal{H}$  με τον κύκλο που έχει ως κέντρο την τομή του ορίζοντα με την μεσοκάθετο του  $PQ$ .)
- Δύο διαφορετικές  $\mathcal{H}$ -ευθείες είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται σε ένα σημείο.
- Από ένα σημείο  $P$  έξω από μια  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $(AB)$  μπορούμε να φέρουμε άπειρου πλήθους  $\mathcal{H}$ -ευθείες που δεν τέμνουν την  $(AB)$ .  
(Είναι οι άπειρου πλήθους  $\mathcal{H}$ -ευθείες που βρίσκονται μεταξύ δύο  $\mathcal{H}$ -ευθειών  $(AA')$  και  $(BB')$ , οι οποίες διέρχονται από το  $P$  και είναι παράλληλες στην  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $(AB)$ .)



Σχήμα 9.5: Παράλληλες  $(AA')$ ,  $(BB')$  και υπερπαράλληλη  $(MN)$  της  $(AB)$ .

### Ομάδα μετασχηματισμών στο μοντέλο του ημιεπιπέδου του Poincaré.

Αν  $t$  είναι αντιστροφή του  $\widehat{\mathbb{C}}$  ως προς έναν γενικευμένο κύκλο κάθετο στο άξονα  $Im(z) = 0$ , τότε  $t(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ . Έρα, η σύνθεση πεπερασμένου πλήθους αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στον  $Im(z) = 0$  απεικονίζει το  $\mathcal{H}$  επί το  $\mathcal{H}$ .

Έστω ότι  $G_{\mathcal{H}}$  είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένου πλήθους συνθέσεων των περιορισμών στο  $\mathcal{H}$  των αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στον  $Im(z) = 0$ . Δηλαδή  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  είναι στοιχείο του  $G_{\mathcal{H}}$  αν και μόνον αν  $h = t_1|_{\mathcal{H}} \circ \dots \circ t_n|_{\mathcal{H}}$ , όπου κάθε  $t_i$  είναι αντιστροφή ως προς τον γενικευμένο κύκλο κάθετο στον  $Im(z) = 0$ .

Έστω  $G_{\mathcal{H}}$  το σύνολο όλων των συνθέσεων των περιορισμών στο  $\mathcal{H}$  των αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους που είναι προεκτασεις των  $\mathcal{H}$ -ευθειών.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

- Αν  $h \in G_{\mathcal{H}}$ , τότε  $h(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  και  $h$  είναι 1-1.
- $G_{\mathcal{H}}$  με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.
- Κάθε  $h \in G_{\mathcal{H}}$  απεικονίζει  $\mathcal{H}$ -ευθεία σε  $\mathcal{H}$ -ευθεία και διατηρεί τις γωνίες.

Το ζεύγος  $(\mathcal{H}, G_{\mathcal{H}})$  είναι το μοντέλο του ημιεπιπέδου του Poincaré της υπερβολικής γεωμετρίας.

**Θεώρημα 9.5.1.** Έστω  $\tilde{G}_{\mathcal{H}}$  είναι το σύνολο των περιορισμών στο  $\mathcal{H}$  των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius που έχουν μια από τις μορφές

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1. \quad (9.3)$$

Το ζεύγος  $(\mathcal{H}, \tilde{G}_{\mathcal{H}})$  είναι γεωμετρία

Απόδειξη. Το σύνολο όλων των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius που έχουν μια από τις μορφές (9.3) με πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα (σχηματισμός 8.3(1)).

Αρκεί να δείξουμε ότι  $M(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  για κάθε μετασχηματισμό Möbius  $M$  που έχει μια από τις μορφές (9.3).

Έστω  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Τότε, επειδή  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , παίρνουμε

$$\operatorname{Im}(M(z)) = \frac{1}{2i} \left( \frac{az+b}{cz+d} - \overline{\frac{az+b}{cz+d}} \right) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)}{2i|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}.$$

Επειδή  $ad - bc = 1$ , έπεται ότι  $\operatorname{Im}(M(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ . Συνεπώς  $M(z) \in \mathcal{H}$  αν και μόνον αν  $z \in \mathcal{H}$ . Αν  $M(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ , τότε  $M = M_1 \circ \varphi$ , όπου  $M_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  και  $\varphi(z) = -\bar{z}$  απεικονίζουν το  $\mathcal{H}$  επί του  $\mathcal{H}$ . Άρα,  $M(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ . □

**Θεώρημα 9.5.2.** Κάθε  $h \in G_{\mathcal{H}}$  είναι ο περιορισμός στο  $\mathcal{H}$  ενός γενικευμένου μετασχηματισμού Möbius που έχει μια από τις μορφές:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1. \quad (9.4)$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι κάθε αντιστροφή ως προς γενικευμένο κύκλο που είναι προέκταση μιας  $\mathcal{H}$ -ευθείας έχει την μορφή (9.4).

Έστω ότι ο κύκλος  $C(c, r)$  είναι κάθετος στον  $Ox$ -άξονα με  $c \in Ox$ . Επειδή  $c \in \mathbb{R}$  η αντιστροφή  $M$  του  $\mathbb{C} \setminus \{c\}$  ως προς τον  $C(c, r)$  δίνεται από τον τύπο

$$M(z) = \frac{r^2}{z-c} + c = \frac{c\bar{z} + r^2 - c^2}{\bar{z} - c} = \frac{\frac{c}{r}(-\bar{z}) + \frac{c^2 - r^2}{r}}{\frac{1}{r}(-\bar{z}) + \frac{c}{r}}.$$

Άρα,  $M$  έχει την μορφή (9.4).

Έστω ότι η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $x = a$  είναι κάθετη στο  $Ox$ . Η αντιστροφή  $\tilde{M}$  του  $\mathbb{C}$  ως προς την  $\varepsilon$  δίνεται από τον τύπο

$$\tilde{M}(z) = -\bar{z} + 2a = \frac{1(-\bar{z}) + 2a}{0(-\bar{z}) + 1}.$$

Άρα,  $\tilde{M}$  έχει μια από τις μορφές (9.4).

Έστω  $h \in G_{\mathcal{H}}$ . Τότε  $h = h_1 \circ \dots \circ h_n$ , όπου κάθε  $h_i$  είναι ο περιορισμός στο  $\mathcal{H}$  κάποιας αντιστροφής  $M_i$  ως προς γενικευμένο κύκλο που είναι προέκταση μιας  $\mathcal{H}$ -ευθείας. Άρα, όπως αποδείξαμε,  $M_i \in \tilde{G}_{\mathcal{H}}$ . Επειδή το σύνολο  $\tilde{G}_{\mathcal{H}}$  με την πράξη σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα και  $M(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  για κάθε  $M \in \tilde{G}_{\mathcal{H}}$ , συνεπάγεται ότι  $M = M_1 \circ \dots \circ M_n \in \tilde{G}_{\mathcal{H}}$ .

Συνεπώς  $h = M_1|_{\mathcal{H}} \circ \dots \circ M_n|_{\mathcal{H}} = M|_{\mathcal{H}}$ . □

**Θεώρημα 9.5.3.** Κάθε γενικευμένος μετασχηματισμός Möbius που έχει μια από τις μορφές

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad h(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στον  $Ox$ -άξονα.

Απόδειξη. Αν  $c \neq 0$ , τότε επειδή  $ad - bc = 1$  και  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  παίρνουμε

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - (ad/c)}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{c^2}}{-z - \frac{d}{c}}.$$

Επομένως  $M$  μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση απεικονίσεων καθεμιά από τις οποίες είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στον  $Ox$ -άξονα ως εξής:

$$z \xrightarrow[\|Ox\|]{\text{μεταφορα}} z + \frac{d}{c} \xrightarrow[\text{ως προς } Oy]{\text{αντιστροφή}} -\bar{z} - \frac{\bar{d}}{c} \xrightarrow[\text{ως προς } |z|=1]{\text{αντιστροφή}} \frac{1}{-\bar{z} - \frac{\bar{d}}{c}} \xrightarrow[\text{ομοιοθεσία}]{\text{ομοιοθεσία}} \frac{1}{-z - \frac{d}{c}} \xrightarrow[\|Ox\|]{\text{μεταφορα}} \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{c^2}}{-z - \frac{d}{c}}.$$

Αν  $M(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ , τότε  $M = M_1 \circ \sigma$ , όπου  $M_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς γενικευμένους κύκλους κάθετους στον  $Ox$ -άξονα και  $\sigma(z) = -\bar{z}$  είναι η αντιστροφή ως προς τον  $Oy$ -άξονα. Ήρα,  $M$  είναι σύνθεση αντιστροφών ως προς τους γενικευμένους κύκλους κάθετους στον  $Ox$ -άξονα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι όμοια όταν  $c = 0$ . □

**Πόρισμα 9.5.4.** Η ομάδα  $G_{\mathcal{H}}$  συμπίπτει με την ομάδα των περιορισμών στο  $\mathcal{H}$  όλων γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius του  $\widehat{\mathbb{C}}$  που έχουν μια από τις μορφές

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

**Σημείωση 9.5.5.** Η συνθήκη  $ad - bc = 1$  στις σχέσεις (9.3) μπορεί να αντικατασταθεί με  $ad - bc > 0$ . Πράγματι, για  $\lambda = 1/\sqrt{ad - bc}$  παίρνουμε  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$ , όπου  $\lambda a \cdot \lambda d - \lambda c \cdot \lambda b = \lambda^2(ab - cd) = 1$ .

**Θεώρημα 9.5.5.** Για οποιεσδήποτε  $\mathcal{H}$ -ευθείες  $\ell_1$  και  $\ell_2$  υπάρχει  $h \in G_{\mathcal{H}}$  για τον οποίον  $h(\ell_1) = \ell_2$ .

Απόδειξη. Έστω  $\ell = Oy \cap \mathcal{H}$ . Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $d$  υπάρχει  $h \in G_{\mathcal{H}}$  για τον οποίον  $h(d) = \ell$ . Οπότε για οποιεσδήποτε  $\mathcal{H}$ -ευθείες  $\ell_1$  και  $\ell_2$  υπάρχουν  $h_1, h_2 \in G_{\mathcal{H}}$ , τέτοια ώστε  $h_1(\ell_1) = \ell$  και  $h_2(\ell_2) = \ell$ . Ήρα, για  $h = h_2^{-1} \circ h_1$  θα ισχύει  $h(\ell_1) = \ell_2$ .

Αν  $d = \{a + yi : y > 0\}$ , τότε η μεταφορά  $h(z) = \frac{z - a}{0 \cdot z + 1}$  απεικονίζει την  $d$  επί της  $\ell$ .

Επειδή ο συσχετισμένος πίνακας του  $h$  είναι ο  $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  με ορίζουσα 1 και στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ , έπεται ότι  $h|_{\mathcal{H}} \in G_{\mathcal{H}}$ .

Έστω ότι  $d = C(K, r) \cap \mathcal{H}$  με  $K \in Ox$ . Για τον μετασχηματισμό Möbius  $h(z) = \frac{z - (K+r)}{z - (K-r)}$  έχουμε  $h(K+r) = 0$ ,  $h(K+ri) = i$  και  $h(K-r) = \infty$ . Ήρα,  $h$  απεικονίζει τον  $C(K, r)$  σε μοναδικό γενικευμένο κύκλο που περιέχει τα σημεία  $0, i, \infty$ , δηλαδή



στον  $Oy \cup \{\infty\}$ . Επειδή ο συσχετισμένος πίνακας  $\begin{pmatrix} 1 & -K-r \\ 1 & -K+r \end{pmatrix}$  του  $h$  είναι ισοδύναμος με τον πίνακα  $\frac{1}{\sqrt{2r}} \begin{pmatrix} 1 & -K-r \\ 1 & -K+r \end{pmatrix}$  με ορίζουσα 1 και στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ , έπεται ότι  $h|_{\mathcal{H}} \in G_{\mathcal{H}}$ . Έρα,  $h|_{\mathcal{H}}(d) = \ell$ .  $\square$

## 9.6 Απεικονίσεις μεταξύ των μοντέλων του υπερβολικού επιπέδου.

**Πρόταση 9.6.1.** Η απεικόνιση  $Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$Q(z) = \frac{z-i}{-iz+1} \text{ (μετασχηματισμός Cayley)}$$

απεικονίζει το σύνολο  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  επί του συνόλου  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  (δηλαδή  $Q(\mathcal{H}) = \Delta$ ).

*Απόδειξη.*  $Q(z) \in \Delta \iff \frac{|z-i|}{|-iz+1|} < 1 \iff |z-i| < |-iz+1| \iff$   
 $|z-i|^2 < |-iz+1|^2 \iff (z-i)(\bar{z}+i) < (1-iz)(1+i\bar{z}) \iff$   
 $2zi - 2\bar{z}i < 0 \iff 2i(z - \bar{z}) < 0 \iff 2i(2i\text{Im}(z)) < 0 \iff \text{Im}(z) > 0 \iff z \in \mathcal{H}. \quad \square$

**Θεώρημα 9.6.2.** Οι γεωμετρίες  $(\mathcal{H}, G_{\mathcal{H}})$  και  $(\Delta, G_{\Delta})$  είναι ισομορφικές, δηλαδή υπάρχουν μια 1-1 και επί απεικόνιση  $Q : \mathcal{H} \rightarrow \Delta$  και ένας ισομορφισμός  $i : G_{\mathcal{H}} \rightarrow G_{\Delta}$  για τα οποία

$$Q(h(x)) = i(h)(Q(x)), \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad \forall h \in G_{\mathcal{H}}.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την 1-1 και επί απεικόνιση  $Q : \mathcal{H} \rightarrow \Delta$  με  $Q(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$ .

Θεωρούμε την απεικόνιση  $t : G_{\mathcal{H}} \rightarrow G_{\Delta}$  με  $t(h) = Q \circ h \circ Q^{-1}$ .

Προφανώς  $t$  είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι  $t(G_{\mathcal{H}}) = G_{\Delta}$ .

Έστω ότι ο συσχετισμένος πίνακας του  $h \in G_{\mathcal{H}}$  είναι ο  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  με  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  και  $ad - bc = 1$ . Ο συσχετισμένος πίνακας του  $Q$  είναι ο  $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$  και ο συσχετισμένος πίνακας του  $Q^{-1}$  είναι ο  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ .

Έρα, ο συσχετισμένος πίνακας του  $t(h) = Q \circ h \circ Q^{-1}$  είναι ο

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+d) + (b-c)i & (c+b) + (a-d)i \\ (c+b) - (a-d)i & (a+d) - (b-c)i \end{pmatrix} = B,$$

όπου  $\det(B) = 1/2[(a+d)^2 + (c-b)^2 - (c+b)^2 - (d-a)^2] = 2(ad - bc) = 2 > 0$ .

Επομένως  $t(h)$  έχει συσχετισμένο πίνακα της μορφής  $\begin{pmatrix} m & n \\ \bar{n} & \bar{m} \end{pmatrix}$  με  $|m|^2 - |n|^2 = 1$ .

Έρα,  $t(h) \in G_{\Delta}$ .

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν  $g \in G_\Delta$ , τότε  $h = Q^{-1} \circ g \circ Q \in G_{\mathcal{H}}$ . Ήρα,  $g = t(h)$ .  
Για την 1-1 και επί απεικόνιση  $t : G_{\mathcal{H}} \rightarrow G_\Delta$  με  $t(h) = Q \circ h \circ Q^{-1}$  έχουμε

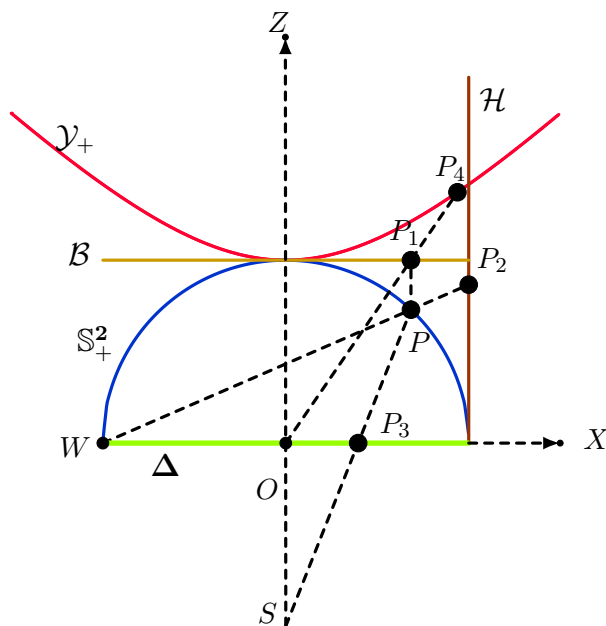
$$t(h)(Q(x)) = Q(h(Q^{-1}(Q(x)))) = Q(h(x)), \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Συνεπώς, οι γεωμετρίες  $(\mathcal{H}, G_{\mathcal{H}})$  και  $(\Delta, G_\Delta)$  είναι ισομορφικές. □

Ορίσαμε πέντε μοντέλα υπερβολικού επιπέδου:

- $\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$  – μοντέλο του άνω ημισφαιρίου
- $\mathcal{Y}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$  – μοντέλο του υπερβολοειδούς
- $\mathcal{B} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$  – μοντέλο Beltrami-Klein
- $\Delta = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$  – μοντέλο του δίσκου του Poincaré
- $\mathcal{H} = \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$  – μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου του Poincaré

Στο επίπεδο  $0xz$  η σχετική τους θέση και οι απεικονίσεις μεταξύ τους απεικονίζονται στο σχήμα 9.6.



Σχήμα 9.6: Απεικονίσεις μεταξύ των μοντέλων του υπερβολικού επιπέδου.

Θα ορίσουμε αναλυτικά τις 1-1 και επί απεικονίσεις μεταξύ των μοντέλων.

$f^{\mathcal{B}} : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \mathcal{B}$ .  $f^{\mathcal{B}}$  είναι η ορθογώνια προβολή του άνω ημισφαιρίου  $\mathbb{S}_+^2$  στο επίπεδο  $z = 1$ .

$$\mathbb{S}_+^2 \ni P = (x, y, z) \xrightarrow{f^{\mathcal{B}}} (x, y, 1) = P_1 \in \mathcal{B}.$$

$f^{\mathcal{H}} : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \mathcal{H}$ . Σε κάθε σημείο  $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}_+^2$  αντιστοιχούμε το μοναδικό σημείο τομής  $P_2 = (1, y_2, z_2)$  της ευθείας  $(WP)$ , όπου  $W = (-1, 0, 0)$  με το ανοικτό ημιεπίπεδο  $\mathcal{H} = \{(1, y, z) : z > 0\}$ .

Επειδή  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  και  $z > 0$ , ισχύει  $|x| < 1$ .

$$W, P, P_2 \in (WP) \implies \overrightarrow{WP} = t\overrightarrow{WP_2} \implies (x+1, y, z) = t(2, y_2, z_2).$$

Άρα,  $t = \frac{x+1}{2}$ ,  $y_3 = \frac{y}{x+1}$ ,  $z_3 = \frac{z}{x+1}$ . Συνεπώς

$$\mathbb{S}_+^2 \ni P = (x, y, z) \xrightarrow{f^{\mathcal{H}}} \left(1, \frac{2y}{x+1}, \frac{2z}{x+1}\right) = P_2 \in \mathcal{H}.$$

$f^{\Delta} : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \Delta$ . Σε κάθε σημείο  $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}_+^2$  αντιστοιχούμε το μοναδικό σημείο τομής  $P_4 = (x_4, y_4, 0)$  της ευθείας  $(SP)$ , όπου  $S = (0, 0, -1)$ , με τον ανοικτό δίσκο  $\Delta$ .

$$S, P, P_3 \in (SP) \implies \overrightarrow{SP} = t\overrightarrow{SP_3} \implies (x, y, z+1) = t(x_3, y_3, 1)$$

Άρα,  $t = \frac{1}{z+1}$ . Οπότε  $(x_3, y_3, 0) = \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}, 0\right)$ . Συνεπώς

$$\mathbb{S}_+^2 \ni P = (x, y, z) \xrightarrow{f^{\Delta}} \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}, 0\right) = P_3 \in \Delta.$$

$f^{\mathcal{Y}_+} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Y}_+$ . Σε κάθε σημείο  $P_1 = (x, y, 1) \in \mathcal{B}$  αντιστοιχούμε μοναδικό σημείο τομής  $P_4$  της ευθείας  $(OP_1)$  με το  $\mathcal{Y}_+$ . Τότε  $P_4 = (tx, ty, t)$ , όπου  $t^2x^2 + t^2y^2 - t^2 = -1$ . Άρα,  $t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ . Συνεπώς

$$\mathcal{B} \ni P_1(x, y, 1) \xrightarrow{f^{\mathcal{Y}_+}} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) = P_4 \in \mathcal{Y}_+.$$

$f^{\mathcal{Y}_+} : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \mathcal{Y}_+$ .

$$f^{\mathcal{Y}_+} = f^{\mathcal{Y}_+} \circ f^{\mathcal{B}} \implies (x, y, z) \xrightarrow{f^{\mathcal{B}}} (x, y, 1) \xrightarrow{f^{\mathcal{Y}_+}} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{1}{z}\right).$$

## 9.7 Η υπερβολική απόσταση.

Κάθε υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  ομοιομορφικό με ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του  $\mathbb{R}$  καλείται τόξο. Ως  $C^1$ -τόξο του  $\mathbb{R}^3$  εννοούμε κάθε τόξο  $T \subset \mathbb{R}^3$ , για το οποίο υπάρχει ένα διάστημα  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  και μια 1-1, επί και συνεχώς παραγωγίσιμη απεικόνιση  $\gamma : [a, b] \rightarrow T$ . Τα σημεία  $\gamma(a)$  και  $\gamma(b)$  καλούνται άκρα του  $T$ . Παραμετρικοποίηση του  $T$  είναι κάθε 1-1, επί και συνεχώς παραγωγίσιμη απεικόνιση  $\beta : [c, d] \rightarrow T$ , για την οποία υπάρχει μια 1-1, επί και συνεχώς παραγωγίσιμη απεικόνιση  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ , τέτοια ώστε  $\gamma(t) = \beta(h(t))$  για κάθε  $t \in [a, b]$ .

**Υπερβολικό μήκος στο  $\mathcal{H}$ .**

Το υπερβολικό μήκος ενός  $C^1$ -τόξου  $T$  του  $\mathcal{H}$  με παραμετροποίηση  $\gamma : [a, b] \rightarrow T$  ορίζεται από τον τύπο

$$L_{\mathcal{H}}(T) = L_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt.$$

**Θεώρημα 9.7.1.** Το υπερβολικό μήκος ενός  $C^1$ -τόξου  $T$  του  $\mathcal{H}$  είναι ανεξάρτητο από την παραμετροποίηση του.

*Απόδειξη.* Έστω  $\gamma : [a, b] \rightarrow T$  και  $\beta : [c, d] \rightarrow T$  είναι παραμετροποιήσεις του  $T$ . Τότε υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε  $\gamma(t) = \beta(h(t))$  για κάθε  $t \in [a, b]$ . Τότε

$$L_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{|(\beta \circ h)'(t)|}{\operatorname{Im}(\beta(h(t)))} dt = \int_a^b \frac{|(\beta'(h(t)))|}{\operatorname{Im}(\beta(h(t)))} |h'(t)| dt$$

Αν  $h$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε  $h(a) = c$ ,  $h(b) = d$  και  $h'(t) \geq 0$  για  $\forall t \in [a, b]$ . Οπότε

$$L_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|(\beta'(h(t)))|}{\operatorname{Im}(\beta(h(t)))} h'(t) dt \stackrel{u=h(t)}{=} \int_c^d \frac{|\beta'(u)|}{\operatorname{Im}(\beta(u))} du = L_{\mathcal{H}}(\beta)$$

Αν  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα, τότε  $h(a) = d$ ,  $h(b) = c$  και  $h'(t) \leq 0$  για  $\forall t \in [a, b]$ . Οπότε

$$L_{\mathcal{H}}(\gamma) = - \int_a^b \frac{|(\beta'(h(t)))|}{\operatorname{Im}(\beta(h(t)))} h'(t) dt \stackrel{u=h(t)}{=} \int_c^d \frac{|\beta'(u)|}{\operatorname{Im}(\beta(u))} du = L_{\mathcal{H}}(\beta)$$

□

**Παραδείγματα 9.7.2.**

1. Μια παραμετροποίηση του ευθύγραμμου τμήματος  $I$  με άκρα  $Ai$  και  $Bi$ , όπου  $B > A$ , είναι  $\gamma(t) = (0, t)$ , όπου  $t \in [A, B]$ . Έρα,

$$L_{\mathcal{H}}(I) = L_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_A^B \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_A^B \frac{1}{t} dt = \ln(B/A).$$

2. Το υπερβολικό μήκος της υπερβολικής ημιευθείας  $\gamma(t) = (0, t)$ , όπου  $t \in (0, 1]$ , είναι άπειρο, αφού

$$\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{u \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln u) = \infty.$$

**Θεώρημα 9.7.3.** Αν  $T$  ένα  $C^1$ -τόξο του  $\mathcal{H}$  και  $h \in G_{\mathcal{H}}$ , τότε  $L_{\mathcal{H}}(T) = L_{\mathcal{H}}(h(T))$ .

(Το υπερβολικό μήκος είναι αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς της  $G_{\mathcal{H}}$ .)

Απόδειξη. Έστω  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow T$  μια παραμετρικοποίηση του  $T$  και έστω ότι  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , όπου  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  και  $ad - bc = 1$ . Τότε  $(h \circ \gamma)(t) = \frac{a\gamma(t)+b}{c\gamma(t)+d}$ . Μετά από υπολογισμούς παίρνουμε

$$(h \circ \gamma)'(t) = \left( \frac{a\gamma(t)+b}{c\gamma(t)+d} \right)' = \frac{ad - bc}{(c\gamma(t)+d)^2} \gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{(c\gamma(t)+d)^2}$$

$$\operatorname{Im}((h \circ \gamma)(t)) = \operatorname{Im} \left( \frac{a\gamma(t)+b}{c\gamma(t)+d} \right) = \operatorname{Im} \frac{(a\gamma(t)+b)\overline{(c\gamma(t)+d)}}{|c\gamma(t)+d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(\gamma(t))}{|c\gamma(t)+d|^2}.$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{|(h \circ \gamma)'(t)|}{\operatorname{Im}((h \circ \gamma)(t))} = \frac{1}{|c\gamma(t)+d|^2} \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} = \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))}. \text{ 'ρα, } L_{\mathcal{H}}(h \circ \gamma) = L_{\mathcal{H}}(\gamma).$$

Αν  $h(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d} \in G_{\mathcal{H}}$ . Τότε  $h = h_1 \circ \varphi$ , όπου  $\varphi(z) = -\bar{z}$  και  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  με  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  και  $ab - cd = 1$  διατηρεί το υπερβολικό μήκος όπως αποδείξαμε ποιά πάνω. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η  $\varphi$  επίσης διατηρεί το υπερβολικό μήκος. Συνεπώς  $h$  διατηρεί το υπερβολικό μήκος.  $\square$

**Ευθύγραμμα τμήματα στο  $\mathcal{H}$ .**

**Ορισμός 9.7.4.** Έστω  $z, w \in \mathcal{H}$  και  $z \neq w$ .

Καλούμε  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα με άκρα  $z$  και  $w$  το τόξο με άκρα  $z$  και  $w$  της  $\mathcal{H}$ -ευθείας που διέρχεται από τα  $z$  και  $w$ . Για  $z, w \in \mathcal{H}$  συμβολίζουμε με  $\widetilde{zw}$  το  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $z$  και  $w$ .

Αν  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$ , τότε  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $z$  και  $w$  είναι ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα  $\overline{zw}$  του  $\mathcal{C}$ .

Αν  $\operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Re}(w)$ , τότε  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $z$  και  $w$  είναι τόξο ενός ημικυκλίου με κέντρο στον  $Ox$ -άξονα.

**Θεώρημα 9.7.5.** Από όλα τα  $C^1$ -τόξα με άκρα τα σημεία  $z, w \in \mathcal{H}$  το  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα έχει το μικρότερο υπερβολικό μήκος.

Απόδειξη. Έστω ότι  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , παραμετρικοποίηση ενός  $C^1$ -τόξου  $T$  με άκρα  $z$  και  $w$ . Ας υποθέσουμε πρώτα ότι  $z = Ai$  και  $w = Bi$ , όπου  $B > A$ . Τότε

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{H}}(T) &= L_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt = \int_a^b \left| \frac{y'(t)}{y(t)} \right| dt \geq \\ &\geq \left| \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| = \left| \ln y(t) \Big|_a^b \right| = \ln(B/A) = L_{\mathcal{H}}(\widetilde{zw}). \end{aligned}$$

Αν  $z$  ή  $w$  δεν ανήκουν στην  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $\ell = Oy \cap \mathcal{H}$ . Από το Θεώρημα 9.5.5 υπάρχει  $h \in G_{\mathcal{H}}$  που απεικονίζει την  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $z$  και  $w$  επί της  $\ell$ . Τότε  $h(z), h(w) \in \ell$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $h(z) = Ai$  και  $h(w) = Bi$ , όπου  $B > A$ . Επειδή το υπερβολικό μήκος είναι αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς της  $G_{\mathcal{H}}$ , έπεται ότι  $L_{\mathcal{H}}(T) = L_{\mathcal{H}}(h(T)) \geq \ln(B/A) = L_{\mathcal{H}}(\widetilde{zw})$ .  $\square$

**Θεώρημα 9.7.6.** Αν  $z = ai$ ,  $u = m + ai$  και  $w = bi$  με  $a \neq b$ , τότε  $\widetilde{zw} < \widetilde{uw}$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι  $a < b$ . Επειδή  $Re(u) \neq Re(w)$ , το  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα  $\widetilde{uw}$  είναι κυκλικό τόξο ενός κύκλου  $C(K, r)$  κάθετου στον  $Ox$ -άξονα.

Κάθε ευθεία που διέρχεται από το  $ti$ ,  $t \in [a, b)$ , και είναι παράλληλη στον  $Ox$ -άξονα τέμνει το  $\widetilde{uw}$  σε μοναδικό σημείο  $x(t) + ti$ .

Αν  $K \geq 0$ , τότε η ευθεία που διέρχεται από το  $bi$  και είναι παράλληλη στον  $Ox$ -άξονα τέμνει το  $\widetilde{uw}$  στο σημείο  $w = bi$ . Θέτουμε  $v = u$  και  $x(b) = 0$ .

Αν  $K < 0$ , τότε η ευθεία που διέρχεται από το  $bi$  και είναι παράλληλη στον  $Ox$ -άξονα τέμνει το  $\widetilde{uw}$  στο σημείο  $w = bi$  και σε ένα άλλο σημείο  $v = x(b) + bi$ .

Η απεικόνιση  $g(t) : [a, b] \rightarrow \widetilde{uw}$  με  $\gamma(t) = (x(t), t)$  είναι 1-1, επί και συνεχώς παραγωγίσιμη. Επομένως

$$L_{\mathcal{H}}(\widetilde{uw}) \geq L_{\mathcal{H}}(\widetilde{vw}) = L_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{t} dt \geq \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln(b/a) = \widetilde{zw}.$$

Η απόδειξη είναι όμοια για  $b < a$ . □

### Μετρική στο $\mathcal{H}$ .

**Ορισμός 9.7.7.** Ορίζουμε  $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$  ως εξής: αν  $z, w \in \mathcal{H}$  και  $z \neq w$ , τότε  $d_{\mathcal{H}}(z, w)$  είναι το υπερβολικό μήκος  $L_{\mathcal{H}}(\widetilde{zw}) > 0$  του  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμου τμήματος με άκρα  $z$  και  $w$  και  $d_{\mathcal{H}}(z, z) = 0$  για κάθε  $z \in \mathcal{H}$ .

**Πρόταση 9.7.8.** Η απεικόνιση  $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow (0, \infty)$  είναι μετρική.

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε ότι η  $d_{\mathcal{H}}$  πληρεί τα αξιώματα της μετρικής.

(i)  $d_{\mathcal{H}}(z, w) = 0 \iff z = w$ .

Πράγματι, αν  $z = w$ , τότε  $d_{\mathcal{H}}(z, w) = 0$  από τον ορισμό της υπερβολικής απόστασης. Αν  $z \neq w$ , τότε  $d_{\mathcal{H}}(z, w) > 0$  ως μήκος του  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμου τμήματος με άκρα  $z$  και  $w$ .

(ii)  $d_{\mathcal{H}}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(w, z)$  για οποιαδήποτε  $z, w \in \mathcal{H}$ .

Πράγματι, αν  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$  είναι η παραμετροποίηση του  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμου τμήματος  $\widetilde{zw}$ , τότε  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$  με  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$  είναι η παραμετροποίηση του  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμου τμήματος  $\widetilde{wz}$ . Έρα,  $L_{\mathcal{H}}(\widetilde{wz}) = L_{\mathcal{H}}(\widetilde{zw})$ , αφού το υπερβολικό μήκος ενός τόξου δεν εξαρτάται από την παραμετροποίηση του.

(iii)  $d_{\mathcal{H}}(z, w) \leq d_{\mathcal{H}}(z, u) + d_{\mathcal{H}}(u, w)$ , για οποιαδήποτε  $z, w, u \in \mathcal{H}$ .

Αν  $z, w, u$  είναι  $\mathcal{H}$ -συνευθειακά, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $u$  είναι μεταξύ  $z$  και  $w$  ( $u \in \widetilde{zw}$ ). Οπότε  $d_{\mathcal{H}}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(z, u) + d_{\mathcal{H}}(u, w)$ .

Αν  $z, w, u$  είναι μη  $\mathcal{H}$ -συνευθειακά, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $z, u \in Oy$ , διαφορετικά υπάρχει  $h \in G_{\mathcal{H}}$  που απεικονίζει την  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $z$  και  $w$  στην  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $Oy \cap \mathcal{H}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $z = ai$ ,  $w = bi$  και  $b > a$ .

Έστω ότι  $u = u_1 + u_2i$ . Ας υποθέσουμε ότι  $u_2 \in (a, b)$  και  $v = u_2i$ .

Από το Θεώρημα 9.7.6 προκύπτει ότι  $d_{\mathcal{H}}(z, v) \leq d_{\mathcal{H}}(z, u)$  και  $d_{\mathcal{H}}(v, w) \leq d_{\mathcal{H}}(w, u)$ . 'ρα,

$$d_{\mathcal{H}}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(z, v) + d_{\mathcal{H}}(v, w) \leq d_{\mathcal{H}}(z, u) + d_{\mathcal{H}}(v, w).$$

Αν  $u_2 \geq b$ , τότε  $d_{\mathcal{H}}(z, w) \leq d_{\mathcal{H}}(z, u_2) \leq d_{\mathcal{H}}(z, u) \leq d_{\mathcal{H}}(z, u) + d_{\mathcal{H}}(v, w)$ .

Η ιδιότητα (iii) αποδεικνύεται όμοια αν  $u_2 \leq a$ .

□

**Σημείωση 9.7.9.** Ένα τόξο  $T$  του  $\mathbb{R}^3$  καλείται κατά τμήματα  $C^1$ -τόξο από το  $A \in \mathbb{R}^3$  έως  $B \in \mathbb{R}^3$  όταν υπάρχει ένα διάστημα  $[a, b]$  του  $\mathbb{R}$ , ένας διαμερισμός  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  του  $[a, b]$  και μια 1-1, επί και συνεχής απεικόνιση  $\gamma : [a, b] \rightarrow T$  με  $\gamma(a) = A$ ,  $\gamma(b) = B$  έτσι ώστε ο περιορισμός της  $\gamma$  σε κάθε  $[t_i, t_{i+1}]$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη απεικόνιση.

Η οικογένεια των  $C^1$ -τόξων  $T_i = \gamma([t_i, t_{i+1}])$ ,  $i = 1, \dots, n$ , καλείται διαμερισμός του κατά τμήματα  $C^1$ -τόξου  $T$ .

Για κατά τμήματα  $C^1$ -τόξου  $T$  με διαμερισμό  $\{T_i\}_{i=1}^n$  ορίζουμε  $L_{\mathcal{H}}(T) = \sum_{i=1}^n L_{\mathcal{H}}(T_i)$ .

Με επαγωγή ως προς το πλήθος των στοιχείων ενός διαμερισμού του κατά τμήματα  $C^1$ -τόξου  $T$  και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής  $d_{\mathcal{H}}$  αποδεικνύεται ότι:

Από όλα τα κατά τμήματα  $C^1$ -τόξα με άκρα τα σημεία  $z, w \in \mathcal{H}$  το  $\mathcal{H}$ -ευθύγραμμο τμήμα έχει το μικρότερο υπερβολικό μήκος.

**Θεώρημα 9.7.10.** Κάθε  $h \in G_{\mathcal{H}}$  είναι  $\mathcal{H}$ -ισομετρία.

Απόδειξη. Έστω  $z, w \in \mathcal{H}$  και  $h \in G_{\mathcal{H}}$ .

Αν  $z = w$ , τότε  $d_{\mathcal{H}}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(h(z), h(w)) = 0$ .

Έστω ότι  $z \neq w$  και  $\ell$  είναι  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $z$  και  $w$ . Επειδή κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός απεικονίζει  $\mathcal{H}$ -ευθείες σε  $\mathcal{H}$ -ευθείες,  $h(\ell)$  είναι  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $h(z)$  και  $h(w)$ .

Η  $h$  διατηρεί τα μήκη των διαφορίσιμων τόξων. Επομένως το μήκος  $d_{\mathcal{H}}(z, w)$  του τόξου της  $\ell$  από το  $z$  έως  $w$  είναι ίσο με το μήκος  $d_{\mathcal{H}}(h(z), h(w))$  του τόξου της  $h(\ell)$  από το  $h(z)$  έως  $h(w)$ . Αφού  $d_{\mathcal{H}}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(h(z), h(w))$  για  $\forall z, w \in \mathcal{H}$ ,  $h$  είναι ισομετρία. □

**Σημείωση 9.7.11.** Αποδεικνύεται ότι η ομάδα μετασχηματισμών  $G_{\mathcal{H}}$  συμπίπτει με την ομάδα  $\mathcal{H}$ -ισομετριών του  $\mathcal{H}$  (δηλαδή, ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 9.7.10).

**Θεώρημα 9.7.12.** Κάθε  $h \in G_{\mathcal{H}}$  απεικονίζει Ευκλείδειους κύκλους του  $\mathcal{H}$  σε Ευκλείδειους κύκλους του  $\mathcal{H}$ .

Απόδειξη. Έστω  $C(K, r)$  ένας Ευκλείδειος κύκλος του  $\mathcal{H}$ .

Επειδή  $h = h_1 \circ \dots \circ h_n$ , όπου κάθε  $h_i$  είναι σύνθεση πεπερασμένου πλήθους αντιστροφών ως προς τις  $\mathcal{H}$ -ευθείες, αρκεί να δείξουμε ότι αν  $h$  είναι αντιστροφή από γενικευμένο κύκλο  $\ell$  κάθετο στον  $Ox$ , τότε  $h(C(K, r))$  είναι Ευκλείδειος κύκλος του  $\mathcal{H}$ .

Αν  $\ell$  είναι κάθετη στον  $Ox$ , τότε  $h(C(K, r))$  είναι συμμετρική εικόνα του  $C(K, r)$  ως προς την  $\ell$ . 'ρα,  $h(C(K, r))$  είναι Ευκλείδειος κύκλος του  $\mathcal{H}$ .

Αν  $\ell$  είναι κύκλος κάθετος στον  $Ox$  με κέντρο  $K_0$ , τότε  $K_0 \in Ox$ . Επομένως  $C(K, r)$  δεν διέρχεται από το κέντρο του  $\ell$ .

Αρα,  $h(C(K, r))$  είναι Ευκλείδειος κύκλος που δεν διέρχεται από το κέντρο του  $\ell$ . Από τον ορισμό της αντιστροφής ως προς τον κύκλο έπεται ότι  $h(C(K, r))$  βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τον  $Ox$  με τον  $C(K, r)$ . 'ρα,  $h(C(K, r))$  είναι Ευκλείδειος κύκλος του  $\mathcal{H}$ . □

**Θεώρημα 9.7.13.** Για κάθε  $z, w \in \mathcal{H}$  ισχύει

$$d_{\mathcal{H}}(z, w) = 2 \sinh^{-1} \left( \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)}\sqrt{\operatorname{Im}(w)}} \right). \quad (9.5)$$

Απόδειξη. Έστω  $z, w \in \mathcal{H}$ . Από το Θεώρημα 9.5.5 υπάρχει  $h \in G_{\mathcal{H}}$  που απεικονίζει την  $\mathcal{H}$ -ευθεία που διέρχεται από τα  $z$  και  $w$  στην  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $Oy \cap \mathcal{H}$ . Ήρα,  $h(z) = Bi$  και  $h(w) = Ai$ . Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $B > A$ . Το υπερβολικό μήκος είναι αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς της  $G_{\mathcal{H}}$ , άρα

$$d_{\mathcal{H}}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(h(z), h(w)) = d_{\mathcal{H}}(Bi, Ai) = \ln(B/A).$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \sinh \left( \frac{d_{\mathcal{H}}(z, w)}{2} \right) &= \sinh \left( \ln \sqrt{\frac{B}{A}} \right) = \frac{e^{\ln \sqrt{B/A}} - e^{-\ln \sqrt{B/A}}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \right) = \\ &= \frac{B - A}{2\sqrt{AB}} = \frac{1}{2} \frac{|Bi - Ai|}{\sqrt{\operatorname{Im}(Ai)}\sqrt{\operatorname{Im}(Bi)}} = \frac{|h(z) - h(w)|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(h(z))}\sqrt{\operatorname{Im}(h(w))}}. \end{aligned}$$

Ήρα,

$$d_{\mathcal{H}}(z, w) = 2 \sinh^{-1} \left( \frac{|h(z) - h(w)|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(h(z))}\sqrt{\operatorname{Im}(h(w))}} \right). \quad (9.6)$$

Όμως  $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  και  $ad - bc = 1$ . Επομένως

$$\begin{aligned} h(z) - h(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} = \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)} \\ \operatorname{Im}(h(z)) &= \frac{h(z) - \overline{h(z)}}{2i} = \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{2i|cz + d|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} \\ \operatorname{Im}(h(w)) &= \frac{\operatorname{Im}(w)}{|cw + d|^2} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{|h(z) - h(w)|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(h(z))}\sqrt{\operatorname{Im}(h(w))}} = \frac{\frac{|z - w|}{|cz + d||cw + d|}}{2\sqrt{\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}}\sqrt{\frac{\operatorname{Im}(w)}{|cw + d|^2}}} = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)}\sqrt{\operatorname{Im}(w)}} \quad (9.7)$$

Από τις ισότητες (9.6) και (9.7) προκύπτει ο τύπος (9.5).  $\square$

**Σημείωση 9.7.14.** Η συνάρτηση  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , είναι γνησίως αύξουσα και επί του διαστήματος  $(-\infty, \infty)$ , επίπλέον  $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ .



**Θεώρημα 9.7.15.** Για κάθε σημείο  $P$  του μοντέλου του ημιεπιπέδου του Poincaré  $\mathcal{H}$  και για κάθε  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $\ell$  υπάρχει μοναδική  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $\ell^\perp$  που διέρχεται από το  $P$  και είναι κάθετη στην  $\ell$ .

Απόδειξη. Αν  $\ell$  είναι Ευκλείδεια ημιευθεία κάθετη στον  $Ox$  με αρχή  $K \in Ox$ , τότε η  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $C(K, |PK|)$  διέρχεται από το  $P$  και είναι κάθετη στην  $\ell$ .

Έστω ότι  $\ell$  είναι ανοικτό ημικύκλιο με κέντρο  $K \in Ox$  και ακτίνα  $r$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (α')  $P$  ανήκει στην Ευκλείδεια ευθεία που διέρχεται από το  $K$  και είναι κάθετη στον  $Ox$ . Τότε η  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $(PK) \cap \mathcal{H}$  διέρχεται από το  $P$  και είναι κάθετη στην  $\ell$ .
- (β')  $P$  δεν ανήκει στην Ευκλείδεια ευθεία που διέρχεται από το  $K$  και είναι κάθετη στον  $Ox$ . Επειδή η αντιστροφή  $t$  ως προς τον κύκλο  $C(K, r)$  απεικονίζει κάθε κύκλο κάθετο στον  $C(K, r)$  στον εαυτό του, έπεται ότι τα κέντρα των κύκλων που διέρχονται από το  $P$  και είναι κάθετοι στον  $C(K, r)$  βρίσκονται στη μεσοκάθετο  $d$  του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα  $P$  και  $t(P)$ . Έστω  $T = d \cap Ox$ . Τότε η  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $\mathcal{H} \cap C(T, |TP|)$  διέρχεται από το  $P$  και είναι κάθετη στην  $\ell$ .

□

**Θεώρημα 9.7.16.** Οι  $\mathcal{H}$ -κύκλοι  $C_{\mathcal{H}}(K, r) = \{z \in \mathcal{H} : d_{\mathcal{H}}(z, K) = r\}$  είναι Ευκλείδεια κύκλοι (με άλλο κέντρο και άλλη ακτίνα).

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι  $K = i$ , τότε από το Θεώρημα 9.7.13 έχουμε

$$C_{\mathcal{H}}(K, r) = \left\{ z \in \mathcal{H} : 2 \sinh^{-1} \left( \frac{|z - i|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)}} \right) = r \right\} = \left\{ z \in \mathcal{H} : \frac{|z - i|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)}} = \sinh \frac{r}{2} \right\}.$$

Για  $R = \sinh \frac{r}{2}$  ( $R > 0$ , επειδή  $r > 0$ ) παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{H}}(K, r) &= \left\{ x + yi \in \mathcal{H} : \frac{|x + yi - i|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(x + yi)}} = R \right\} = \\ &= \left\{ x + yi \in \mathcal{H} : \frac{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}}{2\sqrt{y}} = R \right\} = \\ &= \left\{ x + yi \in \mathcal{H} : x^2 + (y - 1)^2 = 4yR^2 \right\} = \\ &= \left\{ x + yi \in \mathcal{H} : x^2 + [y^2 - (4R^2 + 2)y] + 1 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ x + yi \in \mathcal{H} : x^2 + [y - (2R^2 + 1)]^2 = 4R^2(R^2 + 1) \right\}. \end{aligned}$$

Ήρα,  $C_{\mathcal{H}}(i, r)$  είναι ευκλείδειος κύκλος με κέντρο  $(0, 1 + 2R^2)$  και ακτίνα  $2R\sqrt{1 + R^2}$ .

Αν  $K = x_K + y_K i \neq i$ , τότε για  $h \in G_{\mathcal{H}}$  με  $h(z) = \frac{z - (x_K + y_K i)}{z - (x_K - y_K i)}$  ισχύει  $h(K) = i$ .

Επειδή  $h$  είναι  $\mathcal{H}$ -ισομετρία,  $h(C_{\mathcal{H}}(K, r))$  είναι  $\mathcal{H}$ -κύκλος με κέντρο  $i$  και ακτίνα  $r$ . Ήρα, όπως αποδείξαμε,  $h(C_{\mathcal{H}}(K, r))$  είναι Ευκλείδειος κύκλος. Επειδή  $h^{-1} \in G_{\mathcal{H}}$ , από το Θεώρημα 9.7.12, προκύπτει ότι  $C_{\mathcal{H}}(K, r) = h^{-1}(h(C_{\mathcal{H}}(K, r)))$  είναι Ευκλείδειος κύκλος. □

**Σημείωση 9.7.17.** Αποδεικνύεται ότι οι τοπολογίες του  $\mathcal{H}$  που παράγονται από την μετρική  $d_{\mathcal{H}}$  και από την συνήθη ευκλείδεια μετρική ταυτίζονται.

### Μετρική σε άλλα μοντέλα του υπερβολικού επιπέδου.

Χρησιμοποιώντας τις απεικονίσεις μεταξύ των μοντέλων του υπερβολικού επιπέδου, μπορούμε από τον τύπο του υπερβολικού μήκους του μοντέλου  $\mathcal{H}$  να ορίσουμε το υπερβολικό μήκος ενός  $C^1$ -τόξου  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$  στα μοντέλα  $\mathcal{Y}_+$ ,  $\Delta$ ,  $\mathbb{S}_+^2$ ,  $\mathcal{B}$ :

$$L_{\mathcal{Y}_+}(T) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

$$L_{\Delta}(T) = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{|1 - \gamma'(t)|^2} dt.$$

$$L_{\mathbb{S}_+^2}(T) = \int_a^b \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}{z^2(t)}} dt, \text{ όπου } \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

$$L_{\mathcal{B}}(T) = \int_a^b \sqrt{\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{1 - x^2(t) - y^2(t)} + \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{(1 - x^2(t) - y^2(t))^2}} dt, \text{ όπου } \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

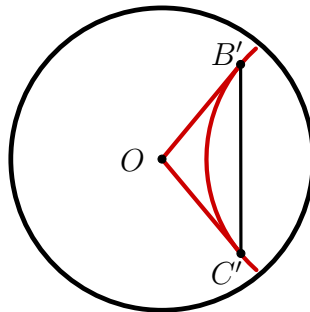
### 9.8 Άθροισμα γωνιών τριγώνου στο υπερβολικό επίπεδο.

Θεωρούμε τρία σημεία  $A, B, C$  ενός μοντέλου του υπερβολικού επιπέδου, τα οποία δεν ανήκουν και τα τρία σε μια υπερβολική ευθεία. Καλούμε υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές  $A, B, C$  τα τρία τόξα  $AB, BC, CA$  υπερβολικών ευθειών με άκρα τα σημεία αυτά. Για την απόδειξη του Θεωρήματος για το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του δίσκου του Poincaré, επειδή η γωνία μεταξύ των ευθειών στο μοντέλο αυτό ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην Ευκλείδεια γεωμετρία: είναι η γωνία μεταξύ των εφαπτομένων των πλευρών στην κορυφή.

**Θεώρημα 9.8.1.** Το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι  $< \pi$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $ABC$  ένα υπερβολικό τρίγωνο του μοντέλου του δίσκου του Poincaré  $\Delta$ .

Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.4.3 υπάρχει κύκλος  $C_A$  κάθετος στο  $Bd(\Delta)$ , τέτοιος ώστε η αντιστροφή  $t$  ως προς τον  $C_A$  απεικονίζει το  $A$  στο  $O = (0, 0)$ . Έστω  $t(B) = B'$  και  $t(C) = C'$ . Από το Πρόσχημα 7.3.4 η απεικόνιση  $t$  διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των καμπυλών. Επομένως το άθροισμα των γωνιών του υπερβολικού τριγώνου  $ABC$  ισούται με το άθροισμα των γωνιών του υπερβολικού τριγώνου  $OB'C'$ . Το άθροισμα των γωνιών του υπερβολικού τριγώνου  $OB'C'$  είναι μικρότερο από το άθροισμα των γωνιών του Ευκλείδειου τριγώνου  $OB'C'$ . Ήρα,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$ .  $\square$



Σχήμα 9.7: Άθροισμα γωνιών του υπερβολικού τριγώνου  $OB'C'$  είναι  $< \pi$ .

## 9.9 Ασκήσεις.

**9.9.1.** Να αποδειχθεί ότι για το μοντέλο  $(\Delta, G_\Delta)$  του δίσκου του Poincaré της υπερβολικής γεωμετρίας ισχύει  $M(\Delta) = \Delta$  για κάθε γενικευμένο μετασχηματισμό Möbius  $M$  που έχει μια από τις μορφές

$$M(z) = \frac{mz + n}{\bar{n}z + \bar{m}} \quad \text{ή} \quad M(z) = \frac{m\bar{z} + n}{\bar{n}\bar{z} + \bar{m}}, \quad m, n \in \mathbb{C} \text{ και } |m|^2 - |n|^2 = 1.$$

**9.9.2.** Να αποδειχθεί ότι για το μοντέλο του ημιεπιπέδου  $(\mathcal{H}, G_{\mathcal{H}})$  της υπερβολικής γεωμετρίας ισχύει  $M(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  για κάθε γενικευμένο μετασχηματισμό Möbius  $M$  που έχει μια από τις μορφές

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad h(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

**9.9.3.** Να βρεθεί η εξίσωση της  $\mathcal{H}$ -ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $z$  και  $w$  για

(α')  $z = 3 + 4i$  και  $w = 3 + 9i$

(β')  $z = 3 + 4i$  και  $w = 11 + 12i$

**9.9.4.** Να βρεθεί η εξίσωση της  $\mathcal{H}$ -ευθείας (όπου  $\mathcal{H}$  είναι το επίπεδο στο μοντέλο του ημιεπιπέδου του Poincaré) που διέρχεται από το σημείο  $P$  και είναι κάθετη στην  $\mathcal{H}$ -ευθεία  $\ell$  για

(α')  $P = 4 + 3i$  και  $\ell : x = 3$ .

(β')  $P = 4 + 3i$  και  $\ell : x^2 + y^2 = 1$ .

(γ')  $P = 4 + 3i$  και  $\ell : (x - 4)^2 + y^2 = 1$ .

**9.9.5.** Να βρεθεί το  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\mathcal{H}}(z_n, w_n)$  όταν:

(α')  $z_n = i$  και  $w_n = 10^n i$       (β')  $z_n = i$  και  $w_n = \frac{1}{10^n} i$

(γ')  $z_n = 10^n i$  και  $w_n = 1 + 10^n i$       (δ')  $z_n = \frac{1}{10^n} i$  και  $w_n = 1 + \frac{1}{10^n} i$ .

**9.9.6.** Να αποδειχθεί ότι ο αφινικός μετασχηματισμός  $f_A$  του  $\mathbb{R}^3$  με συσχετισμένο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

απεικονίζει το  $\mathcal{Y}_+$  στον εαυτό του (Υπόδειξη: Δείξτε ότι  $f_A$  απεικονίζει το υπερβολοειδές  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  στον εαυτό του και ότι  $f_A(0, 0, 1) \in \mathcal{Y}_+$ ).

**9.9.7.** Να αποδειχθεί ότι ένας αφινικός μετασχηματισμός του  $\mathbb{R}^3$  με συσχετισμένο πίνακα  $A \in GL(3, \mathbb{R})$  απεικονίζει το υπερβολοειδές  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  στον εαυτό του αν και μόνον

αν  $A^t K A = K$  για  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .



## Κεφάλαιο 10

### Η ιεράρχηση των γεωμετριών.

#### Ισομορφικές γεωμετρίες.

Δύο γεωμετρίες  $(X, G_X)$  και  $(Y, G_Y)$  καλούνται *ισομορφικές*, όταν υπάρχουν μια 1-1 και επί απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  και ένας ισομορφισμός  $i : G_X \rightarrow G_Y$  ομάδων  $G_X$  και  $G_Y$  έτσι ώστε

$$f(g(x)) = i(g)(f(x)), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G_X.$$

Το ζεύγος  $(f, i)$  καλείται *ισομορφισμός της γεωμετρίας  $(X, G_X)$  επί της γεωμετρίας  $(Y, G_Y)$* .

#### Εμφύτευση της μιας γεωμετρίας στην άλλη.

Θα λέμε ότι η γεωμετρία  $(X, G_X)$  *εμφυτεύεται στη γεωμετρία  $(Y, G_Y)$* , όταν υπάρχουν μια 1-1 απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  και μονομορφισμός ομάδων  $i : G_X \rightarrow G_Y$  έτσι ώστε

$$f(g(x)) = i(g)(f(x)), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G_X.$$

Το ζεύγος  $(f, i)$  καλείται *εμφύτευση της γεωμετρίας  $(X, G_X)$  στη γεωμετρία  $(Y, G_Y)$* .

#### Υπογεωμετρίες.

Έστω ότι  $Y$  και  $Z$  είναι μη κενά σύνολα και  $g : Y \rightarrow Z$  είναι μια απεικόνιση.

Για κάθε μη κενό  $X \subseteq Y$  η απεικόνιση  $g|_X : X \rightarrow Z$  με  $g|_X(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in X$  καλείται *περιορισμός της  $g$  στο  $X$* .

Μια γεωμετρία  $(X, G_X)$  καλείται *υπογεωμετρία της γεωμετρίας  $(Y, G_Y)$* , όταν  $X \subseteq Y$  και υπάρχει μια υποομάδα  $G$  της ομάδας  $G_Y$  τέτοια ώστε η  $G$  να είναι ισομορφική με την  $G_X$  και  $G_X = \{g|_X : g \in G\}$ .

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μια γεωμετρία  $(X, G_X)$  εμφυτεύεται στη γεωμετρία  $(Y, G_Y)$  αν και μόνον αν η  $(X, G_X)$  είναι ισομορφική με μια υπογεωμετρία της  $(Y, G_Y)$ .

#### Παραδείγματα 10.0.1.

1. Η γεωμετρία των μεταφορών  $(\mathbb{R}^n, T(n))$  είναι υπογεωμετρία της Ευκλείδειας γεωμετρίας  $(\mathbb{R}^n, E(n))$ .
2. Η Ευκλείδεια γεωμετρία  $(\mathbb{R}^n, E(n))$  είναι υπογεωμετρία της αφινικής γεωμετρίας  $(\mathbb{R}^n, A(n))$ .
3. Η Ευκλείδεια γεωμετρία  $(\mathbb{R}^2, E(2))$  είναι υπογεωμετρία της γεωμετρίας της αντιστροφής. (Επειδή κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση ανακλάσεων από ευθείες.)
4. Η σφαιρική γεωμετρία είναι υπογεωμετρία της τρισδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας.

## 10.1 Υπογεωμετρίες της προβολικής γεωμετρίας.

**Θεώρημα 10.1.1.** Η αφινική γεωμετρία  $(\mathbb{R}^2, A(2))$  εμφυτεύεται στην προβολική γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\mathbb{RP}_0^2 = \{P \in \mathbb{RP}^2 : P = (x : y : 1)\} \text{ και } P_0(2) = \{p \in P(2) : p(\mathbb{RP}_0^2) = \mathbb{RP}_0^2\}.$$

Τότε  $P_0(2)$  είναι υποομάδα της  $P(2)$ .

Ορίζουμε μια 1-1 και επί απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}_0^2 \subset \mathbb{RP}^2$  με  $f(x, y) = (x : y : 1)$ .

Θα ορίσουμε ισομορφισμό  $i : A(2) \rightarrow P_0(2) \subset P(2)$ . Για  $g \in A(2)$  με

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}), \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

ορίζουμε ως  $i(g)$  τον προβολικό μετασχηματισμό με συσχετισμένο πίνακα  $A_g = \begin{pmatrix} a & b & k \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Επαληθεύεται εύκολα ότι  $f(g(x, y)) = i(g)(f(x, y))$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  και για κάθε  $g \in A(2)$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $i$  είναι 1-1 και επί του  $P_0(2)$ .

Η  $i$  είναι 1-1, διότι  $[A_{g_1}] \neq [A_{g_2}]$  για  $g_1 \neq g_2$ .

Έστω  $P = (x : y : 1) \in \mathbb{RP}_0^2$  και  $i(g)(P) = (x' : y' : z')$ . Τότε

$$(x', y', z') = \begin{pmatrix} a & b & k \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + k \\ cx + dy + m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ήρα,  $i(g)(P) = (ax + by : cx + dy : 1) \in \mathbb{RP}_0^2$ . Επομένως  $i(g) \in P_0(2)$ .

Θα δείξουμε ότι  $i$  είναι επί του  $P_0(2)$ .

Έστω ότι  $p \in P_0(2)$  με συσχετισμένο πίνακα  $A_p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$ .

Τότε για κάθε  $P = (x : y : 0) \notin \mathbb{RP}_0^2$  έχουμε  $p(P) = (x' : y' : 0) \notin \mathbb{RP}_0^2$ . Ήρα,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \\ c_1x + c_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως  $c_1 = c_2 = 0$ . Ήρα,  $A_p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ . Επειδή  $\det(A_p) \neq 0$ , είναι  $c_3 \neq 0$ .

Ήρα, ο πίνακας  $\frac{1}{c_3}A_p = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_3} & \frac{a_2}{c_3} & \frac{a_3}{c_3} \\ \frac{b_1}{c_3} & \frac{b_2}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  είναι επίσης συσχετισμένος του  $p$ .

Συνεπώς  $p = i(g)$  για  $g \in A(2)$  με  $g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_3} & \frac{a_2}{c_3} \\ \frac{b_1}{c_3} & \frac{b_2}{c_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_3}{c_3} \\ \frac{b_3}{c_3} \end{pmatrix}$ .

Συνεπώς η αφινική γεωμετρία εμφυτεύεται στην προβολική.  $\square$

Επειδή η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι υπογεωμετρία της αφινικής γεωμετρίας, από το Θεώρημα 10.1.1 συνεπάγεται το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 10.1.2.** Η Ευκλείδεια γεωμετρία  $(\mathbb{R}^2, E(2))$  εμφυτεύεται στην προβολική γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .

**Θεώρημα 10.1.3.** Η υπερβολική γεωμετρία  $(\mathcal{B}, G_{\mathcal{B}})$  εμφυτεύεται στην προβολική γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .

Απόδειξη. Από τον ορισμό του μοντέλου του Beltrami-Klein  $(\mathcal{B}, G_{\mathcal{B}})$ :

$$\mathcal{B} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1.\}$$

Ορίζουμε μια 1-1 απεικόνιση  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  ως εξής:

$$P = (x, y, 1) \in \mathcal{B} \implies f(P) = (x : y : 1).$$

Έστω  $\mathcal{K} = \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  και  $G_{\mathcal{K}} = \{T \in P(2) : T(\mathcal{K}) = \mathcal{K}\}$ .

Από τον ορισμό του μοντέλου του Beltrami-Klein  $(\mathcal{B}, G_{\mathcal{B}})$ , έχουμε  $G_{\mathcal{B}} = \{T_{\mathcal{B}} : T \in G_{\mathcal{K}}\}$ , όπου η 1-1 και επί απεικόνιση  $T_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  ορίζεται ως εξής:

$$P = (x, y, 1) \in \mathcal{B} \text{ και } T(x : y : 1) = (x' : y' : 1) \implies T_{\mathcal{B}}(P) = (x', y', 1).$$

Έστω  $i : G_{\mathcal{B}} \rightarrow P(2)$  με  $i(T_{\mathcal{B}}) = T$ . Τότε  $i$  είναι ισομορφισμός της ομάδας  $G_{\mathcal{B}}$  επί της υποομάδας  $G_{\mathcal{K}}$  της ομάδας  $P(2)$ . Έστω  $P = (x, y, 1) \in \mathcal{B}$  και  $T_{\mathcal{B}} \in G_{\mathcal{B}}$ . Τότε  $T_{\mathcal{B}}(P) \in \mathcal{B}$ , επομένως  $T_{\mathcal{B}}(P) = (x', y', 1)$ . Από τα παραπάνω

$$f(T_{\mathcal{B}}(P)) = f(x', y', 1) = (x' : y' : 1) \text{ και } i(T_{\mathcal{B}})(f(P)) = T(x : y : 1) = (x' : y' : 1).$$

Ήρα,  $f(T_{\mathcal{B}}(P)) = i(T_{\mathcal{B}})(f(P))$ . Συνεπώς  $(f, i)$  είναι η εμφύτευση της γεωμετρίας  $(\mathcal{B}, G_{\mathcal{B}})$  στην γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .  $\square$

**Θεώρημα 10.1.4.** Η ελλειπτική γεωμετρία  $(\mathbb{E}\mathbb{I}^2, \tilde{S}(2))$  εμφυτεύεται στην προβολική γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .

Απόδειξη. Από τον ορισμό της ελλειπτικής γεωμετρίας  $\mathbb{E}\mathbb{I}^2 = \{\{P, -P\} : P \in \mathbb{S}^2\}$ .

Ορίζουμε 1-1 και επί απεικόνιση  $f : \mathbb{E}\mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  ως εξής:  $f(\{P, -P\})$  είναι η ευθεία του  $\mathbb{R}^3$  που διέρχεται από τα σημεία  $P$  και  $-P$ .

Θα ορίσουμε μονομορφισμό  $i : \tilde{S}(2) \rightarrow P(2)$ . Έστω  $\tilde{g} \in \tilde{S}(2)$ . Υπάρχει σφαιρική ισομετρία  $g \in S(2)$  τέτοια ώστε για κάθε  $\{P, -P\} \in \mathbb{E}\mathbb{I}^2$  να ισχύει  $\tilde{g}(\{P, -P\}) = \{g(P), g(-P)\}$ . Έστω ότι  $A_g \in O(3, \mathbb{R})$  είναι ο ορθογώνιος πίνακας συσχετισμένος με την σφαιρική ισομετρία

$g$ , δηλαδή  $g(x, y, z) = A_g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ . Επειδή  $\det(A_g) \neq 0$ , έπεται ότι

$A_g \in GL(3, \mathbb{R})$ . Στον  $\tilde{g}$  αντιστοιχούμε τον προβολικό μετασχηματισμό  $i(\tilde{g})$  με συσχετισμένο πίνακα  $A_g$ . Αποδεικνύεται εύκολα ότι  $i(\tilde{g})(f(\{P, -P\})) = f(\tilde{g}(P))$  για κάθε  $\{P, -P\} \in \mathbb{E}\mathbb{I}^2$  και για κάθε  $\tilde{g} \in \tilde{S}(2)$ . Ήρα,  $(f, i)$  είναι εμφύτευση της  $(\mathbb{E}\mathbb{I}^2, \tilde{S}(2))$  στην  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .  $\square$

**Σημείωση 10.1.5.** Αποδεικνύεται ότι η σφαιρική γεωμετρία  $(\mathbb{S}^2, S(2))$  δεν εμφυτεύεται στην προβολική γεωμετρία  $(\mathbb{RP}^2, P(2))$ .

Για να αποδειχθεί ο παραπάνω ισχυρισμός, πρώτα, υποθέτοντας το αντίθετο, αποδεικνύουμε ότι κάθε σφαιρική ευθεία απεικονίζεται σε προβολική ευθεία και ότι η σφαίρα δεν μπορεί να απεικονιστεί σε μια προβολική ευθεία. Επειδή οι σφαιρικές ευθείες τέμνονται σε δύο σημεία, θα προκύψει ότι υπάρχουν προβολικές ευθείες που τέμνονται σε δύο σημεία, που είναι άτοπο.

## 10.2 Ασκήσεις

**10.2.1.** Να αποδειχθεί ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία  $(\mathbb{R}^2, E(2))$  είναι υπογεωμετρία της γεωμετρίας της αντιστροφής  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}))$ .

**10.2.2.** Να αποδειχθεί ότι η γεωμετρία των μεταφορών  $(\mathbb{R}^n, T(n))$  είναι υπογεωμετρία της Ευκλείδειας γεωμετρίας του  $\mathbb{R}^n$ .

**10.2.3.** Να αποδειχθεί ότι η σφαιρική γεωμετρία  $(\mathbb{S}^2, S(2))$  είναι υπογεωμετρία της Ευκλείδειας γεωμετρίας  $(\mathbb{R}^3, E(3))$ .

**10.2.4.** Να αποδειχθεί ότι το μοντέλο  $(\Delta, G_\Delta)$  του δίσκου του Poincaré της υπερβολικής γεωμετρίας είναι υπογεωμετρία της γεωμετρίας της αντιστροφής  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}))$ .

**10.2.5.** Να αποδειχθεί ότι το μοντέλο  $(\mathcal{H}, G_{\mathcal{H}})$  του ημιεπιπέδου του Poincaré της υπερβολικής γεωμετρίας είναι υπογεωμετρία της γεωμετρίας της αντιστροφής  $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, Inv(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}))$ .



## Ευρετήριο

ανάκλαση, 27  
απόσταση  
    σφαιρική, 40  
απεικόνιση  
    ενελικτική, 75  
  
δίγωνο, 45  
δύναμη αντιστροφής, 75  
δύναμη σημείου, 83  
  
εμφύτευση, 117  
επιμορφισμός, 6  
ευθεία  
    διάτρητη, 77  
    εκτεταμένη, 49  
    προβολική, 56  
  
γεωμετρία, 13  
    αφρική, 17  
    ελλειπτική, 52  
    Ευκλείδεια, 15  
    σφαιρική, 39  
γεωμετρία της αντιστροφής, 79  
  
ισημερινός, 40  
ισομετρία, 15  
    σφαιρική, 42  
ισομορφικές γεωμετρίες, 117  
ισομορφισμός, 6  
  
κέντρο αντιστροφής, 75  
κύκλος  
    διάτρητος, 77  
    γενικευμένος, 79  
κύκλος αντιστροφής, 75  
  
λόγος  
    απλός, 8  
    διπλός, 8

μεταφορά, 16  
μετασχηματισμός  
    Möbius, 88  
    Ευκλείδειος, 15  
    προβολικός, 60  
    σφαιρικός, 39  
μονομορφισμός, 6  
  
ομάδα, 5  
    συμμετρική, 6  
ομοιοθεσία, 75  
  
πίνακας  
    ορθογώνιος, 9  
    συσχετισμένος, 60  
πόλος, 40  
περιστροφή, 25  
προβολή  
    πρότυπη, 58  
    στερεογραφική, 49  
προβολικό  
    σημείο, 55  
    επίπεδο, 55  
    σχήμα, 56  
  
ριζικός άξονας, 83  
  
συντεταγμένες  
    ομογενείς, 56  
  
τρίγωνο  
    σφαιρικό, 46  
  
υπογεωμετρία, 117  
υποομάδα, 5



## Βιβλιογραφία

- [1] D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray *Geometry*, Cambridge University Press, Second Edition, 2012.
- [2] Ana Irene Ramirez Galarza, Jos Seade, *Introduction to Classical Geometries*, Birkhauser Verlag AG, 2007.
- [3] Π. Πάμφιλος, *Έλασσον γεωμετρικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012 .
- [4] A. B. Sossinsky, *Geometries*, Student Mathematical Library Vol 64, American Mathematical Society, 2012.