ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Σοφία Ζαφειρίδου

Τμήμα Μαθηματικών
Πάτρα 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

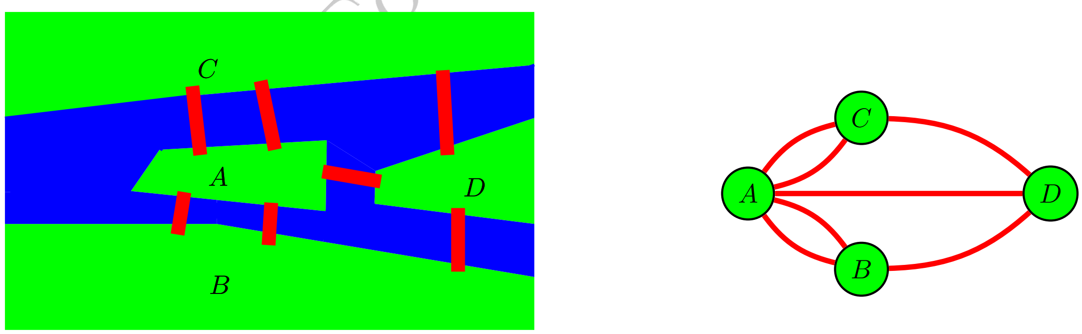
Η γέννηση της τοπολογίας.

Στα τέλη του 17 αιώνα ο Leibniz είχε εκφράσει την ανάγκη δημιουργίας ενός νέου κλάδου των μαθηματικών, ο οποίος να μην έχει σχέση με τα μεγέθη, αλλά να ασχολείται με τα προβλήματα θέσης. Τον κλάδο αυτό ο ίδιος αργότερα ονόμασε "Analysis Situs".

Μερικά από τα προβλήματα θέσης είναι τα παρακάτω.

Το πρόβλημα των 7 γεφυρών.

Στην πόλη Königsberg, που βρίσκεται στις εκβολές του ποταμού Pregolya στη Βαλτική θάλασσα, υπάρχουν 7 γέφυρες με την διάταξη του σχήματος 1.1α΄.



(α΄) 7 γέφυρες

(β΄) Γράφημα 7 γεφυρών

Σχήμα 1.1

Από παλιά τους κατοίκους της πόλης Konigsberg απασχολούσε το εξής πρόβλημα: πώς να περάσουν από όλες τις γέφυρες χωρίς να διασχίσουν την ίδια γέφυρα δύο φορές. Πολλοί κάτοικοι πόλης προσπαθούσαν να το πετύχουν θεωρητικά ή πρακτικά την ώρα του περιπάτου. Δεν κατάφερναν όμως να αποδείξουν ότι θεωρητικά αυτό είναι αδύνατον.

Το 1736 το πρόβλημα των 7γεφυρών απασχόλησε τον Ελβετό μαθηματικό Euler.

Σε ένα απλοποιημένο σχήμα-γράφημα συμβόλισε τις γέφυρες με γραμμές και τις περιοχές της πόλης με σημεία, όπως στο σχήμα 1.1β΄.

Κατέληξε στα εξής συμπεράσματα:

- Το πλήθος των κορυφών στις οποίες καταλήγει περιττός αριθμός γραμμών είναι πάντα άρτιο.
- Αν σε κάθε κορυφή καταλήγει άρτιο πλήθος γραμμών, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα με μιά μολυβιά ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή και επιστρέφοντας στη ίδια.
- Ένα γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί με μια μολυβιά αν και μόνο αν αυτό περιέχει το πολύ 2 κορυφές στις οποίες καταλήγει περιττός αριθμός γραμμών.

Το γράφημα των 7 γεφυρών περιέχει 4 περιττές κορυφές, άρα δεν γίνεται να περάσει κανείς από όλες τις γέφυρες χωρίς να διασχίσει δύο φορές την ίδια γέφυρα.

Το άρθρο του Euler για τις Επτά Γέφυρες του Königsberg θεωρείται ως ένα από τα πρώτα αποτελέσματα που δεν εξαρτώνται από κανέναν τύπο μέτρησης, δηλαδή ως ένα από τα πρώτα τοπολογικά αποτελέσματα.

Ο τύπος του πολυέδρου.

Σε μια άλλη γνωστή εργασία του Euler υπάρχει ο τύπος του πολυέδρου, που εφευρέθηκε από τον Euler το 1752:

$$a_0 - a_1 + a_2 = 2,$$

όπου a_0 -το πλήθος των κορυφών, a_1 -το πλήθος των ακμών και a_2 -το πλήθος των εδρών.

Ο τύπος του πολυέδρου δεν σχετίζεται ούτε με τα μήκη των ακμών του πολυέδρου, ούτε με τα μεγέθη των γωνιών, είχε αποδειχθεί και από τον Dekart, ο οποίος όμως στην απόδειξη του χρησιμοποίησε τα μεγέθη των γωνιών.

Το πρόβλημα των 4 χρωμάτων.

Χρωματίζοντας έναν χάρτη είναι φυσικό να επιδιώξει κανείς να χρησιμοποιήσει τα λιγότερα χρώματα, αλλά έτσι ώστε τα γειτονικά κράτη, που έχουν κοινό ένα μέρος του συνόρου τους (όχι μόνο κοινό σημείο) να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Το 1852 ο Francis Guthrie χρωματίζοντας χάρτη με τις κομητείες της Αγγλίας παρατήρησε ότι τα 4 χρώματα είναι αρκετά. Ο αδερφός του Φρεντερίκ ενημέρωσε για το πρόβλημα τον γνωστό μαθηματικό DeMorgan, και εκείνος με τη σειρά του τη μαθηματική κοινότητα.

Ακολούθησαν πολλές λανθασμένες αποδείξεις της υπόθεσης. Το 1976 ο αμερικανός Appel και ο γερμανός Haken απέδειξαν ότι πράγματι τα 4 χρώματα είναι αρκετά για τον χρωματισμό ενός χάρτη. Ένα σημαντικό μέρος των ελέγχων ρουτίνας στην απόδειξη είχε εκτελεστεί από υπολογιστή.

Τοπολογία και οι εφαρμογές της.

Ο όρος τοπολογία ανήκει στον γερμανό μαθηματικό Listing (1808-1882), ο οποίος το 1847 συγκέντρωσε τα αποτελέσματα των ερευνών του στην εργασία ≪Αρχικές μελέτες στην τοπολογία≫.

Το 1906 ο Fréchet εισήγαγε την έννοια του μετρικού χώρου.

Το 1922 ο Kuratowsky έδωσε τον ορισμό του τοπολογικού χώρου που χρησιμοποιείται σήμερα.

Η γενική τοπολογία προσδιορίζει με αυστηρό μαθηματικό τρόπο τις έννοιες όπως καμπύλη, επιφάνεια, σύνορο μιας περιοχής, διάσταση ενός συνόλου.

Η τοπολογικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται στην πραγματική ανάλυση, στην μιγαδική ανάλυση, στη συναρτησιακή ανάλυση, ακόμα και στη στατιστική.

Η θεωρία των γραφημάτων, τις αρχές της οποίας έθεσε ο Euler, βρίσκει άμεση εφαρμογή στην επιστήμη των υπολογιστών.

Πολλά προβλήματα μοριακής βιολογίας, χημείας, φυσικής και άλλων επιστημών, ανάγονται σε τοπολογικά προβλήματα.

Κεφάλαιο 2

Σύνολα και απεικονίσεις.

2.1 Σύνολα

Ως *σύνολο* θα εννοούμε μια συλλογή αντικειμένων που έχουν μια δεδομένη ιδιότητα.

Ενα σύνολο A καλείται υποσύνολο ενός συνόλου B, γράφουμε $A \subseteq B$, αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B.

Δύο σύνολα A και B καλούνται ίσα, γράφουμε $A = B$, αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Ένα σύνολο A καλείται *γνήσιο υποσύνολο* του B, αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία, το σύνολο αυτό καλείται *κενό σύνολο* και συμβολίζεται με $\emptyset$. Προφανώς $\emptyset \subseteq A$, για οποιοδήποτε σύνολο A.

Το σύνολο όλων των υποσυνόλων ένος συνόλου X καλείται δυναμοσύνολο του X και συμβολίζεται με $P(X)$: $P(X) = \{A : A \subseteq X\}$

Έστω A και B δύο υποσύνολα ενός συνόλου X. Ορίζουμε τα σύνολα:

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ή } x \in B\}$ ένωση των A και B,

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ και } x \in B\}$ τομή των A και B,

$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ και } x \notin B\}$ διαφορά του B από το A,

$A^c = X \setminus A$ συμπλήρωμα του A ως προς X

Για $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ ορίζουμε επίσης το γινόμενο του A επί του B:

$$A \times B = \{(a, b) |\ a \in A \text{ και } b \in B\}$$

Συμβολίζουμε $A^2 = A \times A$.

Βασικές ιδιότητες των πράξεων $\cup$, $\cap$

1. Αντιμεταθετικές: $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

2. Προσεταιριστικές: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. Επιμεριστικές: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Νόμοι του De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ και $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.2 Απεικονίσεις

Εστω X και Y δύο σύνολα.

Απεικόνηση $f : X \to Y$ είναι κάθε υποσύνολο $f \subseteq X \times Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in f$.

Αν $(x, y) \in f$, τότε γράφουμε $y = f(x)$.

Το σύνολο όλων των απεικονίσεων από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y θα το συμβολίζουμε με Y^X, δηλαδή

$$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$$

Εστω $f : X \to Y$ μια απεικόνιση, $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$.

$$f[A] = \{f(x) | x \in A\} \text{ καλείται } \textit{εικόνα του } A$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X | f(x) \in B\} \text{ καλείται } \textit{προεικόνα} \text{ του } B$$

Αν $f[X] = Y$, τότε η απεικόνιση f καλείται *απεικόνιση του* X *επί του* Y.

Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$, όταν $x_1 \neq x_2$, η απεικόνιση f καλείται *αμφιμονοσήμαντη ή ένα προς ένα* (γράφούμε f είναι 1-1).

Κάθε απεικόνιση $a : \{0, 1, ..., n\} \to X$, όπου $n \in \mathbb{N}$, καλείται πεπερασμένη ακολουθία του X και συμβολίζεται με $a_0, ..., a_n$ ή $\{a_i\}_{i=1}^n$, όπου $a_n = a(n)$.

Καθε απεικόνιση $a : \mathbb{N} \to X$ καλείται ακολουθία του X και συμβολίζεται με $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ ή $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, όπου $a_n = a(n)$.

Μια ακολουθία $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ καλείται υπακολουθία της ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, αν υπάρχει μία γνησίως αύξουσα απεικόνιση $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $b_n = a_{k(n)}$.

Αντίστροφη απεικόνιση

Αντίστροφη απεικόνιση μιας ένα προς ένα και επί απεικόνισης $f : X \to Y$ είναι η απεικόνιση $g : Y \to X$ που ορίζεται ως εξης:

$$g(y) = f^{-1}[\{y\}] \text{ για κάθε } y \in Y$$

Δηλαδή, αν $f(x) = y$, τότε $g(y) = x$.

Η αντίστροφη απεικόνιση συμβολίζεται με f^{-1}.

Σύνθεση απεικονίσεων.

Για δύο απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ ορίζουμε την σύνθεση τους $g \circ f : X \to Z$ ως εξης:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ για κάθε } x \in X$$

Αξίωμα της Εκλογής (του Zermelo).

Για κάθε σύνολο $\mathfrak{M}$ ανα δύο μη τεμνόμενων μη κενών συνόλων M_t, $t \in T$, υπάρχει μία συνάρτηση $\sigma : \mathfrak{M} \to \bigcup_{t \in T} M_t$, τέτοια ώστε για κάθε $t \in T$ ισχύει

$$f(M_t) = m_t \in M_t$$

2.3 Πληθάριθμος συνόλου.

Θα συμβολολίζουμε με $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Έστω ότι A είναι ένα σύνολο με n στοιχεία, δηλαδή $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Τότε υπάρχει 1-1 και έπι απεικονιση $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$, αρκεί να ορίσουμε $f(a_k) = k$ για κάθε $k = 1, ..., n$.

Δύο σύνολα A και B καλούνται *πληθικά ισοδύναμα* ή ότι *έχουν τον ίδιο πληθάριθμο* ή ότι *έχουν την ίδια ισχή* αν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση $f : A \to B$. Γράφουμε $A \sim B$.

Ένα σύνολο A καλείται *πεπερασμένο* αν είναι κενό ή αν είναι πληθικά ισοδύναμο με ένα σύνολο της μορφής $\{1, 2, ..., n\}$.

Σε κάθε πεπερασμένο σύνολο A μπορούμε να αντιστοιχήσουμε έναν αριθμό που είναι το πλήθος των στοιχείων του, τον αριθμό αυτό το ονομάζουμε πληθάριθμο (ή ισχή) του A.

Έτσι το κενό σύνολο έχει πληθάριθμο 0 και ένα σύνολο με n έχει πληθάριθμο n. Το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένο συνόλου A θα το συμβολίζουμε με $|A|$.

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω M και N δύο μη κενά πεπερασμένα σύνολα,

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M \text{ και } n \in N\} \textit{ και } N^M = \{f | f : M \to N\}$$

Αν $|M| = m$ και $|N| = n$, τότε $|M \times N| = m \cdot n$ και $|N^M| = n^m$.

Κάθε σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο καλείται *άπειρο.*

Ένα σύνολο A καλείται *αριθμήσιμο* αν είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Άν ενα σύνολο A αριθμήσιμο και άπειρο, τότε τα στοιχεία του μπορούν να παρασταθούν με μιά άπειρη ακολουθία

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Παραδείγματα 2.3.1.

1. Το σύνολο των άρτιων (περιττών) φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

   Πράγματι, η απεικόνιση $f : 2n \to n$ $(f : 2n - 1 \to n)$ είναι ένα-προς ένα και επί.

2. Το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

   Πράγματι, η απεικόνιση $f : -n \to n$ είναι ένα-προς ένα και επί.

3. Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών του διαστήματος $(0, 1)$ είναι μη αριθμήσιμο.

   Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, το $(0, 1)$ είναι αριθμήσιμο. Τότε τα στοιχεία του $(0, 1)$ μπορούν να παρασταθουν με μιά ακολουθία

   $$x_1, x_2, ..., x_k, ...$$

   Κάθε x_k μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σε μορφή ενός άπειρου δεκαδικού κλάσματος $0, x_k^1 x_k^2 ... x_k^n ...$, το οποίο δεν είναι περιοδικό με περίοδο 9:

   $$\begin{array}{l} x_1 = 0, x_1^1 x_1^2 x_1^3 ... x_1^n ... \\ x_2 = 0, x_2^1 x_2^2 x_2^3 ... x_2^n ... \\ \text{.........................} \\ x_k = 0, x_k^1 x_k^2 x_k^3 ... x_k^n ... \\ \text{.........................} \end{array}$$

Για να καταλήξουμε σε άτοπο, αρκεί να ορίσουμε έναν αριθμό $b \in (0,1)$ που δεν ισούται με κανένα από τα x_k.

Θέτουμε

$$\begin{cases} b_n = 1, & \text{αν } x_n^n \neq 1 \\ b_n = 2, & \text{αν } x_n^n = 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε τον αριθμό $b = 0, b_1, b_2, ..., b_n, ... \in (0,1)$.

Αν $0, b_1, b_2, ..., b_n, ... = x_k = 0, x_k^1 x_k^2 ... x_k^n ...$, τότε $b_n = x_k^n$ για κάθε n. Οπότε $b_k = x_k^k$. Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\begin{cases} b_k = 1, & \text{αν } x_k^k \neq 1 \\ b_k = 2, & \text{αν } x_k^k = 1 \end{cases}$$

Οπότε $b_k \neq x_k^k$, που είναι άτοπο. .

4. Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών οποιουδήποτε διαστήματος (a,b) είναι μη αριθμήσιμο.

   Άρκεί να δείξουμε ότι (a,b) είναι πληθικά ισοδύναμο με το μη αριθμήσιμο $(0,1)$. Πράγματι, η $f : (0,1) \to (a,b)$ που ορίζεται από τον τύπο

   $$f(x) = (b-a)x + a$$

   είναι 1-1 και επί.

5. Το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμο.

   Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ που ορίζεται από τον τύπο $f(x) = \arctan x$ είναι 1-1 και επί, άρα το $\mathbb{R}$ είναι πληθικά ισοδύναμο με το μη αριθμήσιμο σύνολο $(-1,1)$.

Θεώρημα 2.3.2. *Κάθε υποσύνολο ένος αριθμησίμου συνόλο έιναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ Ένα αριθμήσιμο σύνολο και $B \subseteq A$.

Έστω b_1 είναι το πρώτο στοιχείο της $x_1, ..., x_n, ...$ που ανήκει στο B, ..., b_n είναι το n στοιχείο της $x_1, ..., x_n, ...$ που ανήκει στο B κ.τ.λ..

Αν μετά από n βήματα η $x_1, ..., x_n, ...$ δεν θα περιέχει άλλο στοιχείο του B, τότε $B = \{b_1, ..., b_n\}$ είναι πεπερασμένο, διαφορετικά $B = \{b_1, ..., b_n, ...\}$ είναι αριθμήσιμο.

□

Θεώρημα 2.3.3. *Κάθε διαμέριση ένος αριθμησίμου συνόλου έίναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω A ένα αριθμήσιμο σύνολο και D μια διαμέριση του A.

Σε κάθε $d \in D$ αντιστοιχούμε ένα στοιχείο του $a_d \in d$.

Το σύνολο $A' = \{a_d : d \in D\}$ είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου A.

Έστω $f : D \to A'$ η απεικόνιση για την οποία $f(d) = a_d$. Η f είναι 1-1 και επί. Συνεπώς D είναι πληθικά ισοδύναμο με το A', άρα D είναι αριθμήσιμο.

□

Θεώρημα 2.3.4. *Αν $B = f(A)$ και το σύνολο A έίναι αριθμήσιμο, τότε και το σύνολο B έίναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $f_A = \{f^{-1}(b)|b \in B$ και $g : B \to f_A$ ορίζεται από τη σχέση $g(b) = f^{-1}(b)$. Επειδή f_A είναι διαμέριση του αριθμήσιμου συνόλου A, f_A είναι αριθμήσιμο. Ομως g είναι ένα προς ένα και επί, άρα $B \sim f_A$

□

Θεώρημα 2.3.5. *Η ένωση των στοιχείων μιας αριθμήσιμης οικογένειας αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε πεπεραμένο σύνολο είναι υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου, αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα για μια άπειρη αριθμήσιμη οικογένεια άπειρων αριθμήσιμων συνόλων.

Έστω $\{A_1, ..., A_n, ...\}$ μια άπειρη και αριθμίσιμη οικογένεια συνόλων το καθένα από τα οποία είναι άπειρο και αριθμήσιμο, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ...\}\\
&A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ...\}\\
&A_3 = \{a_{31}, a_{32}, ..., a_{3n}, ...\}\\
&......................................\\
&A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}, ...\}\\
&......................................
\end{aligned}$$

Αν τα στοιχεία της $\{A_1, ..., A_n, ...\}$ δεν τέμνονται ανά δύο, τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ μπορεί να αριθμηθεί ως εξής:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, ...$$

Αν κάποια από τα στοιχεία της $\{A_1, ..., A_n, ...\}$ τέμνονται, τότε παίρνουμε την αριθμήσιμη οικογένεια αριθμησίμων συνόλων $\{B_1, ..., B_n, ...\}$, όπου

$$B_1 = A_1, \ , B_1 = A_2 \setminus B_1, \setminus, ..., B_n = A_n \setminus (B_1 \cup ... \cup B_n), ...$$

Επειδή τα στοιχεία της $\{B_1, ..., B_n, ...\}$ δεν τέμνονται ανά δύο, η ένωση τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Όμως $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο.

□

Παραδείγματα 2.3.6.

1. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ όλων των ακεραίων αριθμών είναι αριθμήσιμο.
   Θέτουμε $Z^- = \{z \in Z : z < 0\}$, τότε Z^- αριθμήσιμο.
   Άρα $Z = Z^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμησίμων συνόλων.

2. Το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.
   Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε
   $$P_n = \{(p, q) \in \mathbb{N} : p + q = n + 1\}$$
   Τότε $P_1 = \{(1, 1)\}$, $P_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$,..., P_n περιλαμβάνει n στοιχεία
   $$(1, n), (2, n-1), (3, n-2), ..., (n, 1)$$
   Προφανώς $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμήσιμης οικογένειας αριθμησίμων συνόλων.

3. Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

   Πράγματι, έστω Q το σύνολο των ρητών αριθμών, $Q^+ = \{q \in Q : q > 0\}$ και $Q^- = \{q \in Q : q < 0\}$.

   Θεωρούμε το σύνολο

   $$Q' = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \neq 0 \text{ και } n \neq 0 \text{ είναι πρώτοι μεταξύ τους}\}$$

   Επειδή $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο και $Q' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, το σύνολο Q' είναι αριθμήσιμο. Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχεία μεταξύ του Q^+ και των κλασμάτων $\frac{m}{n}$, όπου $m \neq 0$ και $n \neq 0$ είναι δύο φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους. Σύνεπώς Q^+ είναι αριθμήσιμο.

   Το σύνολο Q^-είναι αριθμήσιμο ως πληθικά ισοδύναμο με το αριθμήσιμο σύνολο Q^+. Άρα $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμήσιμων συνόλων.

Θεώρημα 2.3.7. *Το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων ένος αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω A ένα αριμήσιμο σύνολο. Επειδή το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, το σύνολο $A^2 = A \times A$ όλων των ζευγών των στοιχείων του A είναι αριθμήσιμο.

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο A^n όλων των n-αδων του A είναι αριθμήσιμο.

Για κάθε $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ θέτουμε $P(a_1, ..., a_n) = \{(a_1, ..., a_n, a) : a \in A\}$.

Επειδή το A είναι αριθμήσιμο, το $P(a_1, ..., a_n)$ είναι αριθμήσιμο.

Έχουμε $A^{n+1} = \bigcup\{P(a_1, ..., a_n) : (a_1, ..., a_n) \in A^n\}$.

Επομένως A^{n+1} είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμισίμου πλήθους αριθμησίμων συνόλων.

Άρα και $A = \{\emptyset\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n)$ είναι αριθμήσιμο. □

Παραδείγματα 2.3.8.

1. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων

   $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_0$$

   με ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

   Άφου τα πολυώνυμα αυτά αντιστοιχούν στα πεπερασμένα υποσύνολα

   $$\{a_0, a_1, ..., a_n\}$$

   του συνόλου των ρητών αριθμών.

2. Το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών (των ριζών των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές) είναι αριθμήσιμο.

   Πράγματι, κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διφορετικές ρίζες. Επειδή το σύνολο όλων των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο, το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 2.3.9. *Για κάθε σύνολο X το δυναμοσύνολο $P(X)$ είναι πληθικά ισοδύναμο με το σύνολο $\{0,1\}^X$.*

Απόδειξη. Σε κάθε $A \subseteq X$ αντιστοιχούμε μια απεικόνιση $f_A : X \to \{0,1\}$ ως εξής:

$$\begin{cases} f_A(x) = 0, & \text{αν } x \in A \\ f_A(x) = 1, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Έστω $f : P(X) \to \{0,1\}^X$ η απεικόνιση για την οποία $f(A) = f_A$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι επί. Έστω $g \in \{0,1\}^X$. Θέτουμε $A = g^{-1}(0)$. Τότε

$$\begin{cases} g(x) = 0, & \text{αν } x \in A \\ g(x) = 1, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Άρα, $g = f_A = f(A)$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1. Έστω $A_1, A_2 \in P(X)$ και $A_1 \neq A_2$. Επειδή τα υποσύνολα A_1 και A_2 του X δεν είναι ίσα, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε ή $x \in A_1$ και $x \notin A_2$ ή $x \notin A_1$ και $x \in A_2$. Συνεπώς ή $f_{A_1}(x) = 0$ και $f_{A_2}(x) = 1$ ή $f_{A_1}(x) = 1$ και $f_{A_2}(x) = 0$. Άρα $f_{A_1} \neq f_{A_2}$, δηλαδή $f(A_1) \neq f(A_2)$.

□

Πόρισμα 2.3.10. *Αν ένα πεπερασμένο σύνολο X έχει n στοιχεία, τότε το δυναμο- σύνολο $P(X)$ έχει 2^n στοιχεία.*

Απόδειξη. $P(X)$ είναι πληθικά ισοδύναμο με το $\{0,1\}^X$. Επειδή $|X| = n$ και $|\{0,1\}| = 2$, προκύπτει ότι $|P(X)| = |\{0,1\}^X| = 2^n$. □

Θεώρημα του Schroeder και Bernstein 2.3.1. *Έστω A και B δύο σύνολα.*

Αν το A είναι ισοδύναμο με κάποιο υποσύνολο του B και B είναι ισοδύναμο με κάποιο υποσύνολο του A, τότε $A \sim B$.

Θα λέμε ότι ο πληθαριθμος του συνόλου A είναι μικρότερος ή ίσος του πληθάριθμου του συνόλου B αν A είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του B.

Θα λέμε ότι ο πληθαριθμος του συνόλου A είναι μικρότερος του πληθάριθμου του συνόλου B αν A είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του B και τα σύνολα A και B δεν είναι ισοδύναμα.

Θεώρημα 2.3.11. *Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Απόδειξη. Έστω A ένα άπειρο σύνολο και $a_1 \in A$. Επειδή A είναι άπειρο, υπάρχει $a_2 \in A$, τέτοιο ώστε $a_2 \neq a_1$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει n στοιχεία $a_1, ..., a_n$ του A διαφορετικά μεταξύ τους. Επειδή A είναι άπειρο, $A \neq \{a_1, ..., a_n\}$, άρα υπάρχει $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, ..., a_n\}$.

Το σύνολο $A' = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του A.

□

Πόρισμα 2.3.12. *Ο πληθάριθμος του $\mathbb{N}$ είναι μικρότερος ή ίσος του πληθάριθμου οποιουδήποτε άπειρου συνόλου.*

Θεώρημα 2.3.13. *Έστω X και Y δύο μη κενά σύνολα και Y έχει περισσότερα του ενός στοιχεία. Τοτε ο πληθάριθμος του X είναι μικρότερος του πληθάριθμου του Y^X.*

Θεώρημα 2.3.14. *Ο πληθάριθμος κάθε συνόλου X είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο του δυναμοσυνόλου του $P(X)$.*

Απόδειξη. **1ος τρόπος.** Μπορούμε να ορίσουμε μια ένα προς ένα απεικόνιση $f : X \to P(X)$, θέτοντας $f(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$. Άρα ο πληθάριθμος του X είναι μικρότερος ή ίσος του πληθάριθμου του $P(X)$.

Ας υποθέσουμε ότι X και $P(X)$ είναι πληθικά ισοδύναμα. Τότε υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $g : X \to P(X)$.

Θέτουμε $\tilde{X} = \{x \in X : x \notin g(x)\}$. Τότε $\tilde{X} \subseteq X$, άρα $\tilde{X} \in P(X)$. Επειδή g είναι επί $\tilde{X} = g(x)$.

Αν $x \in \tilde{X}$, τότε $x \notin g(X)$, άρα $x \notin \tilde{X}$, που είναι άτοπο.

Αν $x \notin \tilde{X} = g(x)$, τότε $x \notin g(x)$, άρα $x \in \tilde{X}$, που είναι άτοπο.

2ος τρόπος. Ο πληθάριθμος του X είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο του $\{0,1\}^X$. Το σύνολο $\{0,1\}^X$ έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το $P(X)$. Άρα ο πληθάριθμος του X είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο του $P(X)$.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Μετρικοί χώροι.

3.1 Ορισμός μετρικού χώρου.

Ορισμός 3.1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

Μία απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ καλείται *μετρική επί του* X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες (αξιώματα της μετρικής):

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (**αξίωμα ταύτισης**)

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (**αξίωμα συμμετρίας**)

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (**ανισότητα του τριγώνου**).

Αν d είναι μετρική επί του X, τότε το ζεύγος (X, d) καλείται *μετρικός χώρος*.

Παραδείγματα 3.1.2.

Να αποδειχθεί ότι ή απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι μετρική επί του X αν:

1. X είναι ένα μη κενό σύνολο και $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$

   Η μετρική d που ορίστηκε παραπάνω καλείται *διακριτή μετρική*.

2. $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ και $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, όπου

$$f(-\infty) = -1, \ f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \text{ αν } x \in \mathbb{R}, \ f(\infty) = 1$$

3. $X = \mathbb{R}^n$ και για $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

   (α΄) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d_n(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

   (β΄) $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$

   (γ΄) $d(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{|y_i - x_i| : 1 \leq i \leq n\}$

   (δ΄) $d(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$

Από την **ανισότητα του Minkowsky:**

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ a_i, b_i \in \mathbb{R} \ p \geq 1$$

4. $X = \{\bar{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του $\mathbb{R}$ τετοια ώστε $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^2 < \infty\}$ και

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i)^2}$$

   Ο (X,d) καλείται χώρος Hilbert και συμβολολίζεται ℓ^2.

5. $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}\}$

$$d(x,y) = \sup\{|y_i - x_i| : i = 1, 2, ...\}$$

6. $X = \mathcal{C}_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής $\}$

   (α′) $d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$

   (β′) $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

   (γ′) $d(f,g) = \left|\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\right|^{\frac{1}{2}}$

7. Έστω A ένα σύνολο και $X = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του $A\}$.

   Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$

   Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, τότε ορίζουμε $d(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$.

   Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, τότε ορίζουμε

$$d(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) = \frac{1}{m},$$

   όπου $m = \min\{k : a_k \neq b_k\}$.

   Ο μετρικός χώρος (X,d) καλείται χώρος του Baire και συμβολίζεται με B_A.

Πρόταση 3.1.3. *Μία απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι μετρική αν και μόνον αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,z) \leq d(y,x) + d(y,z)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$

3.2 Ψευδομετρικοί χώροι.

Ορισμός 3.2.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

Μία απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ καλείται *ψευδομετρική επί του* X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες (αξιώματα της μετρικής):

(i) $d(x, x) = 0$ για κάθε $x \in X$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (**αξίωμα συμμετρίας**),

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (**ανισότητα του τριγώνου**).

Αν d είναι ψευδομετρική επί του X, τότε το ζεύγος (X, d) καλείται *ψευδομετρικός χώρος*.

Πρόταση 3.2.2. *Κάθε μετρική είναι ψευδομετρική.*

Παράδειγμα 3.2.3.

Έστω $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R}\}$ και

$$d(x, y) = \lim_{n \to \infty} |y_n - x_n|.$$

Η d είναι ψευδομετρική και δεν είναι μετρική.

3.3 Απόσταση μεταξύ δύο συνόλων στο μετρικό χώρο.

Ορισμός 3.3.1. Απόσταση μεταξύ των δύο υποσυνόλων A και B ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι ο αριθμός

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Απόσταση ενός σημείου x από ένα σύνολο A είναι ο αριθμός

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Πρόταση 3.3.2. *Αν X μετρικός χώρος $x, y \in X$ και $A \subseteq X$, τότε*

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

Απόδειξη. Έστω $a \in A$. Από τον ορισμό της απόστασης $d(x, A)$

$$d(x, A) \leq d(x, a) \tag{3.1}$$

Από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \tag{3.2}$$

Από τις σχέσεις (3.1) και (3.2) έπεται ότι για κάθε $a \in A$

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a) \tag{3.3}$$

Επομένως για κάθε $a \in A$

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

Συνεπώς

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf\{d(y, a) : a \in A\} = d(y, A)$$

Άρα,

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

□

3.4 Σφαίρες μετρικού χώρου

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε την *ανοικτη σφαίρα* (ε-γειτονιά) με κέντρο x και ακτίνα ε

$$S(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

και την *κλειστή σφαίρα* με κέντρο x και ακτίνα ε

$$S[x,\varepsilon] = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

Επειδή $d(x,x) = 0 < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει: $x \in S(x,\varepsilon)$ και $x \in S[x,\varepsilon]$.
Αν $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, τότε $S(x,\varepsilon_1) \subseteq S(x,\varepsilon_2)$

Παραδείγματα 3.4.1.

1. Θεωρούμε επί του $\mathbb{R}^2$ τις εξής μετρικές:

   $$\sigma(M,N) = |x_M - x_N| + |y_M - y_N|$$
   $$d(M,N) = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$
   $$\mu(M,N) = \max\{|x_M - x_N|, |y_M - y_N|\}, \text{ όπου } M = (x_M, y_M) \text{ και } N = (x_N, y_N).$$

   Για κάθε $M \in \mathbb{R}^2$ και για κάθε $\varepsilon > 0$: $S_\sigma(M,\varepsilon) \subseteq S_d(M,\varepsilon) \subseteq S_\mu(M,\varepsilon)$

2. Έστω (X,d) μετρικός χώρος με διακριτή μετρική d και $x \in X$.
   Αν $\varepsilon \leq 1$, τότε $S(x,\varepsilon) = \{x\}$.
   Αν $\varepsilon > 1$, τότε $S(x,\varepsilon) = X$.

3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$.
   Για κάθε $a \in S(x,\varepsilon)$ υπάρχει $\varepsilon_a > 0$ τέτοιο ώστε $S(a,\varepsilon_a) \subseteq S(x,\varepsilon)$.

Πρόταση 3.4.2. *Για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία x και y ενός μετρικού χώρου X υπάρχουν σφαίρες $S(x,\varepsilon)$ και $S(y,\varepsilon)$ τέτοιες ώστε $S(x,\varepsilon) \cap S(y,\varepsilon) = \emptyset$.*

3.5 Ανοικτα και κλειστά σύνολα.

Ορισμός 3.5.1. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $G \subseteq X$ ένα υποσύνολο.

G καλείται αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $S(x,\varepsilon) \subseteq G$.

G καλείται κλειστό αν το συμπλήρωμα του $X \setminus G$ είναι ανοικτό.

Παραδείγματα 3.5.2.

1. Σε κάθε μετρικό χώρο X τα σύνολα X και $\emptyset$ είναι ανοικτα και κλειστά συγχρόνως.

2. Σε κάθε μετρικό χώρο οι ανοικτές σφαίρες $S(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτα σύνολα και οι κλειστές σφαίρες $S[x,\varepsilon]$ είναι κλειστα σύνολα.

3. Αν d είναι διακριτή μετρική επί του συνόλου X, τότε κάθε υποσύνολο του (X,d) είναι ανοικτό και κλειστό.

4. Αν (X, d) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, τότε το σύνολο
$$S(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} \text{ είναι ανοικτό.}$$
5. Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό στο μετρικό χώρο X για κάθε $x \in X$.
6. Για κάθε κλειστό υποσύνολο F ενός μετρικού χώρου X και για κάθε $x \in X \setminus F$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα O_x και O_F τέτοια ώστε
$$x \in O_x, F \subseteq O_F \text{ και } O_x \cap O_F = \emptyset$$

Θεώρημα 3.5.3. *Η ένωση των στοιχείων οποιασδήποτε οικογένειας $\{G_a\}_{a \in A}$ ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Το Θεώρημα ισχύει στην περίπτωση που $\bigcup_{a \in A} G_a = \emptyset$, αφού το κενό είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω ότι $\bigcup_{a \in A} G_a \neq \emptyset$ και $x \in \bigcup_{a \in A} G_a$. Τότε $x \in G_a$ για κάποιο $a \in A$.

Επειδή G_a είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $S(x, \varepsilon_x) \subseteq G_a$. Όμως $G_a \subseteq \bigcup_{a \in A} G_a$. Επομένως $S(x, \varepsilon_x) \subseteq \bigcup_{a \in A} G_a$.

Συνεπώς το σύνολο $\bigcup_{a \in A} G_a$ είναι ανοικτό. □

Θεώρημα 3.5.4. *Η τομή των στοιχείων οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας $\{G_1, ..., G_n\}$ ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Το Θεώρημα ισχύει στην περίπτωση που $\bigcap_{i=1}^{n} G_n = \emptyset$, αφού το κενό είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω ότι $\bigcap_{i=1}^{n} G_n \neq \emptyset$ και $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_n$. Τότε $x \in G_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Επειδή κάθε G_i είναι ανοικτό, για κάθε $i = 1, ..., n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ τέτοιο ώστε $S(x, \varepsilon_i) \subseteq G_i$. Έστω $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$. Τότε
$$S(x, \varepsilon) \subseteq S(x, \varepsilon_1) \cap ... \cap S(x, \varepsilon_n) \subseteq G_1 \cap ... \cap G_n$$
Συνεπώς το σύνολο $\bigcap_{i=1}^{n} G_n$ είναι ανοικτό. □

Θεώρημα 3.5.5. *Η τομή των στοιχείων οποιασδήποτε οικογένειας $\{F_a\}_{a \in A}$ κλειστών συνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus \bigcap\limits_{a \in A} F_a$ είναι ανοικτό.

Όμως
$$X \setminus \bigcap_{a \in A} F_a = \bigcup_{a \in A} (X \setminus F_a)$$
Επειδή από την υπόθεση κάθε F_a είναι κλειστό, από τον ορισμό του κλειστού συνόλου έπεται ότι για κάθε $a \in A$ το σύνολο $X \setminus F_a$ είναι ανοικτό. Επομένως, από το Θεώρημα 3.5.3, το σύνολο $\bigcup\limits_{a \in A} (X \setminus F_a)$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων. □

Θεώρημα 3.5.6. *Η ένωση των στοιχείων οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας $\{F_1, ..., F_n\}$ κλειστών συνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι ανοικτό.

Όμως

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$$

Επειδή από την υπόθεση κάθε F_i είναι κλειστό, από τον ορισμό του κλειστού συνόλου έπεται ότι για κάθε i το σύνολο $X \setminus F_i$ είναι ανοικτό. Επομένως, από το Θεώρημα 3.5.4, το σύνολο $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$ είναι ανοικτό ως τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων. □

Θεώρημα 3.5.7. *Αν το σύνολο F είναι κλειστό και το σύνολο G είναι ανοικτό σε ένα μετρικό χώρο X, τότε*

(i) *το σύνολο $G \setminus F$ είναι ανοικτό,*

(ii) *το σύνολο $F \setminus G$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. (i) Επειδή το F είναι κλειστό, το συμπληρωμά του $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

Επομένως $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$ είναι ανοικτό ως τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων από το Θεώρημα 3.5.4.

(ii) Αποδεικνύεται όμοια.

□

Θεώρημα 3.5.8. *Για οποιαδήποτε κλειστά και ξένα υποσύνολα F_1 και F_2 ένος μετρικού χώρου (X, d) υπάρχουν ανοικτά σύνολα O_1 και O_2 τέτοια ώστε*

$$F_1 \subseteq O_1, \ F_2 \subseteq O_2 \text{ και } O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

Απόδειξη. Επειδή F_1 είναι κλειστό και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, το σύνολο $X \setminus F_1$ είναι ανοικτό και $F_2 \subseteq X \setminus F_1$. Επομένως για κάθε $y \in F_2$ υπάρχει $\varepsilon_y > 0$ τέτοιο ώστε $S(y, \varepsilon_y) \subseteq X \setminus F_1$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι το σύνολο $X \setminus F_2$ είναι ανοικτό και $F_1 \subseteq X \setminus F_2$. Επομένως για κάθε $x \in F_1$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $S(x, \varepsilon_x) \subseteq X \setminus F_2$.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$O_1 = \bigcup_{x \in F_1} S\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right), \quad O_2 = \bigcup_{y \in F_2} S\left(y, \frac{\varepsilon_y}{2}\right).$$

Προφανώς $F_1 \subseteq O_1$ και $F_2 \subseteq O_2$.

Θα δείξουμε ότι $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Έστω αντίθετα υπάρχει $z \in O_1 \cap O_2$. Τότε $z \in S\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \cap S\left(y, \frac{\varepsilon_y}{2}\right)$, όπου $x \in F_1$ και $y \in F_2$. Αν $\varepsilon_y > \varepsilon_x$, τότε από την τριγώνική ανισότητα προκύπτει ότι

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \frac{\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x}{2} < \varepsilon_y.$$

Άρα, $x \in S(y, \varepsilon_y) \subseteq X \setminus F_1$, που είναι άτοπο αφού $x \in F_1$.

□

3.6 Διακριτοί μετρικοί χώροι.

Ορισμός 3.6.1. Ένας μετρικός χώρος X καλείται διακριτός αν για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό.

Πρόταση 3.6.2. *Κάθε υποσύνολο ενός διακριτού μετρικού χώρου είναι ανοικτό και κλειστό.*

Παραδείγματα 3.6.3.

1. Κάθε μη κενό σύνολο X με διακριτή μετρική $d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$

   είναι δικριτικός μετρικός χώρος.

2. Το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ με την μετρική $d(n,m) = |n - m|$ είναι διακριτός μετρικός χώρος.

3.7 Σύγκλιση ακολουθίας σημείων μετρικού χώρου.

Ορισμός 3.7.1. Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ σημείων μετρικού χώρου (X,d) συγκλίνει στο σημείο $x \in X$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Γράφουμε τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Προφανώς $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ αν και μόνον αν $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Πρόταση 3.7.2. *Μία ακολουθία ενός μετρικού χώρου μπορεί να συγκλίνει μόνο σε ένα σημείο.*

Απόδειξη. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ του X, η οποία συγκλίνει σε δύο σημεία $x, y \in X$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο $S(x,\varepsilon) \cap S(y,\varepsilon) = \emptyset$.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_x$ να ισχύει $d(x, x_n) < \varepsilon$, δηλαδή $x_n \in S(x,\varepsilon)$.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, υπάρχει $n_y \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_y$ να ισχύει $d(y, x_n) < \varepsilon$, δηλαδή $x_n \in S(y,\varepsilon)$.

Έστω $n > \max\{n_x, n_y\}$. Τότε $x_n \in S(x,\varepsilon) \cap S(y,\varepsilon)$, που είναι άτοπο. □

Πρόταση 3.7.3. *Αν* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *και* $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ *είναι μιά υπακολουθία της* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *τότε* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

3.8 Οριακά σημεία και μεμονωμένα σημεία ενός συνόλου. Παράγωγος συνόλου.

Έστω X ένας μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.

Ορισμός 3.8.1.

- Ένα σημείο $x \in X$ καλείται *οριακό σημείο* (ή *σημείο συσσώρευσης*) του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει
$$A \cap (S(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

- Το σύνολο όλων των οριακών σημείων ενός συνόλου A καλείται *παράγωγος* του A και συμβολίζεται με A^d, δηλαδή
$$A^d = \{x \in X : x \text{ οριακό σημείο του } A\} - \text{ παράγωγος του } A$$

- Ένα σημείο $a \in A$ καλείται *μεμονωμένο σημείο* του A αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $S(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$.

- Το σύνολο όλων των μεμονωμένων σημείων του A είναι το $A \setminus A^d$.

Η παράγωγος του $A \subseteq X$ στο X συμβολίζονται επίσης με A^d_X.

Πρόταση 3.8.2. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και $x \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) x είναι οριακό σημείο του A ($x \in A^d$),

(ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $S(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(iii) $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, όπου $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ και $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι αντίθετα υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $S(x,\varepsilon) \cap A$ είναι πεπερασμένο. Τότε $(S(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \{a_1, ..., a_n\}$. Για $\varepsilon^* = \min\{d(a_1,x), ..., d(a_n,x)\}$ παίρνουμε: $(S(x,\varepsilon^*) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$, που είναι άτοπο επειδή $x \in A^d$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $S(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο, τότε το σύνολο $A \cap S(x,1/n)$ είναι άπειρο για κάθε $n = 1, 2, ...$ Έστω
$a_1 \in A \cap S(x,1)$, $a_1 \neq x$
$a_2 \in A \cap S(x,1/2)$, $a_2 \neq x$, $a_2 \neq a_1$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$a_n \in A \cap S(x,1/n)$, $a_n \neq x$, $a_n \neq a_1$, ..., $a_n \neq a_{n-1}$.
Τότε $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, όπου $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ακολουθία διαφορετικών σημείων του A. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $d(x,a_n) < \varepsilon$ και $x \neq a_n$, δηλαδή $a_n \in S(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$. Άρα, x οριακό σημείο του A.

$\square$

3.9 Περίβλημα, εσωτερικό και σύνορο συνόλου.

Έστω X ένας μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ καλείται

- *εσωτερικό σημείο* του A αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $S(x,\varepsilon) \subseteq A$
- *σημείο επαφής* του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $S(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Στο A αντιστοιχούμε τα εξής σύνολα:

$Int(A) = \{x \in X : x$ εσωτερικό σημείο του $A\}$ - *εσωτερικό (interior)* του A

$Cl(A) = \{x \in X : x$ σημείο επαφής του $A\}$ - *περίβλημα (closure)* του A

$Bd(A) = Cl(A) \cap Cl(X \setminus A)$ - *σύνορο (boundary)* του A

Το εσωτερικό, το περίβλημα και το σύνορο του $A \subseteq X$ στο X συμβολίζονται επίσης με $Int_X(A)$, $Cl_X(A)$ και $Bd_X(A)$, αντίστοιχα. Για το περίβλημα του συνόλου A χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\overline{A}$. Για το εσωτερικό του συνόλου A χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός A°.

Παραδείγματα 3.9.1.

1. Να βρεθούν τα σύνολα A^d, $Int(A)$, $Cl(A)$ και τα μεμονωμένα σημεία του $A \subseteq \mathbb{R}$ αν
   (α΄) A είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$
   (β΄) $A = \mathbb{N}$
   (γ΄) $A = \mathbb{Q}$
   (δ΄) $A = \{1/n : n = 1, 2, ...\} \cup \{0\}$
2. Έστω X ένας μετρικός χώρος $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, τότε
   (α΄) $Cl(S(x,\varepsilon)) \subseteq S[x,\varepsilon]$.
   (β΄) Αν $X = \mathbb{R}$, τότε $Cl(S(x,\varepsilon)) = S[x,\varepsilon]$.

Θεώρημα 3.9.2. *Για οποιοδήποτε υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X ισχύουν τα εξής:*

(i) $Int(A) \subseteq A \subseteq Cl(A)$

(ii) $Int(X \setminus A) = X \setminus Cl(A)$

(iii) $Cl(X \setminus A) = X \setminus Int(A)$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $Int(A) \subseteq A$. Πράγματι,

$$a \in Int(A) \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : a \in S(a,\varepsilon) \subseteq A \Longrightarrow a \in A.$$

Θα δείξουμε ότι $A \subseteq Cl(A)$. Πράγματι,

$$a \in A \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : S(a,\varepsilon) \cap A \supseteq \{a\} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : S(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow a \in Cl(A).$$

(ii) $a \in X \setminus Cl(A) \Longleftrightarrow a \notin Cl(A) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : S(a,\varepsilon) \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : S(a,\varepsilon) \subseteq X \setminus A \Longleftrightarrow a \in Int(X \setminus A)$

(iii) $x \in X \setminus Int(A) \Longleftrightarrow x \notin Int(A) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : S(x,\varepsilon) \nsubseteq A \Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 : S(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in Cl(X \setminus A)$.

□

Θεώρημα 3.9.3. *Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq B \subseteq X$, τότε*

$$Int(A) \subseteq Int(B), \quad Cl(A) \subseteq Cl(B), \quad A^d \subseteq B^d$$

3.9.1 Ιδιότητες του εσωτερικού.

Θεώρημα 3.9.4. *Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$, τότε*

(*i*) *$Int(A)$ είναι ανοικτό,*

(*ii*) *A είναι ανοικτό αν και μόνον αν $A = Int(A)$.*

(*iii*) *$Int(Int(A)) = Int(A)$*

(*iv*) *$Int(A)$ είναι η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων U του X τέτοιων ώστε $U \subseteq A$.*

(*v*) *$Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$*

Απόδειξη. (*i*) Σύμφωνα με τον ορισμό του ανοικτού συνόλου πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $a \in Int(A)$ υπάρχει $S(a, \varepsilon_a) \subseteq Int(A)$. Έστω $a \in Int(A)$, τότε (από τον ορισμό του εσωτερικού σημείου) υπάρχει $S(a, \varepsilon_a) \subseteq A$. Όμως για κάθε $x \in S(a, \varepsilon_a)$ υπάρχει $S(x, \varepsilon_x) \subseteq S(a, \varepsilon_a)$. Συνεπώς για κάθε $x \in S(a, \varepsilon_a)$ υπάρχει $S(x, \varepsilon_x) \subseteq A$. Άρα, $S(a, \varepsilon_a) \subseteq Int(A)$.

(*ii*) Έστω A ανοικτό σύνολο. Όπως και κάθε σύνολο ισχύει ότι $Int(A) \subseteq A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq Int(A)$. Πράγματι, αν $a \in A$ τότε, επειδή A είναι ανοικτό, υπάρχει $S(a, \varepsilon_a) \subseteq A$. Άρα, a είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $a \in Int(A)$.

Αντίστροφα, αν $A = Int(A)$, τότε A είναι ανοικτό από την προηγούμενη ιδιότητα.

(*iii*) Από την ιδιότητα (*ii*) το σύνολο $Int(A)$ είναι ανοικτό. Άρα, από την ιδιότητα (*i*), $Int(Int(A)) = Int(A)$.

(*iv*) Έστω $\mathcal{U}(A) = \{U \subseteq X : U \subseteq A$ και U ανοικτό στο $X\}$.

Θα δείξουμε ότι $Int(A) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(A)} U$.

Επειδή $Int(A)$ είναι ανοικτό και $Int(A) \subseteq A$ ισχύει $Int(A) \in \mathcal{U}(A)$. Άρα

$$Int(A) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}(A)} U.$$

Κάθε $U \in \mathcal{U}(A)$ είναι ανοικτό και $U \subseteq A$. Επομένως $U = Int(U) \subseteq Int(A)$.

Συνεπώς $\bigcup_{U \in \mathcal{U}(A)} U \subseteq Int(A)$.

(*v*) $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B \Longrightarrow Int(A \cap B) \subseteq Int(A)$ και $Int(A \cap B) \subseteq Int(B) \Longrightarrow Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $Int(A) \cap Int(B) \subseteq Int(A \cap B)$.

Έστω $x \in Int(A) \cap Int(B) \Longrightarrow x \in Int(A)$ και $x \in Int(B) \Longrightarrow \exists \varepsilon_A > 0$ και $\exists \varepsilon_B > 0$ τέτοια ώστε $S(x, \varepsilon_A) \subseteq A$ και $S(x, \varepsilon_B) \subseteq B$. Έστω ότι $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$, τότε

$$S(x, \varepsilon) \subseteq S(x, \varepsilon_A) \cap S(x, \varepsilon_B) \subseteq A \cap B.$$

Άρα, $x \in Int(A)$.

$\square$

3.9.2 Ιδιότητες του περιβλήματος.

Θεώρημα 3.9.5. *Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$, τότε*

(i) A *είναι κλειστό αν και μόνον αν* $A = Cl(A)$.

(ii) $Cl(A)$ *είναι κλειστό,*

(iii) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$

(iv) $Cl(A)$ *είναι η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων* F *του* X *τέτοιων ώστε* $A \subseteq F$.

(v) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$

(vi) $Cl(A) = A \cup A^d$.

(vii) $Cl(A) = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

Απόδειξη. (i) A είναι κλειστό $\iff X \setminus A$ είναι ανοικτό $\iff Int(X \setminus A) = X \setminus A \iff X \setminus Cl(A) = X \setminus A \iff A = Cl(A)$.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $X \setminus Cl(A)$ είναι ανοικτό. Πράγματι,

$$X \setminus Cl(A) = Int(X \setminus A).$$

Το εσωτερικό οποιουδήποτε συνόλου είναι ανοικτό, επομένως $Int(X \setminus A)$ και, άρα το $X \setminus Cl(A)$ είναι ανοικτό.

(iii) $Cl(A)$ είναι κλειστό από την ιδιότητα (ii). Άρα, από την ιδιότητα (i), $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$.

(iw) Έστω $\mathcal{F}(A) = \{F \subseteq X : A \subseteq F$ και F κλειστό στο $X\}$.

Θα δείξουμε ότι $Cl(S) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(S)} F$.

Επειδή $Cl(A)$ είναι κλειστό και $A \subseteq Cl(A)$ ισχύει $Cl(A) \in \mathcal{F}(A)$. Άρα $\bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} F \subseteq Cl(A)$.

Κάθε $F \in \mathcal{F}(A)$ είναι κλειστό και $A \subseteq F$. Επομένως $Cl(A) \subseteq Cl(F) = F$.

Συνεπώς

$$Cl(A) \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} F.$$

(v) Αν $x \in Cl(A) \cup Cl(B)$, τότε $x \in Cl(A)$ ή $x \in Cl(B)$. Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ή $S(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ή $S(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Δηλαδή $S(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Άρα $x \in Cl(A \cup B)$.

Αν $x \notin Cl(A) \cup Cl(B)$, τότε $x \notin Cl(A)$ και $x \notin Cl(B)$. Επομένως υπάρχουν $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ τέτοια ώστε $S(x, \varepsilon_A) \cap A = \emptyset$ και $S(x, \varepsilon_B) \cap B = \emptyset$. Συνεπώς για $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ έχουμε

$$S(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) = \emptyset.$$

Άρα $x \notin Cl(A \cup B)$. Άπο τα παραπάνω $Cl(A) \cup Cl(B) = Cl(A \cup B)$

(vi)

(vii) Έστω $x \in X$ και $A \subseteq X$. Τότε

$d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow \inf\{d(x,y) : y \in A\} = 0 \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A$ τέτοιο ώστε $d(x, y < \varepsilon \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A$ τέτοιο ώστε $y \in S(x,\varepsilon) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ισχύει $A \cap S(x,\varepsilon) \neq \emptyset \Longleftrightarrow y \in Cl(A)$.

Άρα, $Cl(A) = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$.

$\square$

3.9.3 Ιδιότητες του συνόρου.

Θεώρημα 3.9.6. *Για οποιοδήποτε υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X ισχύουν τα εξής:*

(i) $Bd(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$

(ii) $Bd(A)$ *είναι κλειστό.*

(iii) $X \setminus Bd(A) = Int(X) \cup Int(X \setminus A)$

(iv) $Cl(A) = Int(A) \cup Bd(A)$

Απόδειξη. (i) $Bd(A) = Cl(A) \cap Cl(X \setminus A) = Cl(A) \cap (X \setminus Int(A)) = Cl(A) \setminus Int(A)$

(ii) $Cl(A)$ είναι κλειστο και $Int(A)$ είναι ανοικτό. Άρα, $Bd(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$ είναι κλειστό.

(iii)

$$X \setminus Bd(A) = X \setminus (Cl(A) \cap Cl(X \setminus A)) = (X \setminus Cl(A)) \cup (X \setminus Cl(X \setminus A)) = Int(X \setminus A) \cup Int(A).$$

(iv) Έστω $x \in Cl(A)$. Τότε ή $x \in Int(A)$ ή $x \notin Int(A)$. Επομένως ή $x \in Int(A)$ ή $x \in Cl(A) \setminus Int(A)$. Άρα, $x \in Int(A) \cup Bd(A)$.

Έστω $x \in Int(A) \cup Bd(A)$. Τότε ή $x \in Int(A) \subseteq Cl(A)$ ή $x \in Bd(A) = Cl(A) \cap Cl(X \setminus A) \subseteq Cl(A)$. Άρα, $Int(A) \cup Bd(A) \subseteq Cl(A)$.

$\square$

3.10 Υπόχωροι μετρικού χώρου.

Ορισμός 3.10.1. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$.

Συμβολίζουμε με d_Y τον περιορισμό της απεικόνισης $d : X \times X \to [0,\infty)$ στο σύνολο $Y \times Y$. Δηλαδή $d_Y = d\big|_{Y\times Y}$: $Y \times Y \to [0,\infty)$. Τότε d_Y είναι μετρική επί του Y.

Ο μετρικός χώρος (Y, d_Y) καλείται *υπόχωρος* του (X,d).

Πρόταση 3.10.2. *Έστω Y ένας υποχώρος ενός μετρικού χώρου X .*

(i) $S_Y(a,\varepsilon) = Y \cap S_X(a,\varepsilon)$ *για κάθε* $a \in Y$, *όπου* $S_Y(a,\varepsilon) = \{y \in Y : d_Y(a,x) \leq \varepsilon\}$ *και* $S_X(a,\varepsilon) = \{x \in X : d(a,x) \leq \varepsilon\}$

(ii) Ένα υποσύνολο G του Y είναι ανοικτό στον υποχώρο Y αν και μόνον αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G^* του X τέτοιο ώστε $G = Y \cap G^*$.

(iii) Ένα υποσύνολο F του Y είναι κλειστό στον υποχώρο Y αν και μόνον αν υπάρχει κλειστό υποσύνολο F^* του X τέτοιο ώστε $F = Y \cap F^*$.

Απόδειξη. (i) $y \in S_Y(a,\varepsilon) \iff y \in Y$ και $d_Y(y,a) < \varepsilon \iff y \in Y$ και $d(y,a) < \varepsilon$ $\iff y \in S_X(a,\varepsilon) \cap Y$

(ii) Αν G είναι ανοικτό στο Y, τότε

$$G = \bigcup_{y\in G} S_Y(y,\epsilon_y) = \bigcup_{y\in G} (S_X(y,\epsilon_y) \cap Y) = Y \cap \left(\bigcup_{y\in G} S_X(y,\epsilon_y)\right) = Y \cap G^*,$$

όπου $G^* = \bigcup_{y\in G} S_X(y,\epsilon_y)$ είναι ανοικτό στο X ως ένωση ανοικτών σφαιρών.

Έστω ότι $G = Y \cap G^*$ και G^* είναι ανοικτό στο X. Αν $y \in G$, τότε $y \in G^*$. Επειδή G^* είναι ανοικτό στο X υπάρχει $S_X(y,\varepsilon_y) \subseteq G^*$. Επομένως $S_Y(a,\varepsilon) = Y \cap S_X(a,\varepsilon) \subseteq Y \cap G^* = G$. Άρα, G είναι ανοικτό στο Y.

(iii) Αν F είναι κλειστό στο Y, τότε $Y \setminus F$ είναι ανοικτό στο Y. Επομένως υπάρχει G^* ανοικτο στο X τέτοιο ώστε $Y \setminus F = Y \cap G^*$. Άρα, $F^* = X \setminus G^*$ είναι κλειστό στο X και

$$F = Y \setminus (Y \cap G^*) = Y \setminus G^* = Y \cap (X \setminus G^*) = Y \cap F^*$$

Έστω ότι $F = Y \cap F^*$ και F^* είναι κλειστό στο X. Τότε $Y \setminus F = Y \setminus F^* = Y \cap (X \setminus F^*)$ και $X \setminus F^*$ είναι ανοικτό στο X. Άρα, από την (ii), το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό στο Y. Άρα, F είναι κλειστό στο Y.

□

Πρόταση 3.10.3. *Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq Y \subseteq X$, τότε*

$$A_Y^d = A_X^d \cap Y \text{ και } Cl_Y(A) = Y \cap Cl_X(A).$$

Παραδείγματα 3.10.3.

1. Αν $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, τότε $Int_{\mathbb{R}^2}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ και $Int_A(A) = A$.
2. Αν $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ και $N = \{(x,y) \in M : 0 < x < 1\}$, τότε $Int_M(N) = N$ και $Int_{\mathbb{R}^2}(N) = \emptyset$.

3. Στον υποχώρο $X = [0,1] \cup \{\frac{3}{2}\}$ του $\mathbb{R}$ είναι $Cl(S(1,1/2)) \neq S[1,1/2]$.
4. Στον υποχώρο $X = (0,1) \cup (1,2)$ του $\mathbb{R}$ τα σύνολα $A = (0,1)$ και $B = (1,2)$ είναι ανοικτά και κλειστά συγχρόνως, $A \cap B = \emptyset$ και $d(A,B) = 0$.
5. Ο υποχώρος S του χώρου Hilbert ℓ^2 που αποτελείται από τα σημεία $\bar{x} = (x_1, x_2, ...) \in \ell^2$ για τα οποία $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^n}$ καλείται *κύβος του Hilbert.*

3.11 Φραγμένα σύνολα και διάμετρος συνόλου.

Ορισμός 3.11.1. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X καλείται φραγμένο αν το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών $\{d(x,y) : x, y \in A\}$ είναι ανώ φραγμένο.

Αν ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι φραγμένο, τότε ο αριθμός

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

καλείται διάμετρος του A.

Πρόταση 3.11.2. *Αν ένα υποσύνολο B ενός μετρικού χώρου X είναι φραγμένο και $A \subseteq B$, τότε $diam(A) \leq diam(B)$.*

Πρόταση 3.11.3. *Αν ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι φραγμένο, τότε*

$$diam(Cl(A)) = diam(A).$$

Απόδειξη. Έστω $x, y \in Cl(A)$ και $d(x,y) > \mathrm{diam}(A)$.

Τότε $d(x,y) = \mathrm{diam}(A) + \varepsilon$, όπου $\varepsilon > 0$. Έστω $x, y \in Cl(A)$. Τότε υπάρχουν $a_1 \in S(x_1, \frac{\varepsilon}{3}) \cap A$ και $a_1 \in S(x_1, \frac{\varepsilon}{3}) \cap A$.

Συνεπώς

$$d(x,y) \leq d(x,a_1) + d(a_1,a_2) + d(a_2,y) = d(a_1,a_2) + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Οπότε

$$d(a_1,a_2) \geq d(x.y) - \frac{2\varepsilon}{3} = \mathrm{diam}(A) + \frac{\varepsilon}{3} > \mathrm{diam}(A),$$

που είναι άτοπο.

Επομένως $d(x,y) \leq \mathrm{diam}(A)$ για κάθε $x, y \in Cl(A)$. Άρα $\mathrm{diam}(Cl(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.

Επεοδή $A \subseteq Cl(A)$, έχουμε $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(Cl(A))$. Άρα $\mathrm{diam}(Cl(A)) = \mathrm{diam}(A)$. □

Παραδείγματα 3.11.4.

1. Στο $\mathbb{R}$ τα διάστηματα της μορφής $[a,b]$, (a,b),$[a,b]$, $(a,b]$ είναι φραγμένα, ένω τα διαστήματα $(-\infty,a)$, (a,∞), $(-\infty,\infty)$ του $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένα.
2. Η διάμετρος του n-διάστατου κύβου $K = [a_1, a_1 + a] \times ... \times [a_n, a_n + a]$ του $\mathbb{R}^n$ με πλευρά $a > 0$ ισούται με $a\sqrt{n}$ $(\mathrm{diam}([a_1, a_1 + a] \times ... \times [a_n, a_n + a]) = a\sqrt{n})$.

   Πράγματι, έστω $(y_1, ..., y_n), (z_1, ...z_n) \in K$. Τότε $y_i, z_i \in [a_i, a_i + a]$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Άρα $|y_i - z_i| \leq a$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Επομένως

   $$d_n((y_1, ..., y_n), (z_1, ...z_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a^2} = a\sqrt{n}$$

   Όμως $(a_1, ..., a_n), (a_1 + a, ..., a_n + a) \in K$ και $d_n((a_1, ..., a_n), (a_1 + a, ..., a_n + a)) = a\sqrt{n}$.

3.12 Πλήρως φραγμένοι μετρικοί χώροι.

Ορισμός 3.12.1. Ένας μετρικός χώρος X καλείται πλήρως φραγμένος αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1, ..., x_n \in X$ τέτοιο ώστε

$$X = S(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup S(x_n, \varepsilon).$$

Κάθε σύνολο $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ για το οποίο $X = S(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup S(x_n, \varepsilon)$ καλείται ε-πλέγμα του X.

Πρόταση 3.12.2. *Ένας μετρικός χώρος X είναι πλήρως φραγμένος αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη κενών συνόλων $A_1, ..., A_n$ τέτοιων ώστε*

$$X = A_1 \cup ... \cup A_n \textit{ και } diam(A_i) < \varepsilon \textit{ για κάθε } i = 1, ..., n. \tag{3.4}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν X είναι πλήρως φραγμένος και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1, ..., x_n \in X$ τέτοιο ώστε $X = S(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup ... \cup S(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$.

Για $A_1 = S(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$, ..., $A_n = S(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$ ισχύουν οι σχέσεις (3.4).

Αντιστρόφως, έστω για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη κενών συνόλων $A_1, ..., A_n$ τέτοιων ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (3.4). Για κάθε $i = 1, ..., n$ επιλέγουμε ένα $x_i \in A_i$. Αν $x \in A_i$, τότε $d(x, x_i) \le \mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon$, επομένως $x \in S(x_i, \varepsilon)$. Άρα,

$$X = S(x_1, 1) \cup ... \cup S(x_n, 1),$$

που σημαίνει ότι ο X είναι πλήρως φραγμένος.

□

Πρόταση 3.12.3. *Κάθε μετρικός υποχώρος ενός πλήρως φραγμένου μετρικού χώρου είναι πλήρως φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω X ένας πλήρως φραγμένος χώρος και $Y \subseteq X$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο X είναι πλήρως φραγμένος, από την Πρόταση 3.12.2, έχουμε ότι

$$X = A_1 \cup ... \cup A_n \text{ και } \mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Επομένως

$$Y = (A_1 \cap Y) \cup ... \cup (A_n \cap Y) \text{ και } \mathrm{diam}(A_i \cap Y)) < \varepsilon \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Άρα, από την Πρόταση 3.12.2, ο Y είναι πλήρως φραγμένος. □

Πρόταση 3.12.4. *Κάθε πλήρως φραγμένος μετρικός χώρος είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μετρικός χώρος X είναι πλήρως φραγμένος. Τότε υπάρχει ένα 1-πλέγμα $\{x_1, ..., x_n\}$ του X, δηλαδή

$$X = S(x_1, 1) \cup ... \cup S(x_n, 1)$$

Έστω $\Delta = \max\{d(x_i, x_j) : i, j = 1, ..., n\}$.

Αν $x, y \in X$, τότε $x \in S(x_i, 1)$ και $y \in S(x_j, 1)$. Συνεπώς

$$d(x, y) \le d(x, x_i) + d(x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \le \Delta + 2$$

Άρα, $\mathrm{diam}(X) < \Delta + 2$, δηλαδή ο X είναι φραγμένος. □

Παραδείγματα 3.12.5.

1. Αν X είναι άπειρο σύνολο και d είναι διακριτή μετρική επί του X, τότε ο μετρικός χώρος (X, d) είναι φραγμένος αλλά δεν είναι πλήρως φραγμένος.

   Πράγματι, $\mathrm{diam}(X) = 1$ ενώ δεν υπάρχει ε-πλέγμα του X για $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2. Κάθε κύβος $[a_1, a_1 + a] \times ... \times [a_n, a_n + a]$ του $\mathbb{R}^n$ με πλευρά $a > 0$ είναι πλήρως φραγμένος.

   Έστω $\varepsilon > 0$. Αν χωρίσουμε κάθε πλευρά $[a_i, a_i + a]$ του κύβου σε m ίσα τμήματα μήκους $\frac{a}{m} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, τότε ο n-διαστατος κύβος θα χωριστεί σε m^n μικρότερους n-διαστατους κύβους με πλευρά $\frac{a}{m}$ και, άρα, με διάμετρο $\frac{a}{m} \cdot \sqrt{n} < \varepsilon$. Συνεπώς, από την Πρόταση 3.12.2, ο κύβος είναι πλήρως φραγμένος.

Πρόταση 3.12.6. *Ένας υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένος αν και μόνον αν είναι πλήρως φραγμένος.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε φραγμένος υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρως φραγμένος.

Έστω A φραγμένος υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ και $\delta = \mathrm{diam}(A)$.

Θεωρούμε $\bar{a} = (a_1, ..., a_n) \in A$. Έχουμε $d_n(\bar{a}, \bar{x}) \leq \delta$ για κάθε $\bar{x} \in A$, συνεπώς

$$A \subseteq S_{\mathbb{R}^n}[\bar{a}, \delta] \subseteq [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \times ... \times [a_n - \delta, a_n + \delta] = K$$

Ο κύβος K είναι πλήρως φραγμένος (Παράδειγμα 3.12.5(2)) και A είναι υποχώρος του K.

Από την Πρόταση 3.12.3 ο A είναι πλήρως φραγμένος. □

3.13 Βάση μετρικού χώρου.

Ορισμός 3.13.1. Μία οικογένεια $\mathfrak{B}$ ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X καλείται βάση του X αν κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι ένωση κάποιων στοιχείων της $\mathfrak{B}$.

Θεώρημα 3.13.2. *Μία οικογένεια ανοικτών συνόλων $\mathfrak{B} = \{O_i\}_{i\in I}$ ενός μετρικού χώρου X είναι βάση του X αν και μόνον αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $O_i \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε*

$$x \in O_i \subseteq G$$

Απόδειξη. Μια οικογένεια $B = \{O_i\}_{i\in I}$ είναι βάση του $X \iff$

για κάθε G ανοικτό στο X υπάρχει $I_G \subseteq I$ τέτοιο ώστε $G = \bigcup_{i\in I_G} O_i \iff$

για κάθε G ανοικτό στο X υπάρχει $I_G \subseteq I$ και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $i_x \in I_G$ τέτοιο ώστε $x \in O_{i_x} \subseteq G \iff$

για κάθε G ανοικτό στο X και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $O_i \in B$ τέτοιο ώστε $x \in O_i \subseteq G$. □

Πόρισμα 3.13.3. *Το σύνολο όλων των ανοικτών σφαιρών ένός μετρικού χώρου X είναι βάση.*

Απόδειξη. Έστω

$$B = \{S(x,\varepsilon) : x \in X \text{ και } \varepsilon > 0\}$$

Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in G$. Τότε $x \in G^\circ$, επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $x \in S(x,\varepsilon) \subseteq G$ Άρα, B είναι βάση του X. □

Πόρισμα 3.13.4. *Το σύνολο όλων των ανοικτών σφαιρών ένός μετρικού χώρου X με ακτίνα ρητό αριθμό είναι βάση.*

Απόδειξη. Έστω

$$B = \{S(x,\varepsilon) : x \in X \text{ και } \varepsilon > 0\},\ B^* = \{S(x,q) : x \in X \text{ και } q \in Q\}$$

Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in G$. Επειδή B είναι βάση, υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $x \in S(x,\varepsilon) \subseteq G$.

Έστω $q \in Q$ και $0 < q < \varepsilon$, τότε $x \in S(x,q) \in S(x,\varepsilon) \subseteq G$

Άρα, B^* είναι βάση του X. □

3.14 Μετρικοί χώροι με αριθμήσιμη βάση.

Ορισμός 3.14.1.

- Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X καλείται *παντού πυκνό* στο X αν $X = Cl(A)$
- Ένας μετρικός χώρος X καλείται *διαχωρίσιμος* αν περιέχει ένα αριθμήσιμο παντού πυκνό υποσύνολο A.
- Ένας μετρικός χώρος X λέγεται ότι *ικανοποιεί το 2ο αξίωμα αριθμησιμότητας* αν ο X έχει αριθμήσιμη βάση.

Ορισμός 3.14.2. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X καλείται *πουθενά πυκνό* στο X όταν
$$Int(Cl(A)) = \emptyset.$$

Θεώρημα 3.14.3. *Ένας μετρικός χώρος X έχει αριθμήσιμη βάση αν και μόνον αν περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο παντού πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αριθμήσίμη βάση του X και $x_n \in G_n$.

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $P = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ είναι παντού πυκνό στο X. Αρκεί να δείξουμε ότι $X \subseteq Cl(P)$.

Έστω $x \in X$. Επειδή $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση του X για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει G_n τέτοιο ώστε $x \in G_n \subseteq S(x, \varepsilon)$. Επειδή $x_n \in G_n$, προκύπτει ότι $x_n \in S(x, \varepsilon)$. Άρα $P \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$, που σημαίνει ότι $x \in Cl(P)$.

Αντίστροφα, έστω $P = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ είναι παντού πυκνό στο X.

Θα δείξουμε ότι η αριθμήσιμη οικογένεια $\{S(x_n, \frac{1}{m})\}_{n,m=1}^{\infty}$ είναι βάση του X.

Έστω G ανοικτό στο X και $x \in G$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq G$. Έστω $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Επειδή P είναι παντού πυκνό υπάρχει $x_n \in P \cap S(x, \frac{1}{2m})$.

Άρα $x \in S(x_n, \frac{1}{2m}) \subseteq S(x, \varepsilon) \subseteq G$.

□

Πόρισμα 3.14.4. *Ένας μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν ο X ικανοποιεί το 2^o αξίωμα αριθμησιμότητας.*

Παραδείγματα 3.14.5.

1. Το αριθμήσιμο σύνολο $\mathbb{Q}^n$ είναι παντου πυκνό στο $\mathbb{R}^n$ με την μετρική
$$d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$
Αρκεί να δείξουμε ότι $S(\overline{x}, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\mathbb{R}^n \subseteq Cl(\mathbb{Q}^n)$. Οπότε, αφού $Cl(\mathbb{Q}^n) \subseteq \mathbb{R}^n$, προκύπτει ότι $Cl(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\mathbb{Q}^n$ είναι παντου πυκνό στο $\mathbb{R}^n$.
Έστω $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, ..., n$ υπάρχει $r_i \in \mathbb{Q} \cap \left(x_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ x_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$.
Για το σημείο $\overline{r} = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{Q}^n$ έχουμε
$$d_n(\overline{r}, \overline{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r_i - x_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2} = \varepsilon.$$
Επομένως $\overline{r} \in S(\overline{x}, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n$. ·Αρα, $S(\overline{x}, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$.

2. Ένας μη αριθμήσιμος διακριτικός μετρικός χώρος δεν είναι διαχωρίσιμος.

3. Το αριθμήσιμο σύνολο $\mathbb{Q}^n$ είναι παντου πυκνό στο $\mathbb{R}^n$ με την μετρική
$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{|y_i - x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

4. Ο μετρικός χώρος (X, d), όπου

   $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}\}$ και

   $d(x, y) = \sup\{|y_i - x_i| : i = 1, 2, ...\}$ δεν έχει αριθμήσιμη βάση.

5. Στον χώρο του Hilbert $\ell_2 = (X, d)$, όπου

   $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ τετοια ώστε $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^2 < \infty\}$ και $d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i)^2}$, το αριθμήσιμο σύνολο $A = \{(r_1, ..., r_n, 0, 0, ...) : r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}\}$ είναι παντού πυκνό.

6. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{C}_{[a,b]}, d)$, όπου $\mathcal{C} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής $\}$ και $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ είναι διαχωρίσιμος.

Θεώρημα 3.14.6. *Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση των στοιχείων μιάς αριθμήσιμης οικογένεια ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ που δεν τέμνονται ανά δύο.*

Απόδειξη. Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in G$ θέτουμε

$$m_x = \begin{cases} \sup\{z \in \mathbb{R} \setminus G : z < x\}, & \text{αν το σύνολο } \{z \in \mathbb{R} \setminus G : z < x\} \text{ είναι κάτω φραγμένο·} \\ -\infty, & \text{αν το σύνολο } \{z \in \mathbb{R} \setminus G : z < x\} \text{ δεν είναι κάτω φραγμένο.} \end{cases}$$

και

$$M_x = \begin{cases} \inf\{z \in \mathbb{R} \setminus G : z > x\}, & \text{αν το σύνολο } \{z \in \mathbb{R} \setminus G : z > x\} \text{ είναι άνω φραγμένο·} \\ \infty, & \text{αν το σύνολο } \{z \in \mathbb{R} \setminus G : z > x\} \text{ δεν είναι άνω φραγμένο.} \end{cases}$$

Τότε $m_x \leq x \leq M_x$ και (m_x, M_x) είναι ανοικτό υποσύνολο του G.

Επειδή το $\mathbb{R} \setminus G$ είναι κλειστό, $m_x, M_x \in \mathbb{R} \setminus G$, Άρα, $x \in (m_x, M_x)$.

Έστω $x, y \in G$ και $x < y$.

Αν $(x, y) \subseteq G$, τότε $m_x = m_y$ και $M_x = M_y$, άρα $(m_x, M_x) = (m_y, M_y)$.

Αν $(x, y) \nsubseteq G$, τότε υπάρχει $z \in \mathbb{R} \setminus G \neq \emptyset$, τέτοιο ώστε $x < z < y$.

Επομένως $x < M_x \leq z \leq m_y < y$. Άρα, $(m_x, M_x) \cap (m_y, M_y) = \emptyset$.

Συνεπώς $G = \bigcup_{x \in G}(m_x, M_x)$, όπου $\{(m_x, M_x)\}_{x \in G}$ είναι οικογένεια ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ που ανά δύο δεν τέμνονται είτε συμπίπτουν. Αν η $\{(m_x, M_x)\}_{x \in G}$ ήταν μη αριθμήσιμη, τότε επιλέγοντας από κάθε (m_x, M_x) έναν ρητό, θα παίρναμε ένα μη αριθμήσιμο σύνολο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

□

Ορισμός 3.14.7.

- Μιά οικογένεια υποσυνόλων $\{O_i\}_{i\in I}$ ενός μετρικού χώρου X καλείται κάλυμμα του X αν $X = \bigcup_{i\in I} O_i$.
- Κάθε κάλυμμα του μετρικού χώρου X που αποτελείται ανοικτα υποσύνολα του X καλείται *ανοικτό κάλυμμα*.
- Κάθε υποοικογένεια δοθέντος καλύμματος του X η οποία είναι επίσης κάλύμμα του X καλείται *υποκάλυμμα* του δοθέντος καλύμματος.

Θεώρημα 3.14.8. *Κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός μετρικού χώρου με αριθμήσιμη βάση περιέχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτο κάλυμμα του X και έστω $B = \{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αριθμήσιμη βάση του X.

Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει O_i και υπάρχει $G \in B$ τέτοιο ώστε

$$x \in G \subseteq O_i$$

Θέτουμε

$$B^* = \{G \in B : G \subseteq O_i \in \mathcal{O}\}$$

Τότε το σύνολο B^* είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου B.

Για κάθε $G \in B^*$ επιλέγουμε ένα $O_{i(G)} \in \mathcal{O}$ τέτοιο ώστε $G \subseteq O_{i(G)}$.

Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $G \in B^*$ τέτοιο ώστε $x \in G$.

Επομένως

$$X = \bigcup_{x\in X}\{x\} \subseteq \bigcup_{G\in B^*} G \subseteq \bigcup_{G\in B^*} O_{i(G)} = X$$

Άρα, $\{O_{i(G)}\}_{G\in B^*}$ είναι αριθμήσιμο υποκάλυμμα του $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$. □

3.15 Τοπολογικοί χώροι.

Ορισμός 3.15.1. Μια οικογένεια υποσύνόλοων T ενός συνόλου X καλείται τοπολογία αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\emptyset, X \in T$
2. $U_1, U_2 \in T \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in T$
3. $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq T \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$

Αν T είναι τοπολογία του X, τότε το ζεύγος (X, T) καλείται τοπολογικός χώρος.

Τα στοιχεία της τοπολογίας καλούνται ανοικτά σύνολα.

Παραδείγματα 3.15.2.

1. $T' = \{\emptyset, X\}$ είναι τοπολογία επί του X, η οποία καλείται τετριμμένη.
2. $T'' = \{S : S \subseteq X\}$ είναι τοπολογία επί του X η οποία καλείται διακριτή.
3. Για κάθε τοπολογία T ενός συνόλου X ισχύει $T' \subseteq T \subseteq T''$.
4. Για κάθε μετρικό χώρο X η οικογένεια $T = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists S(x,\varepsilon) \subseteq U\}$ είναι τοπολογία.

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς απεικονίσεις.

4.1 Ορισμός της συνεχούς απεικόνισης.

Ορισμός 4.1.1. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι.

Μιά απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ καλείται συνεχής στο σημείο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(S_{d_X}(x_0, \delta)) \subseteq S_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$$

Δηλαδή

$$d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$, τότε η f καλείται συνεχής στο X.

Παραδείγματα 4.1.2.

1. Κάθε σταθερή απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ $(f(x) = y_0 \in Y$ για κάθε $x \in X)$ είναι συνεχής.

2. Η ταυτοτική απεικόνιση απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (X, d_X)$ $(f(x) = x$ για κάθε $x \in X)$ είναι συνεχής.

3. Καθε απεικόνιση ορισμένη σε ένα διακριτικό μετρικό χώρο είναι συνεχής.

4.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες της συνεχούς απεικόνισης.

Θεώρημα 4.2.1. *$f : X \to Y$ είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνον αν*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Απόδειξη. Έστω ότι $f : X \to Y$ είναι συνεχής στο x_0 και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπέρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(S_{d_X}(x_0, \delta)) \subseteq S_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$. Αν n_0 είναι τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $x_n \in S_{d_X}(x_0, \delta)$, τότε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $f(x_n) \in S_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Έστω οτι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ για κάθε $x_n \to x_0$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να είναι $f(S_{d_X}(x_0, \delta)) \not\subseteq S_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$. Έστω $x_n \in S_{d_X}(x_0, 1/n))$ είναι τέτοιο ώστε $f(x_n) \notin S_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ενώ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, που είναι άτοπο. □

Πόρισμα 4.2.2. *$f : X \to Y$ είναι συνεχής στο X αν και μόνον αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει*

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ μιά απεικόνιση.*
Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) f είναι συνεχής στο X

(ii) το σύνολο $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτο στο X για κάθε G ανοικτό στο Y

(iii) το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X για κάθε F κλειστό στο Y

(iv) $f(Cl(S)) \subseteq Cl(f(S))$ για κάθε $S \subseteq X$

Απόδειξη. $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Έστω f είναι συνεχής στο X και G ανοικτό στο Y.

Για κάθε $x \in f^{-1}(G)$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $S_Y(f(x), \varepsilon_x) \subseteq G$. Υπάρχει $\delta_x > 0$ τέτοιο ώστε $f(S_X(x, \delta_x)) \subseteq S_Y(f(x), \varepsilon_x) \subseteq G$. Άρα $S_X(x, \delta_x) \subseteq f^{-1}(G)$, επομένως $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.

Έστω το σύνολο $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτο στο X για κάθε G ανοικτό στο Y. Τότε για κάθε $x \in X$ το $f^{-1}(S_Y(f(x), \varepsilon))$ είναι ανοικτο στο X και περιέχεο το x. Επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοι ώστε $S_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(S_Y(f(x), \varepsilon))$. Άρα $f(S_X(x, \delta)) \subseteq S_Y(f(x), \varepsilon)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο X.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Ας υποθλεσουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτο στο X για κάθε G ανοικτό στο Y.

Έστω F κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε το σύνολο $Y \setminus F$ είναι ανοικτό στο Y. Επομένως $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό στο X. Άρα, $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X.

Ας υποθλεσουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X για κάθε F κλειστό στο Y Έστω G ανοικτό υποσύνολο του Y. Τότε το σύνολο $Y \setminus G$ είναι κλειστό στο Y. Επομένως $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ είναι κλειστό στο X. Άρα, $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X.

$(i) \Leftrightarrow (iv)$.

Έστω f είναι συνεχής στο X, $S \subseteq X$ και $y \in f(Cl(S)) \Longrightarrow$

$y = f(x)$, $x \in Cl(S) \Longrightarrow y = f(x)$, $x = \lim_{n\to\infty} s_n,\ s_n \in S \Longrightarrow$

$y = \lim_{n\to\infty} f(s_n),\ f(s_n) \in f(S) \Longrightarrow y \in Cl(f(S))$.

Αν, αντιστρόφως ισχύει η (iv) και f δεν είναι συνεχής στο X, τότε υπάρχει $x \in X$ στο οποίο η f δεν είναι συνεχής. Επομένως υπάρχει ακολουθία $x_n \to x$ τέτοια ώστε $f(x_n) \not\to f(x)$. Για $S = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, έχουμε ότι $x \in Cl(S)$, ενώ $f(x) \notin Cl(f(S))$, που είναι άτοπο.

□

4.3 Ομοιόμορφα συνεχείς απεικονίσεις.

Ορισμός 4.3.1. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι.

Μιά απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται ομοιόμορφα συνεχής στο X αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Πρόταση 4.3.2. *Αν $f : X \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι συνεχής.*

Παραδείγματα 4.3.3.

1. Η απεικόνιση $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής και δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
   Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.
   Έστω $x_0 \in (0, \infty)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ για μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $(0, \infty)$. Τότε
   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$$
   Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
   Έστω $\varepsilon = 1$. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\frac{1}{n} < \delta$ και $x_1 = \frac{1}{2n}$, $x_2 = \frac{1}{n}$ τέτοια ώστε
   $$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \delta$$
   και $\Big|f(x_1) - f(x_2)\Big| = |2n - n| = n \geq 1 = \varepsilon$.
2. Αν για την απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο
   $$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d_X(x_1, x_2), \text{ για οποιαδήποτε } x_1, x_2 \in X,$$
   τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
3. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $n > k$ με
   $$f(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$$
   είναι ομοιόμορφα συνεχής.
4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Η απεικόνιση $(X, d) \to (\mathbb{R}, ||)$ με
   $$f(x) = d(x, A), x \in X$$
   είναι ομοιόμορφα συνεχής.
   Πράγματι, για οποιαδήποτε $x, y \in X$ ισχύει
   $$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \text{ και } d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$$
   Συνεπώς,
   $$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \text{ και } d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y).$$
   Επομένως,
   $$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$
   Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Η απεικόνιση $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

   Πράγματι, έστω $x, y \in [1, \infty)$. Τότε

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

   Συνεπώς $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, για κάθε $x, y \in [1, \infty)$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6. Αν $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι μια ομοιμόρφα συνεχής και επί απεικόνιση και $A \subseteq X$, τότε ο περιορισμός της f στον μετρικό υπόχωρο A είναι ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση.

Πρόταση 4.3.4. *Αν ο (X, d_X) είναι πλήρως φραγμένος και $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι μια ομοιμόρφα συνεχής και επί απεικόνιση, τότε και ο (Y, d_Y) είναι πλήρως φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σύνολα $B_1, ..., B_n \subseteq Y$ τέτοια ώστε $Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ και $\mathrm{diam}(B_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επειδή ο X είναι πλήρως φραγμένος, υπάρχουν $A_1, ..., A_n \subseteq X$ τέτοια ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ και } \mathrm{diam}(A_i) < \delta \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Θέτουμε $B_i = f(A_i)$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Τότε

$$Y = f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Αν $y_1, y_2 \in B_i$, τότε $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$, όπου $x_1, x_2 \in A_i$. Επομένως $d_X(x_1, x_2) < \delta$. Άρα, $d_Y(y_1, y_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Συνεπώς $\mathrm{diam}(B_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Παράδειγμα 4.3.5. Η απεικόνιση $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Πραγματι, ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Επειδή $(0, 1]$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και τα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι πλήρως φραγμένα, το $(0, 1]$ είναι πλήρως φραγμένο. Άρα, από το Θεώημα 4.3.4, το σύνολο $f[((0, 1]] = (1, \infty)$ είναι πλήρως φραγμένο, που είναι άτοπο.

4.4 Ομοιομορφισμοί.

Ορισμός 4.4.1. Μιά απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται ομοιομορφισμός του X επί του Y αν
 (i) f είναι ένα προς ένα και επί
 (ii) f είναι συνεχής
 (iii) f^{-1} είναι συνεχής

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ μία ένα προς ένα και συνεχής απεικόνιση του X επί του Y.*

Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) *f είναι ομοιομορφισμός*

(ii) *το σύνολο $f(F)$ είναι κλειστό στο Y για κάθε F κλειστό στο X*

(iii) *το σύνολο $f(G)$ είναι ανοικτο στο Y για κάθε G ανοικτό στο X*

(iv) *$f(\overline{S}) = \overline{f(S)}$ για κάθε $S \subseteq X$*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω f είναι ομοιομορφισμός του X επί του Y και F είναι κλειστό στο X. Επειδή η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ είναι κλειστό στο Y.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω το σύνολο $f(F)$ είναι κλειστό στο Y για κάθε F κλειστό στο X. Για κάθε G ανοικτό στο X το σύνολο $X \setminus G$ είναι κλειστό, επομένως $f(X \setminus G)$ είναι κλειστό, άρα $f(G) = Y \setminus f(X \setminus G)$ είναι ανοικτό.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Έστω το σύνολο $f(G)$ είναι ανοικτο στο Y για κάθε G ανοικτό στο X και $S \subseteq X$.

Επειδή το $\overline{S}$ είναι κλειστό, $X \setminus \overline{S}$ είναι ανοικτό, επομένως και αφού η f είναι ένα προς ένα και επί, έχουμε $f(X \setminus \overline{S}) = Y \setminus f(\overline{S})$ είναι ανοικτό. Άρα $f(\overline{S})$ είναι κλειστό. Επειδή η f είναι συνεχής $f(S) \subseteq f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$. Επειδή $\overline{f(S)}$ είναι το μικρότερο κλειστο που περιέχει το $f(S)$ προκύπτει ότι $f(\overline{S}) = \overline{f(S)}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Έστω ότι $f(\overline{S}) = \overline{f(S)}$ για κάθε $S \subseteq X$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής. Έστω F κλειστό στο X, τότε $F = \overline{F}$ και συνεπώς $f(F) = f(\overline{F}) = \overline{f(F)}$, άρα $f(F)$ είναι κλειστό στο Y. Όμως $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής αφού η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού στο X συνόλου είναι σύνολο κλειστό στο Y.

□

Παραδείγματα 4.4.3.

1. Η απεικόνιση $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι ομοιμορφισμός.

2. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιμορφισμός.

3. Η απεικόνιση $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $Y = [(-\infty, 0] \times \{1\}] \cup [(0, \infty) \times \{2\}]$ με $f(x, y) = x$ δεν είναι ομοιμορφισμός

4.5 Ισομετρίες.

Ορισμός 4.5.1. Μια απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ καλείται ισομετρια αν και για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει
$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$$

Πρόταση 4.5.2. *Κάθε ισομετρία είναι ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση.*

Πρόταση 4.5.3. *Αν η $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι μια επί ισομετρία, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*

Παράδειγμα 4.5.4.

1. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $k < n$ με $f(x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$ είναι ισομετρία.
2. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x, -y)$ είναι ισομετρία.
3. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f(x_1, ..., x_n) = (x_1 + c_1, ..., x_k + c_2)$, όπου $(c_1, ..., c_n)$ είναι σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^n$, είναι ισομετρία.
4. Η απεικόνιση $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι ομοιμορφισμός και δεν είναι ισομετρία.
5. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $n > k$ με
$$f(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$$
είναι ομοιόμορφα συνεχής και δεν είναι ισομετρία.

Κεφάλαιο 5

Πλήρεις μετρικοί χώροι.

5.1 Ακολουθίες του Cauchy.

Ορισμός 5.1.1. Μιά ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων μετρικού χώρου (X,d) καλείται ακολουθία του Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n, m > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Πρόταση 5.1.2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ενός μετρικού χώρου είναι ακολουθία του Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα ακιλουθία ενός μετρικού χώρου X και $x \in X$ είναι το όριό της. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει: $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως για κάθε $n, m > n_0$ έχουμε:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy. □

Πρόταση 5.1.3. *Μιά ακολουθία του Cauchy συγκλίνει αν και μόνον αν αυτή περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μιά ακολουθία του Cauchy.

Αν $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει, τότε η ίδια είναι συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έστω ότι $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ με όριο $x \in X$. Θα δείξουμε ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Επειδή $x_{n(k)} \to x$, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $d(x, x_{n(k)}) < \frac{\varepsilon}{2}$, αν $k > k_0$.

Επειδή $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ αν } n, m > n_0$$

Έστω $n_1 = \max\{n_0, n(k_0)\}$, τότε για κάθε $n > n_1$ υπάρχει $n(k) > n$. Από τον ορισμό του n_1 έχουμε

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

5.2 Ορισμός του πλήρους χώρου.

Ορισμός 5.2.1. Ένας μετρικός χώρος (X, d) καλείται πλήρης αν κάθε ακολουθία του Cauchy του X συγκλίνει (σε κάποιο σημείο του X).

Παραδείγματα 5.2.2.

1. Κάθε διακριτικός μετρικός χώρος X είναι πλήρης, επειδή και οι ακολουθίες του Cauchy και οι συγκλίνουσες ακολουθίες του X συμπίπτουν και είναι οι ακολουθίες της μορφής $x_1, ...x_n, x, x, ..., x, ...,$ όπου $x_1, ..., x_n, x \in X$.

2. Ο $\mathbb{R}^n$ με την μετρική $d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$ είναι πλήρης για κάθε $n = 1, 2, ...,$.

   Πράγματι, έστω $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ μια ακολουθία Cauchy του $\mathbb{R}^n$, όπου $\overline{x}_k = (x_k^1, ..., x_k^n)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει,

   Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m, k \geq k_0$

$$d(\overline{x}_k, \overline{x}_m) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k^i - x_m^i)^2} < \varepsilon$$

   Άρα, $\sum_{i=1}^{n}(x_k^i - x_m^i)^2 < \varepsilon^2$. Επομένως για κάθε $i = 1, ..., n$ και για κάθε $m, k \geq k_0$ ισχύει

$$|x_k^i - x_m^i| = \sqrt{(x_k^i - x_m^i)^2} < \varepsilon$$

   Συνεπώς για κάθε $i = 1, ..., n$ $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy του $\mathbb{R}$.

   Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

   Θέτουμε $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$. Τότε, επειδή $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k^i - x_i) = 0$, προκύπτει ότι

$$\lim_{k\to\infty} d(\bar{x}, \bar{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_k^i)^2} = 0,$$

   δηλαδή η ακολουθία Cauchy $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο $\bar{x}$.

3. Ο $\mathbb{R}^n$ με την μετρική $d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{|y_i - x_i|\}$ είναι πλήρης για κάθε $n = 1, 2, ...,$.

4. Ο χώρος $\mathcal{C}_{[a,b]} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής $\}$ με τη μετρική $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ είναι πλήρης.

5. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τη μετρική $d(n, m) = |n - m|$ είναι πλήρης χώρος.

6. Το σύνολο $X = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ με τη μετρική από το $\mathbb{R}$ δεν είναι πλήρης.

7. Ο χώρος $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}\}$ με τη μετρική $d(x, y) = \sup\{|y_i - x_i| : i = 1, 2, ...\}$ είναι πλήρης.

8. Ο χώρος των ρητών αριθμών με τη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ δεν είναι πλήρης.

9. Ο χώρος του Hilbert $\ell_2 = (X,d)$, όπου

   $X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του $\mathbb{R}$ τετοια ώστε $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^2 < \infty\}$ και $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i)^2}$ δεν είναι πλήρης.

5.3 Ιδιότητες του πλήρους χώρου.

Πρόταση 5.3.1. *Κάθε πλήρης υπόχωρος F ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστός στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in F'$, τότε $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, όπου $x_n \in F$.

Επειδή η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα είναι ακολουθία του Cauchy του X. Άρα η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του F. Επειδή ο F είναι πλήρης, υπάρχει $x^* \in F$ τέτοιο ώστε $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Μιά ακολουθία δεν μπορεί να έχει δύο όρια άρα $x = x^*$, οπότε $x \in F$. Συνεπώς το σύνολο F είναι κλειστό. □

Πρόταση 5.3.2. *Κάθε κλειστός υπόχωρος F ενός πλήρους μετρικού χώρου X είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του Cauchy του F.

Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ αν $n, m > n_0$. Άρα $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του Cauchy του X. Επειδή ο X είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Επειδή το F είναι κλειστό και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ προκύπτει ότι $x \in F' \subseteq F$. Άρα $x \in F$ και συνεπώς κάθε ακολουθία του Cauchy του F συγκλίνει, δηλαδή ο F είναι πλήρης.

□

Θεώρημα 5.3.3. *Ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης αν και μόνον αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών σφαιρών*

$$S[x_1, r_1] \supseteq \ldots \supseteq S[x_n, r_n] \supseteq S[x_{n+1}, r_{n+1}] \supseteq \ldots$$

τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ *ισχύει* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και

$$S[x_1, r_1] \supseteq \ldots \supseteq S[x_n, r_n] \supseteq S[x_{n+1}, r_{n+1}] \supseteq \ldots$$

μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών σφαιρών με $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $r_n < \varepsilon$. Έστω $n, m > n_0$ και $m > n$, τότε $S[x_m, r_m] \subseteq S[x_n, r_n]$. Επομένως $x_m \in S[x_n, r_n]$, άρα, $d(x_m, x_n) \leq r_n < \varepsilon$.

Έπειδή Ο X είναι πλήρης, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$.

Για κάθε n ισχύει $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \subseteq S[x_n, r_n]$ και $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n+i} = x$, συνεπώς $x \in S[x_n, r_n]$, επειδή $S[x_n, r_n]$ είναι κλειστό σύνολο. Άρα, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S[x_n, r_n]$, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} S[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών σφαιρών

$$S[x_1, r_1] \supseteq \ldots \supseteq S[x_n, r_n] \supseteq S[x_{n+1}, r_{n+1}] \supseteq \ldots$$

του X με $r_n \to 0$ έχει μη κενή τομή.

Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του X. Επαγωγικά μπορεί να κατασκευαστει μια αύξουσα ακολουθία $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ τέτοια ώστε: $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ για κάθε $n > n_k$

Θεωρουμε την ακολουθία κλειστών σφαιρών $\left\{S[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$. Θα δείξουμε ότι $S[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}] \subseteq S[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]$.

Πράγματι, αν $x \in S[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}]$, τότε $d(x, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Επομένως

$$d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \Rightarrow x \in S[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]$$

Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$. Επειδή η ακολουθία του Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει. Άρα ο X είναι πλήρης.

□

5.4 Πλήρωση μετρικού χώρου.

Ορισμός 5.4.1. Ένας μετρικός χώρος (X^*, d^*) καλείται πλήρωση του μετρικού χώρου (X, d) αν

(i) (X^*, d^*) είναι πλήρης

(ii) υπάρχει μία ισομετρία $f : X \to f(X) \subseteq X^*$

(iii) $\overline{f(X)} = X^*$

Θεώρημα 5.4.2. *Κάθε μετρικός χώρος (X, d) έχει μιά πλήρωση.*

Απόδειξη. Θα λέμε ότι δύο ακολουθίες του Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ του X είναι ισοδύναμες αν $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Έστω X^* το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των ακολουθιών του Cauchy του X. Για $x, y \in X^*$ ορίζουμε

$$d^*(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \text{ όπου } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in x \text{ και } \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in y$$

Θα αποδείξουμε ότι η $d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ είναι καλά ορισμένη.

Πράγματι, αν $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, είναι ακολουθίες του Cauchy, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n, m > n_0$ ισχύει

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \text{ και } d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$$

Από τις

$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$

$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$ προκύπτει ότι

$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \epsilon$.

Δηλαδή η $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του $\mathbb{R}$ και άρα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.

Ο αριθμός $d^*(x, y)$ δεν θα αλλάξει αν επιλέξουμε άλλες ακολουθίες $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \in x$ και $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty} \in y$. Πράγματι, επειδή $d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.

Επειδή η d είναι μετρική, αποδεικνύεται εύκολα ότι και η d^* είναι μετρική.

Ορίζουμε $f : X \to X^*$ ως εξής: $f(x) = \{x, x, ..., x, ...\}$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$d^*(f(x), f(y)) = d^*(\{x, x, ...\}, \{y, y, ...\}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

άρα η f είναι ισομετρία.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^*$. Επειδή x είναι ακολουθία του Cauchy υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Θέτουμε $y = \{x_{n_0}, x_{n_0}, ..., x_{n_0}, ...\}$, τότε $y \in f(X)$ και $d^*(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Άρα, $\overline{f(X)} = X^*$.

Θα δείξουμε ότι ο X^* είναι πλήρης.

Έστω $x^1, x^2, ..., x^n, ...$ μιά ακολουθία του Cauchy του X^*.

Έστω $\{x'_n\} \in X^*$ είναι μιά σταθερή ακολουθία τέτοια ώστε $d^*(x^n, \{x'_n\}) < \frac{1}{n}$.

Θα δείξουμε ότι $x' = \{x'_1, ..., x'_n, ...\} \in X^*$ και $\lim_{n\to\infty} x^n = x'$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και n_0 είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{6}$ και για κάθε $n, m > n_0$ να έχουμε $d^*(x^m, x^n) < \frac{\varepsilon}{6}$. Τότε για κάθε $n, m > n_0$ ισχύει:
$d(x'_m, x'_n) = d^*(\{x'_m\}, \{x'_n\}) \leq d^*(\{x'_m\}, x^m) + d^*(x^m, x^n) + d^*(x^n, \{x'_n\}) <$
$< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$
Συνεπώς $x' = \{x'_1, ..., x'_n, ...\}$ είναι ακολουθία του Cauchy του X.
Άρα $x' = \{x'_1, ..., x'_n, ...\} \in X^*$.

Για κάθε $n > n_0$ ισχύει: $d^*(\{x'_n\}, x') = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, x'_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Άρα, $d^*(x^n, x') \leq d^*(x^n, \{x'_n\}) + d^*(\{x'_n\}, x') < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

□

Θεώρημα 5.4.3. *Οποιεσδήποτε δύο πληρώσεις (X^*, d^*) και $\hat{x} \in \hat{X}$ ενός μετρικού (X, d) χώρου είναι ισομετρικές.*

Απόδειξη. Έστω

$$\hat{i} : X \to \hat{X}, \quad i^* : X \to X^*$$

οι αντίστοιχες ισομετρίες. Ορίζουμε $i : \hat{X} \to X^*$ ως εξής:

Αν $\hat{x} \in \hat{X}$, τότε $\hat{x} \in \overline{\hat{i}(X)}$, συνεπώς $\hat{x} = \lim \hat{x}_n$, όπου $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του $\hat{i}(X)$. Επειδή $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\hat{i}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ και $\hat{i}$ είναι ισομετρία, η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του X. Θέτουμε $i(\hat{x}) = x^* = \lim i^*(x_n)$

Αν $x^* \in X^*$ και $x^* = \lim i^*(x_n)$, όπου $x_n \in X$, τότε $x^* = i(\hat{x})$, όπου $i(\hat{x}) = \lim \hat{i}(x_n)$.

Αν $x^* = \lim i^*(x_n)$ και $x^* = \lim i^*(y_n)$, τότε

$$0 = d^*(x^*, x^*) = \lim d^*(i^*(x_n), i^*(y_n)) = \lim d((x_n, y_n)) = \lim \hat{d}(\hat{i}(x_n), \hat{i}(y_n))$$

Άρα $\lim \hat{i}(x_n) = \lim \hat{i}(y_n)$, δηλαδή η i είναι καλά ορισμένη.

Αν $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, τότε $\hat{x} = \lim \hat{x}_n = \lim \hat{i}(x_n)$ και $\hat{y} = \lim \hat{y}_n = \lim \hat{i}(x_n)$,
$i(\hat{x}) = x^* = \lim i^*(x_n)$ και $i(\hat{y}) = y^* = \lim i^*(y_n)$

Επειδή $\hat{i}$ και i^* είναι ισομετρίες διαδοχικά παίρνουμε:

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d(\hat{i}(x_n), \hat{i}(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} d^*(i^*(x_n), i^*(y_n)) = d^*(x^*, y^*) = d^*(i(\hat{x}), i(\hat{y}))$$

Συνεπώς i είναι ισομετρία. □

5.5 Θεώρημα του Baire.

Ορισμός 5.5.1. Ένα υποσύνολο S μετρικού χώρου X καλείται πουθενά πυκνό αν $(\overline{S})^{\circ} = \emptyset$, όπου $(\overline{S})^{\circ}$ είναι το εσωτερικό του $\overline{S}$.

Πρόταση 5.5.2. *Οι ακόλουθές συνθήκες είναι ισοδύμαμες:*

(i) S είναι πουθενά πυκνό στο X

(ii) $\overline{X \setminus \overline{S}} = X$

(iii) Για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ υπάρχει μία σφαίρα $S(x, \varepsilon) \subseteq G \setminus S$

Απόδειξη. (i) $\iff$ (ii) Έπειδή $X \setminus (\overline{S})^{\circ} = \overline{X \setminus \overline{S}}$ συμπεραίνουμε διαδοχικά:

S είναι πουθενά πυκνό στο $X \iff (\overline{S})^{\circ} = \emptyset \iff$

$X \setminus (\overline{S})^{\circ} = X \iff \overline{X \setminus \overline{S}} = X$

(i) $\iff$ (iii) Έστω $(\overline{S})^{\circ} = \emptyset$ και G ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε $G \nsubseteq V$, αφού σε αντίθετη περίπτωση $G \subseteq (\overline{S})^{\circ} = \emptyset$, που είναι άτοπο.

Συνεπώς $G \setminus \overline{S}$ είναι μη κενό ανοικτό σύνολο, οπότε για κάθε $x \in G \setminus \overline{S}$ υπάρχει μία σφαίρα τέτοια ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq G \setminus \overline{S} \subseteq G \setminus S$.

Έστω $(\overline{S})^{\circ} \neq \emptyset$, τότε $(\overline{S})^{\circ}$ είναι μη κενό ανοικτό σύνολο, άρα ύπάρχει $S(x, \varepsilon) \subseteq (\overline{S})^{\circ} \setminus S$.

Οπότε έχουμε:

$S(x, \varepsilon) \subseteq (\overline{S})^{\circ} \subseteq \overline{S}$ και $S(x, \varepsilon) \cap S = \emptyset$.

Άρα από την μία έχουμε $x \in S(x, \varepsilon) \subseteq \overline{S}$ από την άλλη $x \notin \overline{S}$, που είναι άτοπο. Άρα $(\overline{S})^{\circ} = \emptyset$

□

Θεώρημα 5.5.3. *(Baire) Αν $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία πουθενα πυκνών υποσυνόλων ενός πλήρους μετρικού χώρου X, τότε $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Επειδή το S_1 είναι πουθενά πυκνό το ανοικτό σύνολο X περιέχει μία σφαίρα $S(x_1, r_1) \subseteq X \setminus S_1$ με $0 < r_1 < \frac{1}{2}$.

Έστω ότι έχουν κατασκευαστεί k κλειστές σφαίρες

$$S[x_1, \frac{r_1}{2}] \supseteq S[x_2, \frac{r_2}{2}] \supseteq ... \supseteq S[x_k, \frac{r_k}{2}]$$

όπου $S[x_i, \frac{r_i}{2}] \subseteq S(x_i, r_i) \subseteq X \setminus S_i$ και $0 < r_i < \frac{1}{2^i}$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Έπειδή S_{k+1} είναι πουθενά πυκνό στο X και $S(x_k, , \frac{r_k}{2})$ είναι ανοικτό στο X υπάρχει σφαίρα $S(x_{k+1}, r_{k+1}) \subseteq S(x_k, , \frac{r_k}{2}) \setminus S_{k+1}$, όπου $0 < r_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Συνεπώς

$$S[x_{k+1}, \frac{r_{k+1}}{2}] \subseteq S(x_{k+1}, r_{k+1}) \subseteq S(x_k, , \frac{r_k}{2}) \setminus S_{k+1} \subseteq S[x_k, , \frac{r_k}{2}] \setminus S_{k+1}.$$

Αρα, $S[x_{k+1}, \frac{r_{k+1}}{2}] \subseteq S[x_k, \frac{r_k}{2}]$ και $S[x_{k+1}, \frac{r_{k+1}}{2}] \subseteq X \setminus S_{k+1}$.

Η $\{S[x_n, \frac{r_n}{2}]\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών σφαιρών πλήρους χώρου X με ακτίνες $\frac{r_n}{2}$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{2} = 0$, συνεπώς $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

Επειδή

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S[x_n, r_n] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus S_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

προκύπτει ότι $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$. $\square$

Θεώρημα 5.5.4. *(Baire) Αν $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία υποσυνόλων ενός πλήρους μετρικού χώρου X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, τότε υπάρχει n τέτοιο ώστε $(\overline{S_n})^{\circ} \neq \emptyset$.*

Ορισμός 5.5.5. Ένα υποσύνολο A μετρικού χώρου X καλείται σύνολο $1^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας αν $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και A_n είναι πουθενά πυκνό στο X για κάθε n.

Ένα υποσύνολο A μετρικού χώρου X που δεν μπορεί να παρασταθεί ως ένωση αριθμησίμου πλήθους πουθενά πυκνών στο X συνόλων καλείται σύνολο $2^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Κεφάλαιο 6

Συμπαγείς μετρικοί χώροι.

6.1 Ορισμός του συμπαγούς χώρου.

Ορισμός 6.1.1.

- Μιά οικογένεια υποσυνόλων $\{O_i\}_{i\in I}$ ενός μετρικού χώρου X καλείται κάλυμμα του X αν $X = \bigcup_{i\in I} O_i$.
- Κάθε κάλυμμα του μετρικού χώρου X που αποτελείται ανοικτα υποσύνολα του X καλείται *ανοικτό κάλυμμα*.
- Κάθε υποοικογένεια δοθέντος καλύμματος του X η οποία είναι επίσης κάλύμμα του X καλείται *υποκάλυμμα* του δοθέντος καλύμματος.

Ορισμός 6.1.2. Ένας μετρικός χώρος καλείται συμπαγής αν κάθε ανοκτό κάλυμμα του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Παραδείγματα 6.1.3.

1. Κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος είναι συμπαγής.
2. Κάθε άπειρος διακριτικός μετρικός χώρος δεν είναι συμπαγής.

Πρόταση 6.1.4. *Κάθε συμπαγής χώρος είναι πλήρως φραγμένως (άρα, φραγμένως).*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $X = \bigcup_{x\in X} S(x,\varepsilon)$, η οικογένεια $\{S(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Από την συμπαγότητα του X έπεται ότι το ανοικτό κάλυμμα $\{S(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένου πλήθους σημεία $x_1, ..., x_n \in X$ για τα οποία

$$X = S(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup S(x_n,\varepsilon).$$

Άρα, ο X είναι πλήρως φραγμένος. $\square$

Πόρισμα 6.1.4. *Ο χώρος $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, ...$, με την μετρική*

$$d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

δεν είναι φραγμένως.

Ορισμός 6.1.4. Ένας αριθμός $\lambda > 0$ καλείται *αριθμός του Lebesgue* για το ανοικτό κάλυμμα $\{O_i\}_{i\in I}$ του μετρικού χώρου X αν για κάθε $x \in X$ η ανοικτή σφαίρα $S(x, \lambda)$ είναι υποσύνολο κάποιου στοιχείου του καλύμματος $\{O_i\}_{i\in I}$.

Δηλαδή, ένας αριθμός $\lambda > 0$ είναι αριθμός του Lebesgue για το ανοικτό κάλυμμα $\{O_i\}_{i\in I}$ του μετρικού χώρου X όταν για οποιαδήποτε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \lambda$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $x, y \in O_i$.

Θεώρημα 6.1.5. *Για κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου υπάρχει αριθμός του Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα ενός συμπαγούς χώρου X. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ τέτοιο ώστε $x \in O_{i_x}$ και, επειδή O_{i_x} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ για το οποίο $x \in S(x, \varepsilon_x) \subseteq O_{i_x}$. Τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει $x \in S(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) \subseteq S(x, \varepsilon_x) \subseteq O_{i_x}$. Όμως

$$X = \bigcup_{x\in X} S\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right).$$

Επειδή ο X είναι συμπαγής, το ανοικτό κάλυμμα $\{S(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) : x \in X\}$ το X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή

$$X = S\left(x_1, \frac{\varepsilon_{x_1}}{2}\right) \cup \cdots \cup S\left(x_n, \frac{\varepsilon_{x_n}}{2}\right)$$

Θέτουμε $\lambda = \min\{\frac{\varepsilon_{x_1}}{2} \dots, \frac{\varepsilon_{x_n}}{2}\}$ Έστω ότι $x \in X$ και $y \in S(x, \lambda)$. Όμως $x \in S(x_j, \frac{\varepsilon_{x_j}}{2})$ για κάποιο $j = 1, ..., n$. Επομένως

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) < \lambda + \frac{\varepsilon_{x_j}}{2} \leq \frac{\varepsilon_{x_j}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_j}}{2} = \varepsilon_{x_j}$$

Επομένως $y \in S(x_j, \varepsilon_{x_j})$. Άρα, $S(x, \lambda) \subseteq S(x_j, \varepsilon_{x_j}) \subseteq O_{i_{x_j}}$. Συνεπώς λ είναι αριθμός του Lebesque για το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$.

□

6.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες του συμπαγούς χώρου.

Θεώρημα 6.2.1. *Ένας υπόχωρος F ενός μετρικού χώρου X είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{G_i\}_{i\in I}$ του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχει πεπερασμένη υποοικογένεια $\{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ τέτοια ώστε $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο υπόχωρος F του X είναι συμπαγής και $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών συνόλων του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε $F = \bigcup_{i\in I} (F \cap G_i)$ και $F \cap G_i$ είναι ανοικτό στο F για κάθε $i \in I$. Επειδή ο F είναι συμπαγής το ανοικτό κάλυμμα $\{F \cap G_i\}_{i\in I}$ του F περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{F \cap G_{i_1}, ..., F \cap G_{i_n}\}$. Έχουμε $F = (F \cap G_{i_1}) \cup ... \cup (F \cap G_{i_n})$, άρα $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$.

Έστω για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{G_i\}_{i\in I}$ του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχει πεπερασμένη υποοικογένεια $\{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ τέτοια ώστε $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$. Θα δείξουμε ότι ο F είναι συμπαγής. Έστω $F = \bigcup_{i\in I} G'_i$, όπου G'_i είναι ανοικτο στο F για κάθε $i \in I$. Τότε για κάθε $i \in S$ θα υπάρχει ανοικτό στο X σύνολο G_i τέτοιο ώστε $G'_i = F \cap G_i$. Συνεπώς

$F \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Σύμφωνα με υπόθεση υπάρχουν $\{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ τέτοια ώστε $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$. Οπότε $F = (F \cap G_{i_1}) \cup ... \cup (F \cap G_{i_n})$. Άρα $F = G'_{i_1} \cup ... \cup G'_{i_n}$. Συνεπώς ο F είναι συμπαγής. $\square$

Θεώρημα 6.2.2. *Για έναν μετρικό χώρο X η ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) *Ο X είναι συμπαγής*

(β) *Κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει οριακό σημείο,*

(γ) *Κάθε ακολουθία σημείων ενός μετρικού χώρου X έχει συγκλίνουσα (στο σημείο του X) υπακολουθία.*

(δ) *Ο X είναι πλήρης και πλήρως φραγμένως.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο A του X που δεν έχει οριακό σημείο. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon_x)$ τέτοια ώστε το σύνολο $A \cap S(x, \varepsilon_x)$ είναι πεπερασμένο.

Έχουμε $X = \bigcup_{x \in X} S(x, \varepsilon_x)$. Συνεπώς $\{S(x, \varepsilon_x)\}_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Επειδή ο X είναι συμπαγής το ανοικτό αυτό κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{S(x_1, \varepsilon_{x_1}), ..., S(x_n, \varepsilon_{x_n})\}$. Επομένως $X = S(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup ... \cup S(x_n, \varepsilon_{x_n})$. Άρα,

$$A = A \cap X = (A \cap S(x_1, \varepsilon_{x_1})) \cup ... \cup (A \cap S(x_n, \varepsilon_{x_n})).$$

Αφού τα σύνολα $A \cap S(x_1, \varepsilon_{x_1})$, ..., $A \cap S(x_n, \varepsilon_{x_n})$ είναι πεπερασμένα, το A – η ένωση τους είναι πεπερασμένο, που είναι άτοπο.

Άρα, κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει οριακό σημείο.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία του X.

Θέτουμε $A = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$. Αν A είναι πεπερασμένο, τότε η ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει σταθερή υπακολουθία $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{x, x, ...\}$ η οποία συγκλίνει στο x.

Αν A είναι άπειρο, τότε υπάρχει $x \in A^d$.

Συνεπώς για κάθε $k = 1, 2, ...$ το σύνολο $A \cap S(x, 1/k)$ είναι άπειρο. Έστω

$x_{n_1} \in A \cap S(x, 1) \setminus \{x\}$

$x_{n_2} \in A \cap S(x, 1/2) \setminus \{x, x_{n_1}\}$, $n_2 > n_1$

....

$x_{n_k} \in A \cap S(x, 1/k) \setminus \{x, x_{n_1}, ..., x_{n_{k-1}}\}$, $n_k > n_{k-1}$.

Τότε $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$ και $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(γ) $\Rightarrow$ (δ) Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία Cauchy του X. Τότε, από την υπόθεση (γ) η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει συγκλινουσα υπακολουθία. Κάθε ακολουθία Cauchy που περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία συγκλίνει. Άρα, η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Συνεπώς ο X είναι πλήρης.

Ας υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι πλήρως φραγμένος. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο ο X δεν περιέχει κανένα ε-πλέγμα.

Έστω $x_1 \in X$, τότε $X \not\subseteq S(x_1, \varepsilon)$.

Έστω $x_2 \in X \setminus S(x_1, \varepsilon)$, τότε $X \nsubseteq S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$ και $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε για κάθε n:

$$X \nsubseteq S(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup S(x_n, \varepsilon) \text{ και } d(x_1, x_2) \geq \varepsilon, ..., d(x_{n-1}, x_n) \geq \varepsilon$$

Άρα, $d(x_k, x_n) \geq \varepsilon$ για κάθε $k, n = 1, 2, ...$, οπότε η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ δεν περιέχει καμία ακολουθία Cauchy, άρα και καμία συγκλίνουσα υπακολουθία, που είναι άτοπο.

$(\delta) \Rightarrow (\alpha)$ Ας υποθέσουμε ότι ένας πλήρης και πλήρως φραγμένος χώρος X δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει ανοικτο κάλυμμα $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in I}$ του X που δεν περιέχει κανένα πεπερασμένο υποκάλλυμα.

Επειδή ο X είναι πλήρως φραγμένος, από την Πρόταση 3.12.2 υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $P_1 \subseteq X$ τέτοιο ώστε

$$X = \bigcup_{p \in P_1} A(p) \text{ και } \operatorname{diam}(A(p)) < 1.$$

Οπότε υπάρχει $p_1 \in P_1$ τέτοιο ώστε το σύνολο $A(p_1)$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τόυ καλύμματος $\mathcal{O}$. Από την Πρόταση 3.12.3 ο υπόχωρος $A(p_1)$ είναι πλήρως φραγμένος. Άρα, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $P_2 \subseteq A(p_1)$ τέτοιο ώστε

$$A(p_1) = \bigcup_{p \in P_2} A(p) \text{ και } \operatorname{diam}(A(p)) < \frac{1}{2}.$$

Οπότε υπάρχει $p_2 \in P_2$ τέτοιο ώστε το σύνολο $A(p_2)$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τόυ καλύμματος $\mathcal{O}$.

Επαγωγικά μπορούμε να κατασκευάσουμε μια φθίνουσα ακολοθία συνόλων

$$A(p_1) \supseteq A(p_2) \supseteq \cdots \supseteq A(p_n) \supseteq A(p_{n+1}) \supseteq \ldots$$

τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(A(p_n)) < \frac{1}{n}$, $p_n \in A(p_n)$ και κανένα από τα $A(p_n)$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τόυ καλύμματος $\mathcal{O}$.

Θα δείξουμε ότι $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε $A(p_n), A(p_m) \subseteq A(p_{n_0})$. Επομένως $p_n, p_m \in A(p_{n_0})$. Άρα, επειδή $\operatorname{diam}(A(p_{n_0})) < \varepsilon$, έπεται ότι $d(p_n, p_m) < \varepsilon$.

Επειδή από την υπόθεση ο X είναι πλήρως , η ακολουθία Cauchy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε ένα $p \in X$. Επειδή $\mathcal{O}$ είναι κάλυμμα του X, υπάρχει $O_p \in \mathcal{O}$ με $p \in O_p$. Επειδή O_p είναι ανοικτό υπάρχει m για το οποίο

$$S(p, 1/m) \subseteq O_p.$$

Επειδή $\lim p_n = p$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $p_n \in S\left(p, \frac{1}{2m}\right)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Έστω $n > \max\{n_0, 2m\}$. Τότε $p_n \in S\left(p, \frac{1}{2m}\right) \cap A(p_n)$.

Για κάθε $a \in A(p_n)$ έχουμε

$$d(p, a) \leq d(p, p_n) + d(p_n, a) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}.$$

Άρα, $A(p_n) \subseteq S(p, 1/m) \subseteq O_p$. Συνεπώς $A(p_n)$ καλύπτεται από ένα στοιχείο O_p του καλύμματος $\mathcal{O}$, που είναι άτοπο. Άρα, ο X είναι συμπαγής.

$\square$

Ορισμός 6.2.3. Ένας μετρικός χώρος X λέγεται ότι έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass αν κάθε άπειρο υποσύνολο του X (έχει στο X) οριακό σημείο.

Ορισμός 6.2.4. Ένας μετρικός χώρος X καλείται ακολουθιακά συμπαγής αν κάθε ακολουθία σημείων X έχει συγκλίνουσα (στο σημείο του X) υπακολουθία.

Από το εώρημα 6.2.2 συνεπάγεται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 6.2.5. *Για έναν μετρικό χώρο X η ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) *Ο X είναι συμπαγής.*

(β) *Ο X έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass.*

(γ) *Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.*

Παραδείγματα 6.2.5.

1. Το σύνολο όλων των ρητών αριθμών ενός διαστήματος $[a, b]$ δεν έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass και, άρα $[a, b] \cap Q$ δεν είναι συμπαγής χώρος.
2. Κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα $[a, b]$ των πραγματικών αριθμών έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass και, συνεπώς, είναι συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{R}$.

6.3 Υπόχωροι συμπαγούς χώρου.

Πρόταση 6.3.1. *Κάθε κλειστός υπόχωρος F ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Επειδή F είναι κλειστό το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Επειδή ο X είναι συμπαγής το ανοικτό κάλυμμα $\{G_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$ του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $G_{i_1}, ..., G_{i_n}, X \setminus F$.

Έχουμε $X = G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n} \cup (X \setminus F)$, συμεπώς $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$. Άρα ο υπόχωρος F είναι συμπαγής. □

Πρόταση 6.3.2. *Κάθε συμπαγής υπόχωρος F ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Άρκει να δείξουμε ότι $Cl(F) \subseteq F$.

Έστω $x \in Cl(F)$, τότε υπάρχει $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Κάθε υπακολουθία της $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει όριο το x.

Επειδή ο F είναι συμπαγής η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει μια υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει σε ένα σημείο του F. Άρα $x \in F$. □

Πρόταση 6.3.3. *Ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν το σύνολο F είναι φραγμενο και κλειστο στο $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι πλήρης και πλήρως φραγμένος.

Επειδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης, ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης αν και μόνο αν είναι κλειστός. Επίσης, ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρως φραγμένος αν και μόνον αν είναι φραγμένος.

Συνεπώς ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης και πλήρως φραγμένος αν και μόνον αν είναι κλειστός και φραγμένος.

□

6.4 Απεικονίσεις συμπαγών χώρων.

Θεώρημα 6.4.1. *Κάθε συνεχής απεικόνιση ορισμένη σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο X είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι συνεχής και (X, d_X) είναι συμπαγής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\{S_Y(f(x), \varepsilon/2)\}_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$ και η f είναι συνεχής, το $\mathcal{K} = \{f^{-1}[S_Y(f(x), \varepsilon/2)]\}_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Έστω $\delta > 0$ είναι αριθός του Lebesgue για το $\mathcal{K}$.

Αν $x_1, x_2 \in X$ και $d_X(x_1, x_2) < \delta$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$x_1, x_2 \in f^{-1}[S_Y(f(x), \varepsilon/2)]$$

Τότε

$$f(x_1), f(x_2) \in S_Y(f(x), \varepsilon/2)$$

Συνεπώς

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f(x)) + d_Y(f(x), f(x_2)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Θεώρημα 6.4.2. *Αν η απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή μετρικό χώρο X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι συνεχής, τότε ο υπόχωρος $f(X)$ του Y είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$.

Επειδή η f είναι συνεχής $\{f^{-1}(G_i)\}_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.

Επειδή ο X είναι συμπαγής το ανοικτό κάλυμμα $\{f^{-1}(G_i)\}_{i \in I}$ περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{f^{-1}(G_1), ..., f^{-1}(G_n)\}$. Επομένως $X = f^{-1}(G_1) \cup ... \cup f^{-1}(G_n)$. Άρα, $f(X) = G_1 \cup ... \cup G_n$. Συνεπώς ο είναι X συμπαγής. □

Πρόταση 6.4.3. *Κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο είναι φραγμένη και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και X συμπαγής. Τότε ο υπόχωρος $f(X)$ του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγής. Συνεπώς το υποσύνολο $f(X)$ του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό και φραγμένο.

Έστω $m = \inf f(X)$ και $M = \sup f(X)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $m, M \in f(X)$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $[m, m - \varepsilon) \cap f(X) \neq \emptyset$. Συνεπώς $m \in Cl(f(X))$. Επειδή το σύνολο $f(X)$ είναι κλειστό, έπεται ότι $Cl(f(X)) = f(X)$. Άρα, $m \in f(X)$. Όμοια $M = \max f(X)$. □

Ορισμός 6.4.4. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή μετρικό χώρο X σε ένα μετρικό χώρο Y καλείται κλειστή όταν για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X το σύνολο $f(F)$ είναι κλειστό στο Y.

Πρόταση 6.4.5. *Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή μετρικό χώρο X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι κλειστή.*

Απόδειξη. Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X. Από την Πρόταση 6.3.1, F είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Επειδή η f είναι συνεχής, το σύνολο $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y από το Θεώρημα 6.4.2. Άρα, $f(F)$ είναι κλειστό από την Πρόταση 6.3.2. □

Πρόταση 6.4.6. *Κάθε συνεχής, ένα προς ένα και επί απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή μετρικό χώρο X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι ομοιομορφισμός.*