ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σοφία Ζαφειρίδου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Θεωρία μέτρου

Σημειώσεις διαδικτύου

Πάτρα 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

1.1 Στοιχεία θεωρίας συνόλων

Για ένα σύνολο X συμβολίζουμε με $P(X)$ το δυναμοσύνολο του X, δηλαδή

$$P(X) = \{Y : Y \subseteq X\}.$$

Για κάθε $E \in P(\mathbb{X})$ ορίζεται η *χαρακτηριστική απεικόνιση* $\chi_E : X \to \{0, 1\}$ ως εξής:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in E, \\ 0, & \text{αν } x \notin E. \end{cases}$$

Ένα σύνολα S καλείται *πεπερασμένο* όταν $S = \emptyset$ ή όταν υπάρχουν $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και μιά 1-1 και επί απεικόνιση $f : S \to \{1, 2, ..., n\}$.

Ένα σύνολα S καλείται *αριθμήσιμο* όταν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : S \to \mathbb{N}$.

Ένα σύνολο S καλείται *το πολύ αριθμήσιμο* όταν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Έστω X μη κενό σύνολο και $S \subseteq X$.
Μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ καλείται *κάλυψη* του S όταν $S = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

Για κάθε $E \in P(\mathbb{R})$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε

$$E + x = \{e + x : e \in E\}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1.1. *Για κάθε $A, B \in P(\mathbb{R})$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$:*

1. $(A \cap B) + x = (A + x) \cap (B + x)$
2. $A \cap (B + x) = \big((A - x) \cap B\big) + x$
3. $(B + x)^c = B^c + x$

1.2 Φράγματα υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Για $S \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\inf(S) = \begin{cases} \max\{m : m \text{ κάτω φράγμα του } S\}, & \text{αν } S \text{ είναι κάτω φραγμένο} \\ -\infty, & \text{αν } S \text{ δεν είναι κάτω φραγμένο.} \end{cases}$$

$$\sup(S) = \begin{cases} \min\{M : M \text{ κάτω φράγμα του } S\}, & \text{αν } S \text{ είναι άνω φραγμένο} \\ \infty, & \text{αν } S \text{ δεν είναι άνω φραγμένο.} \end{cases}$$

Οι αριθμοί $\inf(S)$ και $\sup(S)$ καλούνται infimum και supremum του S, αντίστοιχα και συμβολίζονται επίσης ως $\inf S$ και $\sup S$.

Για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συμβολίζουμε:

$$\inf_n a_n = \inf(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$$
$$\sup_n a_n = \sup(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$$

Ιδιότητες των $\inf$ **και** $\sup$**.**

1. Για κάθε μη κενό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχουν ακολουθίες $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ με
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(S) \text{ και } \lim_{n\to\infty} b_n = \sup(S).$$

2. Αν $S \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό κάτω φραγμένο σύνολο, τότε
$$a = \inf(S) \iff \begin{cases} \forall x \in S \text{ ισχύει } a \leq x \text{ και} \\ \forall \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } [a, a+\varepsilon) \cap S \neq \emptyset \end{cases}$$

3. Αν $S \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό άνω φραγμένο σύνολο, τότε
$$b = \sup(S) \iff \begin{cases} \forall x \in S \text{ ισχύει } x \leq b \text{ και} \\ \forall \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } (b-\varepsilon, b] \cap S \neq \emptyset \end{cases}$$

4. Αν $A \subseteq B$, τότε
$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

1.3 Οριακοί αριθμοί μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία μη μηδενικών φυσικών αριθμών $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ η ακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ καλείται υπακολουθία της $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Θεώρημα 1.3.1. *(Bolzano-Weierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει συγκλίνουσα σε έναν πραγματικό αριθμό υπακολουθία.*

Θα λέμε ότι $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ είναι οριακό σημείο της $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ όταν υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $\ell = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Θεωρούμε ότι $-\infty < x < \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και L το σύνολο όλων των οριακών σημείων της.*

1. *Αν η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, τότε L είναι μη κενό και έχει μέγιστο και ελάχιστο.*
2. *Αν η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη, τότε $-\infty, \infty \in L$.*
3. *Αν η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι κάτω φραγμένη και είναι ανώ φραγμένη, τότε $-\infty \in L$ και $L \setminus \{-\infty\}$ είτε είναι κενό είτε έχει μέγιστο.*
4. *Αν η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ανώ φραγμένη και είναι κάτω φραγμένη, τότε $\infty \in L$ και $L \setminus \{\infty\}$ είτε είναι κενό είτε έχει ελάχιστο.*

Το κατώτερο όριο $\liminf a_n$ και το ανώτερο όριο $\limsup a_n$ της $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορίζονται ως εξής:

$$\liminf_n a_n = \min\{\ell : \ell \text{ οριακό σημείο της } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}$$
$$\limsup_n a_n = \max\{\ell : \ell \text{ οριακό σημείο της } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

Παρατηρούμε ότι:

1. Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $\liminf_n a_n = -\infty$.
2. Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\limsup_n a_n = \infty$.
3. Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι κάτω φραγμένη και δεν έχει άλλο οριακό σημείο εκτός από το $-\infty$, τότε $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = -\infty$.
4. Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι άνω φραγμένη και δεν έχει άλλο οριακό σημείο εκτός από το ∞, τότε $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = \infty$.

Ιδιότητες των $\liminf_n(a_n)$ και $\limsup_n(a_n)$.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x \in \mathbb{R}$.*

1. $x \leq \liminf_n(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0$ *είναι πεπερασμένο το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$.
2. $x \geq \liminf_n(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0$ *είναι άπειρο το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$.
3. $x \leq \limsup_n(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0$ *είναι άπειρο το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$.
4. $x \geq \limsup_n(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0$ *είναι πεπερασμένο το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$.

Θεώρημα 1.3.4. *Κάθε ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\liminf_n a_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n}(a_k)) = \sup_n(\inf_{k\geq n}(a_k))$$
$$\limsup_n a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n}(a_k)) = \inf_n(\sup_{k\geq n}(a_k)).$$

1.4 Τοπολογία μετρικού χώρου.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος με μετρική d.

Για κάθε $x \in X$ και για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε την *ανοικτη μπάλα* (ε-γειτονιά) με κέντρο x και ακτίνα ε

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Στη μετρική d αντιστοιχεί η εξής τοπολογία του X:

$$T_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists B(x, \varepsilon) \subseteq U\}.$$

Σημειώνουμε ότι

- Ένα υποσύνολο G του X καλείται ανοικτό αν και μόμον αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G$.
- Ένα υποσύνολο F του X καλείται κλειστό αν και μόμον αν το συμπλήρωμα του $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

Μερικές από τις βασικές έννοιες ενός μετρικού χώρου είναι οι ακόλουθες:

- Μια οικογένεια $\mathfrak{B}$ ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X καλείται βάση του X αν κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι ένωση κάποιων στοιχείων της $\mathfrak{B}$.
- Μιά οικογένεια υποσυνόλων $\{O_i\}_{i \in I}$ ενός μετρικού χώρου X καλείται κάλυμμα του X αν
$$X = \bigcup_{i \in I} O_i.$$
- Κάθε κάλυμμα του μετρικού χώρου X που αποτελείται ανοικτά υποσύνολα του X καλείται *ανοικτό κάλυμμα*.
- Κάθε υποοικογένεια δοθέντος καλύμματος του X η οποία είναι επίσης κάλύμμα του X καλείται *υποκάλυμμα* του δοθέντος καλύμματος.
- Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X καλείται *παντού πυκνό* στο X αν $X = Cl(A)$.
- Ένα υποσύνολο G ενός μετρικού χώρου X καλείται *G_δ–σύνολο* όταν το G είναι τομή μιάς το πολύ αριθμήσιμης οικογένειας ανοικτών συνόλων, δηλαδή $G = \bigcap_{j \in J} G_j$, όπου κάθε G_j είναι ανοικτό στο X και το σύνολο J είναι το πολύ αριθμήσιμο.
- Ένα υποσύνολο F ενός μετρικού χώρου X καλείται *F_σ–σύνολο* όταν το F είναι ένωση μιάς το πολύ αριθμήσιμης οικογένειας κλειστών συνόλων, δηλαδή $F = \bigcup_{j \in J} F_n$, όπου κάθε F_j είναι κλειστό στο X και το σύνολο J είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη μερικά θεωρήματα που εκφράζουν τις ιδιότητες της τοπολογίας ενός μετρικού χώρου (X, d).

Θεώρημα 1.4.1. *Σε ένα μετρικό χώρο κάθε ανοικτό υποσύνολο είναι F_σ–σύνολο και G_δ–σύνολο.*

Θεώρημα 1.4.2. *Σε ένα μετρικό χώρο κάθε κλειστό υποσύνολο είναι F_σ–σύνολο και G_δ–σύνολο.*

Θεώρημα 1.4.3. *Ένας μετρικός χώρος X έχει αριθμήσιμη βάση αν και μόνον αν περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο παντού πυκνό στο X.*

Θεώρημα 1.4.4. *Κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός μετρικού χώρου με αριθμήσιμη βάση περιέχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.*

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη μερικά θεωρήματα που εκφράζουν τις ιδιότητες της τοπολογίας του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^n, d_n)$, όπου

$$d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}.$$

Όλα τα θεωρήματα αναφέρονται στο $\mathbb{R}^n$ με την τοπολογία T_{d_n}, η οποία καλείται συνήθης τοπολογία.

Θεώρημα 1.4.5. *Το αριθμήσιμο σύνολο $\mathbb{Q}^n$ είναι παντου πυκνό στο $\mathbb{R}^n$ με συνήθη τοπολογία.*

Θεώρημα 1.4.6. *Ο $\mathbb{R}^n$ με συνήθη τοπολογία έχει αριθμήσιμη βάση.*

Θεώρημα 1.4.7. *Κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$ περιέχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.*

Θεώρημα 1.4.8. *Ο $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμη βάση που αποτελείται από ανοικτά και φραγμένα διαστήματα.*
Επομένως αν U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια $\{(a_j, b_j)\}_{j\in J}$ ώστε $U = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$.

Θεώρημα 1.4.9. *Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση των στοιχείων μιάς αριθμήσιμης οικογένειας ανοικτών διαστημάτων (φραγμένων η μη φραγμένων) του $\mathbb{R}$ που δεν τέμνονται ανά δύο.*

Θεώρημα 1.4.10. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε το σύνολο σημείων ασυνέχειας της f είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.

Συμβολίζουμε με A το σύνολο των σημείων ασυνέχειας του A. Επειδή η f είναι συνεχής σε κάθε μεμονωμένο σημείο, έπεται ότι το A αποτελείται από σημεία συσσώρευσης του E.

Επομένως A είναι ένωση των παρακάτω συνόλων:

$$\begin{aligned} A^- &= \{e \in A : \exists b_e > e \text{ με } (e, b_e) \cap E = \emptyset\} \\ A^+ &= \{e \in A : \exists a_e < e \text{ με } (a_e, e) \cap E = \emptyset\} \\ A^\pm &= \{e \in A : (e - \delta, e) \cap E \neq \emptyset \text{ και } (e, e + \delta,) \cap E \neq \emptyset \ \forall \delta > 0\} \end{aligned}$$

Επειδή ο μετρικός χώρος $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμη βάση, έπεται ότι οι οικογένειες ανοικτών και ξένων συνόλων $\{(a_e, e)\}_{e \in A^+}$ και $\{(e, b_e)\}_{e \in A^-}$ είναι αριθμήσιμες. Άρα, τα σύνολα A^+ και A^- είναι αριθμήσιμες.

Σε κάθε $e \in A^\pm$ θα αντιστοιχήσουμε διάστημα (a_e, b_e) έτσι ώστε η οικογένεια $\{(a_e, b_e)\}_{e \in A^\pm}$ να αποτελείται από ξένα ανά δύο διαστήματα. Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμη βάση, συνεπάγεται ότι η παραπάνω οικογένεια είναι αριθμήσιμη. Άρα, το $A^\pm$ είναι αριθμήσιμο.

Έστω $e \in A$. Επειδή η f είναι αύξουσα έχουμε

$$a_e = \sup\{f(E \cap (-\infty, e))\} \leq f(e) \leq \inf\{f(E \cap (e, \infty)\} = b_e.$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \to e^-} f(x) = a_e$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $x_0 \in E \cap (-\infty, e)$ για το οποίο $a_e - \varepsilon < f(x_0) \leq a_e$. Αν $x \in E \cap (x_0, e)$, τότε λόγω μονοτονίας

$$a_e - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq a_e.$$

Επομένως

$$|f(x) - a_e| \leq |f(x_0) - a_e| < \varepsilon.$$

Συνεπώς $\lim_{x \to e^-} f(x) = a_e$. Όμοια αποδεικνύεται οτι $b_e = \lim_{x \to e^+} f(x)$. Συνεπώς

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = a_e \leq f(e) \leq b_e = \lim_{x \to e^+} f(x).$$

Από την ασυνέχεια της f στο e έπεται ότι $a_e < b_e$.

Αν $e_1, e_2 \in A^\pm$ και $e_1 < e_2$, τότε επειδή η f είναι αύξουσα στο $[e_1, \infty) \cap E$, έπεται ότι:

$$b_{e_1} = \inf\{f(E \cap (e_1, \infty)\} = \inf\{f(E \cap (e_1, e_2))\} \leq \sup\{f(E \cap (e_1, e_2))\} = \sup\{f(E \cap (-\infty, e_2))\} = a_{e_2}.$$

Άρα, $b_{e_1} \leq a_{e_2}$, που σημαίνει ότι $(a_{e_1}, b_{e_1}) \cap (a_{e_2}, b_{e_2}) = \emptyset$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Μέτρο Lebesgue

2.1 Διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ συμβολίζουμε με $< a, b >$ διάστημα του $\mathbb{R}$ με άκρα a και b.
Συμβολίζουμε με το $\mathfrak{D}$ το σύνολο όλων των διαστημάτων του $\mathbb{R}$.
Ορίζουμε απεικόνιση $\ell : \mathfrak{D} \to [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ με

(α) $\ell(< a, b >) = b - a$

(β) $\ell(I) = \infty$, όταν I είναι μη φραγμένο.

Συμφωνούμε ότι:

(i) $-\infty < x < \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{D}$ και ένα από τα διαστήματα I_n είναι μη φραγμένα, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \infty$.

Η απεικόνση ℓ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αν $I_1, I_2 \in \mathfrak{D}$ και $I_1 \subseteq I_2$, τότε $\ell(I_1) \leq \ell(I_2)$.

(ii) Αν $I \in \mathfrak{D}$, τότε $I + x \in \mathfrak{D}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\ell(I + x) = \ell(I)$.

(iii) Άν $\{I_j\}_{j \in J}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο ξένων ανά δύο διαστημάτων και $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j \in \mathfrak{D}$, τότε $\ell(I) = \sum_{j \in J} \ell(I_j)$.

Η Θεωρία μέτρου δίνει απάντηση στο πρόβλημα επέκτασης της απεικόνισης ℓ στο σύνολο $P(\mathbb{R})$ όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Υπάρχει άραγε απεικόνιση $\mu : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Για κάθε διάστημα I ισχύει: $\mu(I) = \ell(I)$.

2. (Μονοτονία της μ) Αν $E_1 \subseteq E_2$, τότε $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$

3. (Αναλλοίωτη ως προς τη μεταφορα η μ) Αν $E \in P(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε $\mu(E + x) = \mu(E)$.

4. (Αριθμήσιμη προσθετικότητα της μ) Αν $\{E_j\}_{j \in J}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε $\mu(\coprod_{j \in J} E_j) = \sum_{j \in J} \mu(E_j)$.

Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχει απεικόνιση $m^* : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ (εξωτερικό μέτρο Lebesgue) που έχει της ιδιότητες $(1) - (3)$ και μια ιδιότητα ασθενέστερη της (4).

Επίσης υπάρχει οικογένεια (μετρήσιμων συνόλων) $\mathscr{M} \subseteq P(\mathbb{R})$ με $\mathfrak{D} \subseteq \mathscr{M}$ για την οποία υπάρχει απεικόνιση $m : \mathscr{M} \to [0, \infty]$, (το μέτρο Lebesgue) που έχει τις ιδιότητες $(1) - (4)$.

Θα δείξουμε ότι απεικόνιση μ με τις ιδιότητες $(1) - (4)$ ορισμένη για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει, δείχνοντας ότι η υπόθεση της ύπαρξης της οδηγεί σε άτοπο όπως φαίνεται από το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.1.1. (Vitali) Στο σύνολο $[0, 1]$ θεωρούμε την εξής σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q},$$

όπου $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. Συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας που περιέχει τον αριθμό x. Σύμφωνα με το αξίωμα επιλογής υπάρχει σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

Θα δείξουμε ότι το σύνολο E είναι μη μετρήσιμο, δηλαδή ο αριθμός $\mu(E)$ δεν μπορεί να οριστεί.

Θεωρούμε το σύνολο

$$T = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (E + q).$$

Παρατηρούμε ότι:

(*i*) $[0, 1] \subseteq T$.

Πράγμτι, αν $x \in [0, 1]$ τότε $[x] = [e]$, όπου $e \in E \subseteq [0, 1]$. Άρα, $x - e \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Συνεπώς $x \in E + (x - e) \subseteq T$.

(*ii*) $T \subseteq [-1, 2]$.

(*iii*) $(E + q_1) \cap (E + q_2) = \emptyset$, όπου $q_1 \neq q_2$ και $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

Διότι το E περιέχει ακριβώς από ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

Από την (*i*) και (*ii*) και τη μονοτονία της μ:

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(T) \leq \mu([-1, 2]) = 3 \Longrightarrow \mu(T) \in [1, 3].$$

Από την (*iii*) και την αριθμήσιμη προσθετικότητα παίρνουμε

$$\mu(T) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(E + q).$$

Επειδή η μ είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορά, έπεται ότι $\mu(E + q) = \mu(E) \in [0, 1]$. Άρα, για να συγκλίνει η παραπάνω σειρά πρέπει $\mu(E) = 0$. Οπότε και $\mu(T) = 0$, που είναι άτοπο αφού $\mu(T) \in [1, 3]$.

2.2 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Για ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq [0,\infty]$ ορίζουμε

$$\inf(A) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } A = \{\infty\}, \\ \inf(A \cap [0,\infty)), & \text{αν } A \cap [0,\infty) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Για κάθε $E \in P(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε με $\mathfrak{D}(E)$ το σύνολο όλων των πολύ αριθμήσιμων οικογενειών ανοικτών διαστημάτων $\{(a_j,b_j)\}_{j\in J} \subseteq \mathfrak{D}$ τέτοιων ώστε $E \subseteq \bigcup_{j\in J}(a_j,b_j)$.

Ορισμός 2.2.1. *Εξωτερικό μέτρο Lebesgue* είναι η απεικόνιση $m^* : P(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ που ορίζεται ως εξής:

$$m^*(E) = \inf\Big\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : \{I_j\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(E)\Big\}.$$

Η απεικόνιση m^* είναι καλά ορισμένη για κάθε $E \in P(\mathbb{R})$, διότι $\mathfrak{D}(E) \neq \emptyset$. Πράγματι, αν $E \neq \emptyset$, τότε $E \subseteq \bigcup_{e\in E}(e-1,e+1) = G(E)$. Από το Θεώρημα 1.4.7 το ανοικτό κάλυμμα $\{(e-1,e+1)\}_{e\in E}$ του ανοικτού συνόλου $G(E)$ έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα $\{(e_n-1,e_n+1)\}_{n=1}^{\infty}$. Συνεπώς υπάρχει ακολουθία $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq$ για την οποία $\{(e_n-1,e_n+1)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{D}(E)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\{(-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n})\} \in \mathfrak{D}(\emptyset)$ και $\{(a-\frac{1}{2n},a+\frac{1}{2n})\} \in \mathfrak{D}(a)$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$.

Παραδείγματα 2.2.2.

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $m^*(\{a\}) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις 2.2.3.

1. Για κάθε $\{I_j\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(E)$ ισχύει $m^*(E) \leq \sum_{j\in J}\ell(I_j)$.
2. Αν $m^*(E) \neq \infty$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\{I_j\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(E)$ με

$$\sum_{j\in J}\ell(I_j) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Πρόταση 2.2.4. *Αν το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, τότε $m^*(E) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή για κάθε n ισχύει $e_n \in I_n = (e_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, e_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$, έπεται ότι $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{D}(E)$. Συνεπώς

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Αν $E = \{e_n\}_{n=1}^{n_0}$, τότε $\{I_n\}_{n=1}^{n_0} \in \mathfrak{D}(E)$. Συνεπώς

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{n_0}\ell(I_n) = \sum_{n=1}^{n_0}\frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n} \leq 2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Αφού $m^*(E) \leq 2\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και $m^*(E) \in [0,\infty]$, έπεται ότι $m^*(E) = 0$. □

Θεώρημα 2.2.4. *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $m^*(I) = \ell(I)$ *για κάθε διάστημα του* $\mathbb{R}$.
2. *Αν* $A \subseteq B \in P(\mathbb{R})$, *τότε* $m^*(A) \le m^*(B)$.
3. $m^*(E + x) = m^*(E)$ *για κάθε* $E \in P(\mathbb{R})$ *και για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.
4. *(Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα) Αν* $\{E_1, E_2, \dots\}$ *είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο στοιχείων του* $P(\mathbb{R})$, *τότε*
$$m^*\Big(\bigcup_n E_n\Big) \le \sum_n m^*(E_n). \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Θα παραλείψουμε την τεχνικά πολύπλοκη απόδειξη της ιδιότητας 1.

2. $\mathfrak{D}(B) \subseteq \mathfrak{D}(A) \Longrightarrow$

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : \{I_j\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(A)\Big\} \le \inf\Big\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : \{I_j\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(A)\Big\} = m^*(B).$$

3. Από τον ορισμό της m^* για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\{I_j^\varepsilon\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(E)$ ώστε

$$\sum_{j\in J} \ell(I_j^\varepsilon) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Τότε $\{I_j^\varepsilon + x\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(E + x)$. Από τον ορισμό της m^* και τις ιδιότητες τις ℓ παίρνουμε

$$m^*(E + x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n^\varepsilon + x) = \sum_{j\in J} \ell(I_j^\varepsilon) < m^*(E) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Συνεπώς, $m^*(E + x) \le m^*(E)$ και $m^*(E) = m^*((E + x) + (-x)) \le m^*(E + x)$ για καθε κάθε $E \in P(\mathbb{R})$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $m^*(E + x) = m^*(E)$.

4. Αν $\sum_n m^*(E_n) = \infty$, τότε η σχέση 2.1 ισχύει.
Έστω ότι $\sum_n m^*(E_n) < \infty$. Τότε $m^*(E_n) < \infty$ για κάθε n.
Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Για κάθε n υπάρχει $\{I_j^n\}_{j\in J_n} \in \mathfrak{D}(E_n)$ με

$$\sum_{j\in J_n} \ell(I_j^n) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Όμως $\bigcup_n\Big(\bigcup_{j\in J_n} I_j^n\Big) \in \mathfrak{D}\big(\bigcup_n E_n\big)$. Συνεπώς

$$m^*\Big(\bigcup_n E_n\Big) \le \sum_n \Big(\sum_{j\in J_n} \ell(I_j^n)\Big) \le \sum_n \Big(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) \le \Big(\sum_n m^*(E_n)\Big) + \varepsilon.$$

Επειδή η παραπάνω ανισότητες ισχύουν για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται η σχέση 2.1.

□

Παράδειγμα 2.2.5. Θα δείξουμε ότι για το σύνολο C του Cantor ισχύει $m^*(C) = 0$.

Πράγματι, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ υπάρχει οικογένεια 2^n κλειστών και ξένων ανά δύο διαστημάτων $\{I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}\}$ τέτοια ώστε $C \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$ και $\ell(I_{n,j}) = \frac{1}{3^n}$. Από το Θεώρημα 2.2.4 συνεπάγεται ότι

$$m^*(C) \leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}\right) \leq \sum_{j=1}^{2^n} m^*(I_{n,j}) = \sum_{j=1}^{2^n} \ell(I_{n,j}) = \frac{2^n}{3^n}.$$

Συνεπώς ως για κάθε n: $m^*(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Όμως $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Άρα, $m^*(C) = 0$.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω $E \in P(\mathbb{R})$.*

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G_ε του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq G_\varepsilon$ και $m^*(G_\varepsilon) \leq m^*(E) + \varepsilon$.

(β) Υπάρχει G_δ-σύνολο G με $E \subseteq G$ και $m^*(E) = m^*(G)$.

Απόδειξη. (α) Αν $m^*(E) = \infty$, τότε $G_\varepsilon = \mathbb{R}$ είναι το ζητούμενο.

Έστω $m^*(E) \neq \infty$. Τότε $\sum_{j\in J} \ell(I_j) < m^*(E) + \varepsilon$ για κάποιο $\{I_j\}_{j\in J} \in \mathfrak{D}(E)$.

Για $G_\varepsilon = \bigcup_{j\in J} I_j$ παίρνουμε

$$m^*(G_\varepsilon) \leq \sum_{j\in J} m^*(I_j) = \sum_{j\in J} \ell(I_j) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ υπάρχει ανοικτο $G_{\frac{1}{n}} \in P(\mathbb{R})$ με $E \subseteq G_{\frac{1}{n}}$ και $m^*(G_{\frac{1}{n}}) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$.

Για G_δ-σύνολο $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$ έχουμε $E \subseteq G$ και

$$m^*(E) \leq m^*(G) \leq m^*(G_{\frac{1}{n}}) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Συνεπώς $m^*(E) = m^*(G)$.

$\square$

2.3 Μετρήσιμα σύνολα

Ορισμός 2.3.1. Ένα σύνολο $M \subseteq \mathbb{R}$ καλείται *μετρήσιμο* (ή *κατά Lebesgue μετρήσιμο*) όταν για κάθε $A \in P(\mathbb{R})$
$$m^*(A) = m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c).$$

Συμβολίζουμε
$$\mathscr{M} = \{M \subseteq \mathbb{R} : \ M \text{ μετρίσημο}\}.$$

Σημείωσεις 2.3.2. Από τον ορισμό του μετρήσιμου συνόλου συνεπάγεται ότι:

1. Αν M είναι μετρήσιμο, τότε M^c είναι μετρήσιμο.
2. $\emptyset, \ \mathbb{R} \in \mathscr{M}$.
3. $M \in \mathscr{M} \Longleftrightarrow m^*(A) \geq m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$.
4. Αν $m^*(M) = 0$, τότε M είναι μετρίσημο.

   Πράγματι, έστω $A \in P(\mathbb{R})$. Επειδή $A \cap M \subseteq M$ και $A \cap M^c \subseteq A$, έπεται ότι $m^*(A \cap M) = 0$ και $m^*(A \cap M^c) \leq m^*(A)$. Άρα, $m^*(A) \geq m^*(A \cap M^c) = m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c)$.

Παραδείγματα 2.3.3.

1. Κάθε αριθμήσιμο σύνολο M είναι μετρήσιμο, διότι $m^*(M) = 0$.
2. Είναι μετρήσιμα τα εξής σύνολα: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, C, $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

2.3.1 Ιδιότητες μετρήσιμων συνόλων

Θεώρημα 2.3.4. *Το σύνολο $\mathscr{M}$ των μετρήσιμων συνόλων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Αν $M_1, \ldots, M_n \in \mathscr{M} \in \mathscr{M}$, τότε $\bigcup_{i=1}^n M_i \in \mathscr{M}$ και $\bigcap_{i=1}^n M_i \in \mathscr{M}$.*
2. *Αν $M_1, \ldots, M_n \in \mathscr{M}$ και τα σύνολα $M_1, \ldots, M_n$ είναι ξένα ανά δύο, τότε*
$$m^*\Big(A \cap \bigsqcup_{i=1}^n M_i\Big) = \sum_{i=1}^n m^*(M_i \cap A), \ \ \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$
3. *Αν $M_1, \ldots, M_n \in \mathscr{M}$ και τα σύνολα $M_1, \ldots, M_n$ είναι ξένα ανά δύο, τότε*
$$m^*\Big(\bigsqcup_{i=1}^n M_i\Big) = \sum_{i=1}^n m^*(M_i).$$
4. *Για κάθε $\{M_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathscr{M}$ υπαρχει ακλολοθία ανά δύο ξενων συνόλων $\{N_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathscr{M}$ τέτοια ώστε $N_i \subseteq M_i$ για καθε i και $\coprod_{i=1}^\infty N_i = \bigcup_{i=1}^\infty M_i$.*
5. *Αν $\{M_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathscr{M}$, τότε $\bigcup_{i=1}^\infty M_i \in \mathscr{M}$ και $\bigcap_{i=1}^\infty M_i \in \mathscr{M}$.*
6. *Αν $M \in \mathscr{M}$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε $M + x \in \mathscr{M}$.*

Απόδειξη. 1. Αρκεί να δείξουμε ότι η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο.
Έστω $M, N \in \mathscr{M}$ και $A \in P(\mathbb{R})$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (M \cup N)) + m^*(A \cap (M \cup N)^c). \tag{2.2}$$

Επειδή $M \in \mathscr{M}$ έχουμε

$$m^*(A) = m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c). \tag{2.3}$$

Επειδή N μετρήσιμο και $A \cap M^c \in P(\mathbb{R})$ παίρνουμε

$$m^*(A \cap M^c) = m^*(A \cap M^c \cap N) + m^*(A \cap M^c \cap N^c). \tag{2.4}$$

Η 2.3 με την βοήθεια της 2.4 γράφεται

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c \cap N) + m^*(A \cap M^c \cap N^c) \\ &= [m^*(A \cap M) + m^*(A \cap M^c \cap N)] + m^*(A \cap (M \cup N)^c) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Επειδή $A \cap (M \cup N) = (A \cap M) \cup (A \cap M^c \cap N)$ έπεται ότι στην 2.5

$$m^*((A \cap M)) + m^*((A \cap M^c \cap N)) \geq m^*(A \cap (M \cup N)) \tag{2.6}$$

Από τις 2.5 και 2.6 έπεται η 2.2.
2. Θα αποδείξουμε την ιδιότητα με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ η ιδιότητα ισχύει.
Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για οικογένεια n συνόλων.
Θεωρούμε την οικογένεια $n+1$ ξένων ανά δύο συνόλων $\{M_1, \ldots, M_n, M_{n+1}\}$.
Επειδή το $M_{n+1} \in \mathscr{M}$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} m^*\Big(A \cap \coprod_{i=1}^{n+1} M_i\Big) &= m^*\Big(\big(A \cap \coprod_{i=1}^{n+1} M_i\big) \cap M_{n+1}\Big) + m^*\Big(\big(A \cap \coprod_{i=1}^{n+1} M_i\big) \cap M_{n+1}^c\Big) = \\ &= m^*(A \cap M_{n+1}) + m^*\big(A \cap \coprod_{i=1}^{n} M_i\big) \overset{\text{επαγωγη}}{=} \\ &= m^*(A \cap M_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} m^*(M_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n+1} m^*(M_i \cap A). \end{aligned}$$

3. Έπεται από την 2 για $A = \mathbb{R}$.
4. Ορίζουμε $N_1 = M_1$ και για $i > 1$ θέτουμε: $N_i = M_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} M_k$.
Τότε $N_i \subseteq M_i$ για κάθε i και τα σύνολα N_i είναι ξένα ανά δύο. Επομένως $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.
Έστω $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ και i_0 είναι ο μικρότερος δείκτης για τον οποίον $x \in M_{i_0}$.
Αν $i_0 = 1$, τότε $x \in M_1 = N_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. Αν $i_0 > 1$, τότε $x \in M_{i_0} \setminus \bigcup_{k=1}^{i_0-1} M_k = N_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$.
Συνεπώς $\coprod_{i=1}^{\infty} N_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Από την ιδιότητα 1 έπεται ότι $N_i = M_i \cap (\bigcup_{k=1}^{i-1} M_k)^c \in \mathscr{M}$.

5. Από την ιδιότητα 5 υπάρχει ακολουθία ανά δύο ξένων συνόλων $\{N_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ τέτοια ώστε $N_i \subseteq M_i$ για καθε i και $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} N_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

Τότε $\bigsqcup_{i=1}^{n} N_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ για κάθε n. Επομένως $(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i)^c \subseteq (\bigsqcup_{i=1}^{n} N_i)^c$ για κάθε n.

Έστω $A \in P(X)$. Επειδή $\bigsqcup_{i=1}^{n} N_i \in \mathscr{M}$ για κάθε n, έπεται ότι

$$m^*(A) = m^*\Big(A \cap \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} N_i\Big)\Big) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} N_i\Big)^c\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap N_i) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} N_i\Big)^c\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap N_i) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big)$$

Επομένως για καθε n: $m^*(A) - m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap N_i)$.

Άρα,

$$m^*(A) - m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap N_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap N_i).$$

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap N_i) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big) \geq m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap N_i)\big) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big) =$$
$$= m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\Big)\Big) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big) = m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)\Big) + m^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big)^c\Big).$$

Συνεπώς, $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathscr{M}$. Επειδή $M_i^c \in \mathscr{M}$ για κάθε i, έπεται ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i^c \in \mathscr{M}$. Άρα,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i\right)^c\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i^c\right)^c \in \mathscr{M}.$$

6. Έστω $A \in P(X)$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$m^*(A) = m^*(A \cap (M + x)) + m^*(A \cap (M + x)^c). \tag{2.7}$$

Από την Πρόταση 1.1.1:

$$A \cap (M + x) = \big((A - x) \cap M\big) + x$$
$$A \cap (M + x)^c = A \cap (M^c + x) = \big((A - x) \cap M^c\big) + x$$

Επειδή M είναι μετρήσιμο, από τις ιδιότητες της απεικόνισης m^* και από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (M + x)) + m^*(A \cap (M + x)^c) &= m^*\big(\big((A - x) \cap M\big) + x\big) + m^*\big(\big((A - x) \cap M^c\big) + x\big) = \\ &= m^*\big((A - x) \cap M\big) + m^*\big((A - x) \cap M^c\big) = \\ &= m^*(A - x) = m^*(A) \end{aligned}$$

Από όπου συνεπάγεται η (2.7). $\square$

Πρόταση 2.3.5. *Κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο, δηλαδή $\mathfrak{D} \subseteq \mathscr{M}$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι είναι μετρήσιμα τα διαστήματα της μορφής (a, ∞). Οπότε από τις ιδιότητες των μετρήσιμων συνόλων συμπεραίνουμε ότι είναι μετρήσιμα και τα διαστήματα όλων των άλλων μορφών ως εξής:

$$\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \mathbb{R} \setminus (a, \infty) \\
(-\infty, a) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right] \\
(a, b) &= (-\infty, b) \cap (a, \infty) \\
[a, \infty) &= \mathbb{R} \setminus (-\infty, a) \\
(-\infty, \infty) &= (-\infty, a) \cup [a, \infty)
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.3.5. *Τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι μετρίσημα.*

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$ είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους φραγμένων διαστημάτων της μορφής (a, b), τα οποία είναι μετρήσιμα. Άρα, U είναι μετρήσιμο από το Θεώρημα 2.3.4.

Κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συμπλήρωμα ανοικτού υποσυνόλου, το οποίο είναι μετρήσιμο. □

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετρήσιμου συνόλου και το Θεώρημα 2.2.6 αποδεικνύεται το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.6. *Για $M \subseteq \mathbb{R}$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(a) $M \in \mathscr{M}$.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $A \supseteq M$ με $m^*(A \setminus M) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει G_δ-σύνολο $G \supseteq M$ με $m^*(G \setminus M) = 0$.

(δ) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $K \subseteq M$ με $m^*(M \setminus K) < \varepsilon$.

(ϵ) Υπάρχει F_σ-σύνολο $F \subseteq M$ με $m^*(M \setminus F) = 0$.

2.4 Το μέτρο Lebesgue

Ορισμός 2.4.1. Ονομάζουμε *μέτρο Lebesgue* την απεικόνιση $m : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ με

$$m(M) = m^*(M).$$

Θεώρημα 2.4.2. *Το μέτρο Lebesgue έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $m(I) = \ell(I)$ *για κάθε διάστημα* I.

2. *Αν* $N \subseteq M \in \mathscr{M}$, *τότε* $m(N) \leq m(M)$.

3. $m(M + x) = m(M)$, $\forall M \in \mathscr{M}$ *και* $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. $m\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(M_i)$ *για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων* $\{M_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες 1-3 συνεπάγονται από τον ορισμό της m, τις ιδιότητες της απεικόνισης m^* και τις ιδιότητες μετρήσιμων συνόλων. Θα αποδείξουμε την ιδιότητα 4.

Από τις ιδιότητες των μετρήσιμων συνόλων (Θεώρημα 2.3.4) $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathscr{M}$. Οπότε από τις ιδιότητες της απεικόνισης m^* παίρνουμε:

$$m\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = m^*\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(M_i)$$

Επειδή για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i \supseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} M_i$ και $m\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(M_i)$, από την ιδιότητα 2 του Θεωρήματος έπεται ότι

$$m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \geq m\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(M_i).$$

Άρα,

$$m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} m(M_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(M_i).$$

$\square$

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω* $M_1, M_2 \in \mathscr{M}$.

(α) Αν $M_1 \subseteq M_2$, *τότε* $m(M_1) + m(M_2 \setminus M_1) = m(M_2)$.

(β) Αν $M_1 \subseteq M_2$ *και* $m(M_1) < \infty$, *τότε* $m(M_2 \setminus M_1) = m(M_2) - m(M_1)$.

(γ) $m(M_1) + m(M_2) = m(M_1 \cup M_2) + m(M_1 \cap M_2)$.

Απόδειξη. (α) Αν $M_1 \subseteq M_2$, τότε $M_2 = M_1 \coprod (M_2 \setminus M_1)$. Επομένως, από το Θεώρημα 2.3.4:

$$m(M_2) = m^*(M_2) = m^*(M_1) + m^*(M_2 \setminus M_1) = m(M_1) + m(M_2 \setminus M_1).$$

(β) Προκύπτει άμεσα από την πρόταση (α) του Θεωρήματος, διότι αν $m(M_1) < \infty$ τότε για κάθε $m(M_2) \in [0, \infty]$ είναι καλά ορισμένος ο αριθμός $m(M_2) - m(M_1)$. .

(γ) Αν $m((M_1 \cap M_2) = \infty$, τότε η ιδιότητα ισχύει.

Έστω $m((M_1 \cap M_2) < \infty$. Επειδή

$$M_1 \cup M_2 = (M_1 \setminus (M_1 \cap M_2)) \coprod (M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)) \coprod (M_1 \cap M_2),$$

από την ιδιότητα (β) και την αριθμήσιμη προσθετηκότητα :

$$\begin{aligned} m(M_1 \cup M_2) &= m(M_1 \setminus (M_1 \cap M_2)) + m(M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)) + m(M_1 \cap M_2) = \\ &= m(M_1) - m(M_1 \cap M_2) + m(M_2) - m(M_1 \cap M_2) + m(M_1 \cap M_2) = \\ &= m(M_1) + m(M_2) - m(M_1 \cap M_2). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω $\{M_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$.*

(α) Αν $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$, τότε $m\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = \lim\limits_{i\to\infty} m(M_i)$.

(β) Αν $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ και $m(M_1) < \infty$, τότε $m\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = \lim\limits_{i\to\infty} m(M_i)$.

Απόδειξη. (α) Θέτουμε $N_1 = M_1$ και $N_i = M_i \setminus M_{i-1}$ για $i > 1$.

Τότε N_i είναι ξένα ανά δύο και $\coprod_{i=1}^{\infty} N_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

Επειδή για κάθε $i > 1$ ισχύει: $M_{i-1} \subseteq M_i$ έπεται ότι $M_i = \coprod_{k=1}^{i} N_k$ για κάθε i. Επομένως,

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = m\Big(\coprod_{i=1}^{\infty} N_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(N_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} m(N_i)\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\coprod_{i=1}^{n} N_i)\right) = \lim_{n\to\infty} m(M_n).$$

(β) Αν $M_i \supseteq M_{i+1}$ για κάθε i, τότε $M_1 \setminus M_i \subseteq M_1 \setminus M_{i+1}$ για κάθε $i > 1$.

Από την (α) έπεται ότι

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(M_1 \setminus M_i)\Big) = \lim_{i\to\infty} m(M_1 \setminus M_i).$$

Από τα παραπάνω και το Θεώρημα 2.4.3 παίρνουμε

$$m(M_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(M_1 \setminus M_i)\right) = \lim_{i\to\infty} m(M_1 \setminus M_i)$$

$$m(M_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i) = m(M_1) - m(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i)$$

Άρα

$$m(M_1) - m(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i) = \lim_{i\to\infty} m(M_1 \setminus M_i) = \lim_{i\to\infty}\left(m(M_1) - m(M_i)\right) = m(M_1) - \lim_{i\to\infty} m(M_i).$$

Συνεπώς $m\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = \lim\limits_{i\to\infty} m(M_i)$.

□

2.5 Αφηρημένη Θεωρία μέτρου.

2.5.1 σ-Άλγεβρες.

Ορισμός 2.5.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο.
Άλγεβρα στο X είναι ένα μη κενό σύνολο $\mathscr{A} \subseteq P(X)$ που έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $M \in \mathscr{A} \implies M^c \in \mathscr{A}$
2. $M, N \in \mathscr{A} \implies M \cup N \in \mathscr{A}$

   Από τις ιδιότητες 1 και 2 της άλγεβρας $\mathscr{A}$ συνεπάγεται ότι:
3. $M, N \in \mathscr{A} \implies M \cap N = (M^c)^c \cap (N^c)^c = (M^c \cup N^c)^c \in \mathscr{A}$
4. $M, N \in \mathscr{A} \implies M \setminus N = M \cap N^c \in \mathscr{A}$.

Παραδείγματα 2.5.2.

1. $P(X)$ είναι άλγεβρα στο X για κάθε μη κενό σύνολο X.
2. Τα σύνολα X και $\emptyset$ είναι στοιχεία κάθε άλγεβρας $\mathscr{A}$ μη κενού συνόλου X.
   Πράγματι, $X = A \cup A^c$ και $\emptyset = A \cap A^c$ για κάθε $A \in \mathscr{A}$.
3. Για κάθε υποσύνολο M μη κενού συνόλου X η οικογένεια $\{M, M^c, X, \emptyset\}$ είναι άλγεβρα στο X.
4. $\{\{1\}, \{4\}, \{1, 4\}\}$ δεν είναι άλγεβρα στο $\mathbb{N}$.
5. Μια T_1-τοπολογία είναι άλγεβρα αν και μόνον αν είναι διακριτή.

Ορισμός 2.5.3. Έστω X ένα μη κενό σύνολο.
Ένα μη κενό σύνολο $\mathscr{A} \subseteq P(X)$ καλείται *σ-άλγεβρα* στο X όταν έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $M \in \mathscr{A} \implies M^c \in \mathscr{A}$
2. $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{A}$

   Από τις ιδιότητες 1 και 2 της σ-άλγεβρας $\mathscr{A}$ συνεπάγεται ότι:
3. $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{A}$.
4. Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα.

Παραδείγματα 2.5.4.

1. $P(X)$ είναι σ-άλγεβρα στο X για κάθε μη κενό σύνολο X.
2. Το σύνολο $\mathscr{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$.
3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και

$$\mathscr{A} = \{F \subseteq X : F \text{ ανοικτό και κλειστό στο } X\}.$$

   Η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα που δεν ειναι πάντα σ-άλγεβρα.

4. Αν $\mathscr{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα του X και $K \in \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}$, τότε $\mathscr{A}_K = \{M \cap K : M \in \mathscr{A}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα του K.

5. Αν X είναι άπειρο σύνολο, τότε
$$\mathscr{A} = \{M \in P(X) : M \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο ή } M^c \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο}\}$$
είναι σ-άλγεβρα του X.

Πρόταση 2.5.5. *Για κάθε μη κενό σύνολο X και για κάθε μη κενό σύνολο $\mathscr{E} \subseteq P(X)$ υπάρχει μιά ελάχιστη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{E})$ στο X με $\mathscr{E} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$.*

Απόδειξη. Μια σ-άλγεβρα στο X που περιέχει το $\mathscr{E}$ είναι το $P(X)$. Έστω F το σύνολο όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν το $\mathscr{E}$. Τότε
$$\sigma(\mathscr{E}) = \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathrm{F}} \mathscr{A}$$
είναι η ζητούμενη ελάχιστη σ-άλγεβρα.

Πράγματι, αν $M \in \sigma(\mathscr{E})$, τότε M είναι στοιχείο κάθε σ-αλγεβρας $\mathscr{A} \in F$. Άρα, M^c είναι στοιχείο κάθε σ-αλγεβρας $\mathscr{A} \in F$. Συνεπώς $M^c \in \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathrm{F}} \mathscr{A} = \sigma(\mathscr{E})$.

Αν $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$, τότε $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ για κάθε σ-αλγεβρα $\mathscr{A} \in F$. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \mathscr{A}$ για κάθε $\mathscr{A} \in F$. Συνεπώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathrm{F}} \mathscr{A} = \sigma(\mathscr{E})$.

□

Ορισμός 2.5.6. Το σύνολο $\sigma(\mathscr{E})$ καλείται σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathscr{E}$.

Παραδείγματα 2.5.7.

1. Αν $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι μη κενά υποσύνολα μη κενού συνόλου X και $\mathscr{E}_1 \subseteq \sigma(\mathscr{E}_2)$, τότε $\sigma(\mathscr{E}_1) \subseteq \sigma(\mathscr{E}_2)$.
   Διότι από τις δύο σ-άλγεβρες $\sigma(\mathscr{E}_1)$ και $\sigma(\mathscr{E}_2)$ που περιέχουν το $\mathscr{E}_1$ η $\sigma(\mathscr{E}_1)$ είναι η μικρότερη.

2. $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$.

3. $\sigma(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(\mathscr{E})$ για κάθε μη κενό $\mathscr{E} \subseteq P(X)$.

4. Για το σύνολο $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ όλων των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ η σ-άλγεβρα $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ καλείται *Borel σ-άλγεβρα*. Επειδή $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{M}$ και $\mathscr{M}$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}$.

5. Αν $\mathscr{F}$ είναι οποιαδήποτε από της οικογένειες διαστημάτων του $\mathbb{R}$:
$$\{(a,b) : a < b\}, \quad \{(a,b] : a < b\}, \quad \{[a,b) : a < b\}, \quad \{[a,b] : a < b\},$$
$$\{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\},\ \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\},\ \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\},\ \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\},$$
   τότε $\sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{B}$.
   Για κάθε $\mathscr{F}$ αποδεικνύεται ότι, $\mathscr{F} \subseteq \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ και $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathscr{F})$.
   Επομένως $\sigma(\mathscr{F}) \subseteq \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ και $\sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathscr{F})$. Συνεπώς $\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) = \mathscr{B}$.

6. Θεωρούμε ότι τα ανοικτα της εκτεταμένης ευθείας $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ είναι οι ενώσεις διαστημάτων των μορφών: $[-\infty, a)$, $(a, \infty]$, (a, b) με $a, b \in \mathbb{R}$. Το σύνολο

$$\overline{\mathscr{B}} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \big\{B, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\}\big\}$$

είναι σ-άλγεβρα του $\overline{\mathbb{R}}$ που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα του $\overline{\mathbb{R}}$.

2.5.2 Χώροι μέτρου.

Ορισμός 2.5.8. Έστω $\mathscr{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο σύνολο X.
Μιά απεικόνιση $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ καλείται *μέτρο στο* X όταν έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathscr{A}$, τότε $\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Η τριάδα $(X, \mathscr{A}, \mu)$ καλείται *χώρος μέτρου*.
Το μέτρο μ καλείται *πεπερασμένο*, όταν $\mu(E) < \infty$ για κάθε $E \in \mathscr{A}$.
Το μέτρο μ καλείται *σ-πεπερασμένο*, όταν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ με $E_n \in \mathscr{A}$ και $\mu(E_n) < \infty$ για κάθε n.
Ο χώρος μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$ καλείται *χώρος πιθανότητας*, όταν $\mu(X) = 1$.

Παραδείγματα 2.5.9.

1. Η τριάδα $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, όπου $\mathscr{M}$ είναι το σύνολο των κατά Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και m είναι μέτρο Lebesgue, είναι χώρος μέτρου.
2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $a \in X$. Ορίζουμε $\mu_a : P(X) \to [0, \infty]$ με

$$\mu_a(E) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \notin E; \\ 1, & \text{αν } a \in E \end{cases}$$

   Η μ_a είναι μέτρο στο X, το οποίο καλέιται *μέτρο Dirac ή σημειακή μάζα*.

   Θα δείξουμε ότι μ_a είναι μέτρο. Έχουμε $\mu_a(\emptyset) = 0$, διότι $a \notin \emptyset$.

   Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων του $P(X)$, τότε a μπορεί να ανήκει το πολύ σε ένα από αυτά.

   Αν a ανήκει σε ένα μόνο από τα E_n, τότε $\mu_a(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

   Αν a δεν ανήκει σε κανένα ένα από τα E_n, τότε $\mu_a(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

3. Συμβολίζουμε με $|E|$ τον πληθάριθμο του συνόλου E. Ορίζουμε $\mu_{\mathbb{N}} : P(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ με

$$\mu_{\mathbb{N}}(E) = \begin{cases} |E|, & \text{αν } E \text{ είναι πεπερασμένο,} \\ \infty, & \text{αν } E \text{ είναι άπειρο.} \end{cases}$$

   Η $\mu_{\mathbb{N}}$ είναι σ–πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{N}$, το οποίο καλείται *μέτρο αρίθμησις*.

4. Αν $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $F \in \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}$, τότε $\mathscr{A}_F = \{F \cap E : E \in \mathscr{A}\}$ είναι σ–άλγεβρα στο F και $\mu_F : \mathscr{A}_F \to [0, \infty]$ με $\mu_F(E) = \mu(E)$ είναι μέτρο στο F, το οποίο καλείται περιορισμός του μ στο F.

2.5.3 Ιδιότητες χώρου μέτρου.

Θεώρημα 2.5.10. *Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.*

1. *(Πεπερασμένη προσθετικότητα) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{n_0}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία του $\mathscr{A}$, τότε*
$$\mu\left(\coprod_{n=1}^{n_0} E_n\right) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu(E_n).$$
2. *(Μονοτονία) Αν $A, B \in \mathscr{A}$ και $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. *(Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$, τότε $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.*
4. *(Συνέχεια από κάτω) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ και $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, τότε*
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$
5. *(Συνέχεια από πάνω) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ και $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ και $\mu(E_1) < \infty$, τότε*
$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Απόδειξη. 1. Θέτουμε $E_{n_0+k} = \emptyset$ για κάθε $k = 1, 2. \ldots$. Τότε $\mu(E_{n_0+k}) = \mu(\emptyset) = 0$ για κάθε k. Από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου μ παίρνουμε:
$$\mu\left(\coprod_{n=1}^{n_0} E_n\right) = \mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu(E_n).$$

2. $B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

3. Θέτουμε $N_1 = E_1$ και $N_n = E_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)^c$ για $n > 1$. Τότε $N_n \subseteq E_n$, τα N_n είναι ξένα ανά δύο και $\coprod_{n=1}^{\infty} N_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Συνεπώς
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

4. Ίδια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.4 (α).

5. Ίδια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.4 (β).

□

Κεφάλαιο 3

Μετρήσιμες συναρτήσεις.

3.1 Ορισμός και χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Ορισμός 3.1.1. Μιά συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $M \in \mathscr{M}$ καλείται *μετρήσιμη* (ή *κατά Lebesgue μετρήσιμη*), όταν $f^{-1}(U) \in \mathscr{M}$ για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.1.2. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για μια απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $M \in \mathscr{M}$:*

(i) f είναι μετρήσιμη.

(ii) $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(iii) $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(iv) $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(v) $f^{-1}((-\infty,a]) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(vi) $f^{-1}((a,b)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

Απόδειξη. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα του $\mathscr{M}$ να είναι σ-άλγεβρα.

$(i) \implies (ii)$ Από τον ορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης, διότι $U = (a,\infty)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

$(ii) \implies (iii)$ $f^{-1}([a,\infty)) = f^{-1}\big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (a - \frac{1}{k}, \infty)\big) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a - \frac{1}{k}, \infty)) \in \mathscr{M}$.

$(iii) \implies (iv)$ $f^{-1}((-\infty,a)) = M \setminus f^{-1}([a,\infty)) \in \mathscr{M}$.

$(iv) \implies (v)$ $f^{-1}((-\infty,a]) = f^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{k})\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, a + \frac{1}{k})) \in \mathscr{M}$.

$(v) \implies (vi)$ $(a,b) = (-\infty,a]^c \cap (-\infty,b) = (-\infty,a]^c \cap \big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{k}]\big)$. Επομένως

$$f^{-1}((a,b)) = \big(f^{-1}((-\infty,a])\big)^c \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\Big(\Big(-\infty, b - \frac{1}{k}\Big]\Big)\right) \in \mathscr{M}.$$

$(vi) \implies (i)$ Έστω U ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Τότε $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, όπου κάθε (a_i, b_i) είναι φραγμένο διάσημα και $a_i < b_i$. Συνεπώς $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((a_i, b_i)) \in \mathscr{M}$. □

Παραδείγματα 3.1.3.

1. Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f : M \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε $f^{-1}(y) \in \mathscr{M}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

   Αν $y \notin f(M)$, τότε $f^{-1}(y) = \emptyset \in \mathscr{M}$.

   Αν $y \in f(M)$, τότε $f^{-1}(y) = f^{-1}((-\infty, y]) \cap f^{-1}([y, \infty)) \in \mathscr{M}$, διότι $f^{-1}((-\infty, y]) \in \mathscr{M}$ και $f^{-1}([y, \infty)) \in \mathscr{M}$ και $\mathscr{M}$ είναι άλγεβρα συνόλων.

2. Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f, g : M \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, τότε είναι μετρήσιμα τα σύνολα: $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f = g\}$.

   Αρκεί να δείξουμε ότι το καθένα από τα παραπάνω σύνολα είναι τομή ή ένωση πεπερασμένου πλήθους μετρήσιμων συνόλων. Πράγματι:

   $$\{f < g\} = \{x \in M : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[f^{-1}((-\infty, r)) \cap g^{-1}((r, \infty))\right] \in \mathscr{M}$$
   $$\{f \leq g\} = \{x \in M : f(x) \leq g(x)\} = M \cap \{g < f\}^c \in \mathscr{M}$$
   $$\{f = g\} = \{x \in M : f(x) = g(x)\} = \{f \leq g\} \cap \{g \leq f\} \in \mathscr{M}$$

Θεώρημα 3.1.4. *Μια απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}$, $M \in \mathscr{M}$, είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$ για κάθε $B \in \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}})$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι η οικογένεια $\mathscr{F} = \{F \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(F) \in \mathscr{M}\}$ είναι σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$.

Αν $F \in \mathscr{F}$, τότε $f^{-1}(F^c) = \left(f^{-1}(F)\right)^c \in \mathscr{M}$, διότι $f^{-1}(F)$ είναι στοιχείο της άλγεβρας $\mathscr{M}$.

Αν $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$, τότε $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(F_i) \in \mathscr{M}$, διότι $f^{-1}(F_i) \in \mathscr{M}$ για κάθε i.

Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{F}$. Άρα, $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathscr{F}$. Δηλαδή $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$ για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Αντίστροφα, αν $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$ για κάθε $B \in \mathscr{B}$, τότε $f^{-1}(U) \in \mathscr{M}$ για κάθε U είναι ανοικτο στο $\mathbb{R}$, διότι $U \in \mathscr{B}$. Άρα, f είναι μετρήσιμη.

□

3.2 Οικογένεις μετρήσιμων συναρτήσεων.

Ορισμός 3.2.1. Θα λέμε ότι η ιδιότητα P *ισχύει σχεδόν παντου* στο $E \subseteq \mathbb{R}$ αν το σύνολο των σημείων $x \in E$ στα οποία η P δεν ισχύει είναι μέτρου 0.

Μια απεικόνιση $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in P(\mathbb{R})$, καλείται *σχεδόν παντού συνεχής* στο E, όταν η f είναι σχεδόν παντού συνεχής στο E.

Οι απεικονίσεις $f, g : E \to \mathbb{R}$, $E \in P(\mathbb{R})$, καλούνται *ισοδύναμες*, όταν $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω $M \in \mathscr{M}$ και $f : M \to \mathbb{R}$.*

1. *Αν η f είναι συνεχής, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

2. *Αν η f είναι σχεδόν παντού συνεχής στο M, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

3. *Αν η f είναι μονοτονη, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

4. *Αν $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$, $\{M_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ και $f\big|_{M_i}$ είναι μετρήσιμη για κάθε i, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

5. *Αν $f, g : M \to \mathbb{R}$ είναι ισοδύναμες και η g είναι μετρήσιμη, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω U ανοικτο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο με τις προυποθέσεις τις καθεμιάς από τις προτάσεις $1-5$.

1. Επειδή η f είναι συνεχής, $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο M. Επομένως υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U^* του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f^{-1}(U) = M \cap U^*$. Το $M \in \mathscr{M}$ από την υπόθεση και $U^* \in \mathscr{M}$ ως ανοικτό. Συνεπώς $f^{-1}(U) \in \mathscr{M}$ ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.

2. Έστω M^* το σύνολο των σημείων ασυνέχεις της f. Επειδή η f είναι σχεδόν παντού συνεχής στο M, έπεται ότι $m(M^*) = 0$ και η f είναι συνεχής στο $M \setminus M^*$. Συνεπώς
$$f^{-1}(U) = \big(M^* \cap f^{-1}(U)\big) \cup \big((M \setminus M^*) \cap f^{-1}(U)\big),$$
όπου $M^* \cap f^{-1}(U)$ μετρήσιμο ως μηδενικού μέτρου και $\big(M \setminus M^*\big) \cap f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο από την 1. Συνεπώς $f^{-1}(U) \in \mathscr{M}$ ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.

3. Επειδή η f είναι μονότονη, το σύνολο των σημείων ασυνέχεις της f είναι αριθμήσιμο και, άρα, είναι μέτρου 0. Επομένως η f είναι μετρήσιμη από την 2, ως σχεδόν παντού συνεχής στο M.

4. Επειδή $f\big|_{M_i}$ είναι μετρήσιμη για κάθε i, έπεται ότι $\left(f\big|_{M_i}\right)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap M_i \in \mathscr{M}$ για κάθε i. Συνεπώς $f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap \coprod_{i=1}^{\infty} M_i = \coprod_{i=1}^{\infty}\big(f^{-1}(U) \cap M_i\big) \in \mathscr{M}$ ως ένωση αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμων συνόλων.

5. Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι ισοδύναμες στο M, το σύνολο $M^* = \{x \in M : f(x) \neq g(x)\}$ είναι μέτρου 0. Άρα, $M^* \in \mathscr{M}$. Συνεπώς
$$f^{-1}(U) = \big(M^* \cap f^{-1}(U)\big) \cup \big((M \setminus M^*) \cap f^{-1}(U)\big) = \big(M^* \cap f^{-1}(U)\big) \cup \{f = g\} \in \mathscr{M}$$
ως ένωση μετρήσιμων συνόλων.

□

Παράδειγμα 3.2.3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι μετρήσιμη και δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

3.3 Ιδιότητες μετρήσιμων συναρτήσεων.

3.3.1 Πράξεις και συνθέσεις μεταξύ των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Κάθε $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μετρήσιμων συναρτήσεων ως εξής. Ορίζουμε $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, όπου $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ είναι η διαδική μορφή του x ($a_n = 0$ ή $a_n = 1$). Αποδεικνύεται ότ η h γνησίως αύξουσα και, άρα, μετρήσιμη. Επίσης $h([0,1])$ είναι υποσύνολο του συνόλου του Cantor C. Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με
$$g(x) = \begin{cases} f(h^{-1}(x)), & x \in h([0,1]) \\ 0, & x \notin h([0,1]). \end{cases}$$
Αποδεικνύεται ότι η g είναι μετρήσιμη και $f(x) = g(h(x))$.

Επειδή υπάρχουν μη μετρήσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,1]$, έπεται ότι μια μη μετρήσιμη συνάρτηση μπορεί να είναι σύνθεση μετρήσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή, η σύνθεση μετρήσιμων συναρτήσεων μπορεί να μην είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Ισχύει όμως το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.1. *Αν $f : M \to \mathbb{R}$ με $M \in \mathscr{M}$, είναι μετρήσιμη, $f(M) \subseteq N \in \mathscr{M}$ και $g : N \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $g \circ f$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω U ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Επειδή η g είναι συνεχής στο N, $g^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο N. Άρα, $f(M) \cap g^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $f(M)$. Επομένως υπάρχει U^* ανοικτό στο $\mathbb{R}$ για το οποίο $f(M) \cap g^{-1}(U) = f(M) \cap U^*$. Συνεπώς

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}\big(f(M) \cap g^{-1}(U)\big) = f^{-1}(f(M) \cap U^*) = M \cap f^{-1}(U^*).$$

Επειδή η f είναι μετρήσιμη και U^* ανοικτό στο $\mathbb{R}$, έχουμε $f^{-1}(U^*) \in \mathscr{M}$. Επειδή $\mathscr{M}$ είναι σ-άλγεβρα και τα σύνολα M και $f^{-1}(U^*)$ είναι μετρήσιμα , συμπεραίνουμε ότι $(g \circ f)^{-1}(U) = M \cap f^{-1}(U^*) \in \mathscr{M}$.

□

Θεώρημα 3.3.2. *Αν $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f, g : M \to \mathbb{R}$ με $M \in \mathscr{M}$, είναι μετρήσιμες, τότε $h : M \to \mathbb{R}$ με $h(x) = F(f(x), g(x))$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω U ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Επειδή η F είναι συνεχής, το σύνολο $F^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$. Τα σύνολα της μορφής $(a, b) \times (c, d)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, ο οποίος έχει αριθμήσιμη βάση. Αρα, $F^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{\infty} ((a_i, b_i) \times (c_i, d_i))$. Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι μετρήσιμες, έπεται ότι $f^{-1}(a_i, b_i), g^{-1}(c_i, d_i) \in \mathscr{M}$ για κάθε i. Συνεπως

$$\begin{aligned} h^{-1}(U) &= \{x \in M : F(f(x), g(x)) \in U\} = \{x \in M : (f(x), g(x)) \in F^{-1}(U)\} = \\ &= \{x \in M : (f(x), g(x)) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} ((a_i, b_i) \times (c_i, d_i))\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(f^{-1}(a_i, b_i) \cap g^{-1}(c_i, d_i)\big) \in \mathscr{M} \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.3.3. *Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f, g : M \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, τότε είναι μετρήσιμες οι συναρτήσεις:*

(a) $f + g$,

(b) fg,

(c) cf, *για κάθε* $c \in \mathbb{R}$,

(d) $|f|$, f^- *και* f^+, *όπου* $f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$ *και* $f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0. \end{cases}$

Απόδειξη. *(a)* Από το Θεώρημα 3.3.2 για $F(u, v) = u + v$.

(b) Από το Θεώρημα 3.3.2 για $F(u, v) = uv$.

(c) Από το *(b)* για την συνεχή, άρα και μετρήσιμη, συνάρτηση $g : M \to \mathbb{R}$ με $g(x) = c$.

(d) $|f| = g \circ f$, για $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$. Άρα, $|f|$ μετρήσιμη από το Θεώρημα 3.3.1.

Από τα παραπάνω οι συναρτήσεις $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ και $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ είναι μετρήσιμες.

□

3.3.2 Θεώρημα του Luzin.

Θεώρημα 3.3.4. *(Πρώτη μορφή) Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f : M \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $M_\varepsilon \subseteq M$ τέτοιο ώστε η $f|_{M_\varepsilon}$ είναι συνεχής στο M_ε και $m(M \setminus M_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με άκρα ρητούς αριθμούς. Επειδή η f είναι μετρήσιμη, κάθε $f^{-1}(I_j)$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του M. Από το Θεώρημα 2.3.6 υπάρχει στο $\mathbb{R}$ ανοικτό σύνολο A_j και κλειστό σύνολο K_j με

$$K_j \subseteq f^{-1}(I_j) \subseteq A_j \text{ και } m(A_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{3.1}$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $M_\varepsilon = M \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus K_j)$ είναι το ζητούμενο.

Έχουμε

$$m(M \setminus M_\epsilon) = m(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus K_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Θα δείξουμε ότι η $f|_{M_\varepsilon}$ είναι συνεχής στο M_ε. Έστω G ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Τότε G είναι ένωση διαστημάτων της οικογένειας $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$. Επομένως $(f|_{M_\varepsilon})^{-1}(G)$ είναι ένωση συνόλων της μορφής $(f|_{M_\varepsilon})^{-1}(I_j) = f^{-1}(I_j) \cap M_\varepsilon$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $f^{-1}(I_j) \cap M_\varepsilon$ είναι ανοικτό στο M_ε.

Για κάθε $j_0 \in J$ έχουμε

$$\begin{aligned}
A_{j_0} \cap M_\varepsilon = \{x \in A_{j_0} : x \in M_\varepsilon\} &= \{x \in A_{j_0} : x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus K_j)\} = \\
&= \{x \in A_{j_0} : x \notin A_j \setminus K_j, \forall j \in J\} = \{x \in K_{j_0} : x \notin A_j \setminus K_j, \forall j \in J\} = \\
&= \{x \in K_{j_0} : x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus K_j)\} = \{x \in A_{j_0} : x \in M_\varepsilon\} = K_{j_0} \cap M_\varepsilon
\end{aligned}$$

Από την (3.1) συμπεραίνουμε ότι $K_{j_0} \cap M_\varepsilon = f^{-1}(I_{j_0}) \cap M_\varepsilon = A_{j_0} \cap M_\varepsilon$. Επειδή A_j είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$, το $A_j \cap M_\varepsilon$ είναι ανοικτό στο M_ε. Επομένως $f^{-1}(I_{j_0}) \cap M_\varepsilon$ είναι ανοικτό στο M_ε. □

Σημείωση 3.3.5. Από το Θεώρημα του Luzin δεν συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M_\varepsilon \subseteq M$ ώστε τα σημεία του M_ε να είναι σημεία συνέχειας της f, αλλά ότι ο περιορισμός $f|_{M_\varepsilon}$ της f στο M_ε είναι συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, η $f = \chi_Q : [0,1] \to \{0,1\}$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[0,1]$, όμως ο περιορισμός $\chi_Q|_Q$ είναι συνεχής στο Q ως σταθερή συνάρτηση με τιμή 1 σε κάθε $q \in Q$.

Θεώρημα 3.3.6. *(Δεύτερη μορφή) Αν $M \in \mathscr{M}$, $m(M) < \infty$ και $f : M \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_\varepsilon \subseteq M$ τέτοιο ώστε η $f|_{K_\varepsilon}$ είναι συνεχής στο K_ε και $m(M \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.3.4 υπάρχει υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $L \subseteq M$ τέτοιο ώστε η $f|_L$ είναι συνεχής στο L και $m(M \setminus L) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από το Θεώρημα 2.3.6 υπάρχει στο $\mathbb{R}$ κλειστό σύνολο K με

$$K \subseteq L \text{ και } m(L \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Άρα,

$$m(M \setminus K) \leq m(M \setminus L) + m(L \setminus K) < \varepsilon.$$

Το K είναι κλειστό και πεπερασμένου μέτρου και η f είναι συνεχής στο K, όμως το K μπορεί να μην είναι φραγμένο για να είναι συμπαγές.

Θεωρούμε τα συμπαγή σύνολα $K_n = K \cap [-n, n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Προφανώς $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Επειδή $M \setminus K_1 \supseteq M \setminus K_2 \supseteq \ldots$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty}(M \setminus K_n) = M \setminus K$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} m(M \setminus K_n) = m(M \setminus K) < \varepsilon.$$

Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $m(M \setminus K_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Το σύνολο $K_\varepsilon = K_{n_0}$ είναι το ζητούμενο, διότι η $f|_{K_\varepsilon}$ είναι συνεχής στο $K_\varepsilon \subseteq K \subseteq L$. □

Θεώρημα 3.3.7. *(Τρίτη μορφή) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και υπάρχει $M \in \mathscr{M}$ τέτοιο ώστε $m(M) < \infty$ και $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq M$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ και συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:*

(a) $g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq K_\varepsilon$,

(b) $m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$,

(c) $\sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Πρόταση 3.3.8. *Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη κατά Lebesgue, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $m(\{x \in [0,1] : f(x) \neq f_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.3.6 υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_\varepsilon \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε η $f|_{K_\varepsilon}$ είναι συνεχής και $m([0,1] \setminus K_\epsilon) < \varepsilon$. Το K_ε ως συμπαγές είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$. Άρα, το σύνολο $(-2,2) \setminus K_\varepsilon$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς $(-2,2) \setminus K_\varepsilon = \coprod_{j \in J}(a_j, b_j)$, όπου $J = \mathbb{N}$ ή $J = \{1, ..., n\}$ με $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως $[0,1] \setminus K_\varepsilon = \coprod_{j \in J_0} I_j$, όπου $I_j = (a_j, b_j) \cap [0,1] \neq \emptyset$ και $j \in J_0 \subseteq J$.

Έστω $f_j : I_j \to \mathbb{R}$, $j \in J_0$, με γραφική παράσταση το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα

$(a_j, f(a_j)$ και $(b_j, f(b_j)$ αν $I_j = (a_j, b_j)$,

$(0, 0)$ και $(b_j, f(b_j)$ αν $I_j = [0, b_j)$ και

$(a_j, f(a_j)$ και $(1, 1)$ αν $I_j = (a_j, 1]$.

Τότε η συνάρτηση $f_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_\varepsilon \\ f_j(x), & x \in I_j, j \in J_0 \end{cases}$$

είναι συνεχής και $m(\{x \in [0,1] : f(x) \neq f_\varepsilon(x)\}) \leq m([0,1] \setminus K_\epsilon) < \varepsilon$.

□

3.4 Μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Το σύνολο $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ καλείται επεκτεταμένο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Η βάση της τοπολογίας του $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ είναι τα διαστήματα της μορφής: (a, b), $[-\infty, a)$ και $(a, \infty]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Επεκτείνουμε την διάταξη και τις πράξεις των πραγματικών αριθμών στο $\bar{\mathbb{R}}$ ορίζοντας:

1. $-\infty < x < \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. $x + \infty = \infty$ και $x - \infty = -\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ αν $x > 0$ και $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ αν $x < 0$.

4. $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ και $(-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$.

Ορισμός 3.4.1. Μιά επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση $f : M \to [-\infty, \infty]$ με πεδίο ορισμού $M \in \mathscr{M}$ καλείται (Lebesgue) μετρήσιμη, όταν $f^{-1}(U) \in \mathscr{M}$ για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq [-\infty, \infty]$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθεί είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2.

Θεώρημα 3.4.2. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για μια απεικόνιση $f : M \to [-\infty, \infty]$ με πεδίο ορισμού $M \in \mathscr{M}$:*

(i) f είναι μετρήσιμη.

(ii) $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(iii) $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(iv) $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(v) $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(vi) $f^{-1}((a, b)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

Παράδειγμα 3.4.3. Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f : M \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε είναι μετρήσιμα τα σύνολα:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\infty) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, \infty]), \quad f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, n)) \\ f^{-1}(-\infty, \infty) &= M \setminus \big(f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(-\infty)\big) \end{aligned}$$

Σημειώσεις 3.4.4. Το Θεώρημα 3.3.3 ισχύει και για τις επεκτεταμένες μετρήσιμες συναρτήσεις με τις ακόλουθες διευκρινίσεις με σκοπό να αποφευχθούν οι απροσδιόριστες πράξεις:

1. Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f, g : M \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμες, τότε $f + g$ είναι μετρήσιμη στο σύνολο: $M \setminus \big((f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty)) \cup (f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\infty))\big)$.

2. Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f, g : M \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμες, τότε fg είναι μετρήσιμη στο σύνολο: $M \setminus \big((f^{-1}(0) \cap g^{-1}(-\infty)) \cup (f^{-1}(0) \cap g^{-1}(\infty)) \cup (g^{-1}(0) \cap f^{-1}(-\infty)) \cup (g^{-1}(0) \cap f^{-1}(\infty))\big)$.

3.5 Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων.

Έστω $E \in \mathbb{R}$ και $f_n : E \to [-\infty, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία επεκτεταμένων συναρτήσεων.
Ορίζουμε στο E τις συναρτήσεις:

$$(\inf_n f_n)(x) = \inf_n \{f_n(x)\},\ x \in E$$

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n \{f_n(x)\},\ x \in E$$

$$(\liminf_n f_n)(x) = \sup_n (\inf_{k \geq n} (f_k(x)))\ ,\ x \in E$$

$$(\limsup_n f_n)(x) = \inf_n (\sup_{k \geq n} (f_k(x))),\ x \in E$$

Θεώρημα 3.5.1. *Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f_n : M \to [-\infty, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ακολουθία επεκτεταμένων μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε είναι μετρήσιμες οι συναρτήσεις*

$$(i)\ \inf_n f_n,\ (ii)\ \sup_n f_n,\ (iii)\ \liminf_n f_n,\ (iv)\ \limsup_n f_n.$$

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$.

(i) $(\inf_n f_n)^{-1}([a, \infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([a, \infty])$.

Πραγματι,

$$x \in (\inf_n f_n)^{-1}([a, \infty]) \Longleftrightarrow \inf_n \{f_n(x)\} \in [a, \infty] \Longleftrightarrow f_n(x) \in [a, \infty],\ \forall n \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([a, \infty]).$$

Επειδή κάθε f_n είναι μετρήσιμη, $f_n^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$ για κάθε n. Από το Θεώρημα 2.3.4 έπεται ότι $(\inf_n f_n)^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$. Άρα, $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμη.

(ii) $(\sup_n f_n)^{-1}([a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([a, \infty])$. Επειδή κάθε f_n είναι μετρήσιμη, $f_n^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$ για κάθε n. Από το Θεώρημα 2.3.4 έπεται ότι $(\sup_n f_n)^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$. Άρα, $\sup_n f_n$ είναι μετρήσιμη.

(iii) $\liminf_n f_n = \sup_n (\inf_{k \geq n} (f_k))$ μετρήσιμη από (i) και (ii).

(iv) $\limsup_n f_n = \inf_n (\sup_{k \geq n} (f_k))$ μετρήσιμη από (i) και (ii). $\square$

Το Πορισμα που ακολουθεί εκφράζει μια ιδιότητα των μετρήσιμων συναρτήσεων που δεν έχουν οι συνεχείς συνατρήσεις.

Πόρισμα 3.5.2. *Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f_n : M \to [-\infty, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση $f : M \to [-\infty, \infty]$, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Θεώρημα 3.5.3. *Αν $M \in \mathscr{M}$ και $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σημειακά σχεδόν παντού στο M στη συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $N \subseteq M$ με $m(N) = 0$ τέτοιο ώστε $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σημειακά στην f στο $M \setminus N$. Αν $N = \emptyset$, τότε η f είναι μετρήσιμη από το Πόρισμα 3.5.2.

Αν $N \neq \emptyset$, τότε θεωρούμε την συνάρτηση $\chi_{M\setminus N} : M \to \{0,1\}$ με $\chi_{M\setminus N}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in M \setminus N, \\ 0, & \text{αν } x \in N. \end{cases}$

Επειδή $M, N \in \mathscr{M}$, η $\chi_{M\setminus N}$ είναι μετρήσιμη. Επομένως $f_n \cdot \chi_{M\setminus N} : M \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη για κάθε n ως γινόμενο μετρήσιμων συναρτήσεων. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) \cdot \chi_{M\setminus N}(x)\big) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{αν } x \in M \setminus N, \\ \lim\limits_{n\to\infty} 0, & \text{αν } x \in N. \end{cases} = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in M \setminus N, \\ 0, & \text{αν } x \in N. \end{cases} = (f \cdot \chi_{M\setminus N})(x).$$

Άρα, η ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_n \cdot \chi_{M\setminus N}\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σημειακά στην $f \cdot \chi_{M\setminus N}$ στο M. Επομένως, από το Πόρισμα 3.5.2, η $f \cdot \chi_{M\setminus N}$ είναι μετρήσιμη ως οριακή συνάρτηση ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Επειδή f είναι σχεδόν παντού ίση με την μετρήσιμη συνάρτηση $f \cdot \chi_{M\setminus N}$, έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη.

□

3.5.1 Θεώρημα του Egorov.

Θεώρημα 3.5.4. (Egorov) *Αν $M \in \mathscr{M}$ με $m(M) < \infty$ και $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων συγκλίνουσα σημειακά στο M στη συνάρτηση f, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $M_\delta \subseteq M$ τέτοιο ώστε η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο M_δ και $m(M \setminus M_\delta) < \delta$.*

Απόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη από το Θεώρημα 3.5.3. Θεωρούμε τα σύνολα

$$M_n^k = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}, \quad n, k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Τότε $M_n^k \in \mathscr{M}$ για κάθε n και κάθε k από το Θεώρημα 3.3.3.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in M$, έπεται ότι $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^k$ για κάθε k.

Επειδή $M_1^k \subseteq M_2^k \subseteq \ldots$ για κάθε k, έπεται ότι $M \setminus M_1^k \supseteq M \setminus M_2^k \supseteq \ldots$. Οπότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (M \setminus M_n^k) = M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^k = M \setminus M = \emptyset.$$

Από το Θεώρημα 2.4.4 συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} m(M \setminus M_n^k) = 0$.

Άρα, για $\delta > 0$ και για κάθε k υπάρχει $n(k)$ για το οποίο $m((M \setminus M_{n(k)}^k) < \frac{\delta}{2^k}$.

Θα δείξουμε ότι $M_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{n(k)}^k$. είναι το ζητούμενο σύνολο.

Επειδή $M \setminus M_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M \setminus M_{n(k)}^k)$, έχουμε

$$m(M \setminus M_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(M \setminus M_{n(k)}^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός k με $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Για κάθε $x \in M_\delta$ και για κάθε $n \geq n(k)$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon$, διότι $M_\delta \subseteq M_{n(k)}^k$. Αυτό σημαίνει ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο M_δ.

□

3.6 Απλές συναρτήσεις.

Ορισμός 3.6.1. Μιά συνάρτηση $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλείται *απλή* όταν είναι μετρήσιμη και το σύνολο τιμών $a(\mathbb{R})$ είναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα 3.6.2. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_E : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ με

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in E, \\ 0, & \text{αν } x \notin E. \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη (άρα και απλή) αν και μόνον αν το σύνολο E είναι μετρήσιμο.

Πρόταση 3.6.3. *Μιά συνάρτηση $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απλή αν και μόνον αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $M_1, \ldots, M_n$ ανά δύο ξένα και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i}. \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Έστω $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απλή συνάρτηση και $a(\mathbb{R}) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, όπου τα a_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Θέτουμε $M_i = a^{-1}(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ είναι οικογένεια μετρήσιμων και ανά δύο ξένων συνόλων. Αν $x \in M_{i_0}$, τότε $x \notin M_i$ για $i \neq i_0$. Επομένως $\chi_{M_{i_0}}(x) = 1$ και $\chi_{M_i}(x) = 0$ για $i \neq i_0$. Άρα,

$$a(x) = a_{i_0} = a_{i_0} \cdot 1 + \sum_{i \neq i_0} a_i \cdot 0 = a_{i_0} \chi_{M_{i_0}}(x) + \sum_{i \neq i_0} a_i \cdot \chi_{M_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i}(x).$$

Αντίστροφα, έστω $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i}$ όπου $M_1, \ldots, M_n \in \mathscr{M}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Η a είναι μετρήσιμη ως γραμμικός συνδυασμός μετρήσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $a(x) = \sum_{x \in M_i} a_i$. Το πλήθος των συνδυασμών των $a_1, \ldots, a_n$ ανά $k = 1, 2, \ldots, n$ είναι πεπερασμένο. Συνεπώς η a είναι απλή. □

Σημείωση 3.6.4. Αν στην ισότητα (3.3) τα a_i είναι διαφορετικά ανά δύο και τα σύνολα M_i είναι ξένα ανά δύο, τότε $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i}$ καλείται *κανονική παράσταση της απλής συνάρτησης* a. Από την απόδειξη της Πρότασης 3.6.3 συνεπάγεται ότι κάθε απλή συνάρτηση έχει κανονική παράσταση.

Ορισμός 3.6.5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $a : M \to \mathbb{R}$, $M \in \mathscr{M}$, είναι *απλή*, όταν είναι απλή η συνάρτηση $\bar{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} a(x), & x \in M \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Ορισμός 3.6.6. Μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορισμένων στο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ καλείται άυξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) όταν $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (αντίστοιχα, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$) για κάθε n και για κάθε $x \in E$.

Θεώρημα 3.6.7. *Για κάθε μετρήσημη συνάρτηση $f : M \to [0, \infty]$, $M \in \mathscr{M}$, υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $a_n : M \to [0, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, η οποία συγκλίνει σημειακά στη f.*

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, το διάστημα $[0, \infty]$ γράφεται ως ένωση ξένων ανά δύο $2^{2n} + 1$ διαστημάτων ως ακολούθως:

$$[0, \infty] = \left(\bigsqcup_{k=0}^{2^{2n}-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right) \cup [2^n, \infty].$$

Θέτουμε

$$M_{n,k} = f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right), \ k = 0, \ldots, 2^{2n} - 1 \text{ και } M_n = f^{-1}([2^n, \infty].$$

Επειδή η f είναι μετρήσιμη, τα ξένα ανά δύο σύνολα $M_{n,k}$ και M_n είναι μετρήσιμα και για κάθε n.

Ορίζουμε $a_n : M \to [0, \infty)$ με

$$a_n = 2^n \chi_{M_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{M_{n,k}}.$$

Η a_n είναι μετρήσιμη ως γραμμικός συνδυασμός μετρήσιμων συναρτήσεων. Το πεδίο τιμών της a_n είναι το πεπερασμένο σύνολο $\{0, \frac{1}{2^v}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^{2n}-1}{2^n}, 2^n\}$. Συνεπώς, κάθε a_n είναι απλή.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in M$.

Αν $f(x) \neq \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < 2^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ υπάρχει μοναδικό $k = 0, \ldots, 2^n$ με $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, δηλαδή $x \in f^{-1}([2^n, \infty] = M_{n,k}$. Οπότε $a_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Συνεπώς

$$|f(x) - a_n(x)| \leq m \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right) = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n(x) = f(x).$$

Αν $f(x) = \infty$, τότε $x \in M_n$ για κάθε n. Άρα, $a_n(x) = 2^n$ για κάθε n. Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \infty = f(x).$$

Θα δείξουμε ότι η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έστω $x \in M$ και $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Αν $f(x) \geq 2^n$, τότε $a_n(x) = 2^n = \frac{2^{2n+1}}{2^{n+1}} = a_{n+1}(x)$ από τον ορισμό της a_{n+1}.

Αν $f(x) < 2^n$, τότε υπάρχει μοναδικό k ώστε $x \in M_{n,k}$. Οπότε $a_n(x) = \frac{k}{2^n}$.

Όμως $M_{n,k} = f^{-1} \left(\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2)}{2^{n+1}} \right) \right) = M_{n+1,2k} \cup M_{n+1,2k+1}$.

Αν $x \in M_{n+1,2k}$, τότε $a_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = a_n(x)$.

Αν $x \in M_{n+1,2k+1}$, τότε $a_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = a_n(x)$. $\square$

3.7 Μετρήσιμες συναρτήσεις στην αφηρημένη Θεωρία μέτρου.

Ορισμός 3.7.1. Έστω $\mathscr{A}_X$ και $\mathscr{A}_Y$ είναι σ-άλγεβρες στα μη κενά σύνολα X και Y, αντίστοιχα.
Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται $(\mathscr{A}_X, \mathscr{A}_Y)$-μετρήσιμη όταν $f^{-1}(E) \in \mathscr{A}_X$ για κάθε $E \in \mathscr{A}_Y$.

Σημείωση 3.7.2. Έστω E ένα κατά Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και

$$\mathscr{M}_E = \{M \subseteq E : M \in \mathscr{M}\}.$$

Οι κατά Lebesgue μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες E είναι οι $(\mathscr{M}_E, \mathscr{B})$-μετρήσιμες συναρτήσεις, όπου $\mathscr{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.7.3. Έστω $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο μη κενό σύνολο X. Μιά επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ καλείται $\mathscr{A}$-μετρήσιμη, όταν $f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$ για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq [-\infty, \infty]$.

Η απόδειξεις των Θεωρημάτων της παραγράφου αυτής για έναν χώρο μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι όμοιες με τις αποδείξεις των αντίστοιχων Θεωρημάτων για τις κατά Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.7.4. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για μια απεικόνιση $f : X \to [-\infty, \infty]$:*

(i) *f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *$f^{-1}((a, \infty]) \in \mathscr{A}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$*

(iii) *$f^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{A}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$*

(iv) *$f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathscr{A}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$*

(v) *$f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathscr{A}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$*

(vi) *$f^{-1}((a, b)) \in \mathscr{A}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.*

Στα Θεωρήματα που ακολουθούν $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο μη κενό σύνολο X.

Θεώρημα 3.7.5. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $X = \coprod_{i=1}^{\infty} X_i$, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$.*
Θεωρούμε τις σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_n = \{M \cap X_n : M \in \mathscr{A}\}$ των X_n.
Αν $f\big|_{X_n}$ είναι $\mathscr{A}_n$-μετρήσιμη για κάθε n, τότε η f είναι μετρήσιμη.

Θεώρημα 3.7.6. *Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμες, τότε είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμες οι συναρτήσεις:*

$$f + g, \;\; fg, \;\; cf \;\text{ για κάθε } c \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα 3.7.7. *Αν $f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ακολουθία $\mathscr{A}$-μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμες οι συναρτήσεις*

$$\inf_n f_n, \quad \sup_n f_n, \quad \liminf_n f_n, \quad \limsup_n f_n.$$

Ορισμός 3.7.7. Έστω $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο μη κενό σύνολο X. Μιά συνάρτηση $a : X \to \mathbb{R}$ είναι απλή όταν είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη και το σύνολο $a(X)$ είναι πεπερασμένο.

Αποδεικνύεται ότι μιά συνάρτηση $a : X \to \mathbb{R}$ είναι απλή αν και μόνον αν υπάρχουν σύνολα $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ ανά δύο ξένα και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$.

Θεώρημα 3.7.8. *Για κάθε μετρήσημη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $a_n : X \to [0, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, η οποία συγκλίνει σημειακά στην f.*

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Lebesgue

4.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue απλών μη αρνητικών συναρτήσεων.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ μια απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_{M_i}$

Το *ολοκλήρωμα Lebesgue* της ψ στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, m(M_i), \text{ όπου συμφωνούμε πως } 0 \cdot \infty = 0.$$

Έστω $E \in \mathscr{M}$. Τότε $(\psi\chi_E)(x) = \psi(x) \cdot \chi_E(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ \psi_i, & x \in E \cap M_i. \end{cases}$

Επομένως η $\psi\chi_E : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ μια απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση $\psi\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_{E\cap M_i}$.

Ορίζουμε το *ολοκλήρωμα κατά Lebesgue της ψ στο E* ως εξής:

$$\int_E \psi = \int_{\mathbb{R}} \psi\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, m(E \cap M_i),$$

Προφανώς $\int_E \psi \in [0, \infty]$. Η ψ καλείται *ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο E* όταν $\int_E \psi < \infty$.

Παραδείγματα 4.1.2.

1. Η απλή συναρτηση $\psi(x) = c \in (0, \infty)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $\mathbb{R}$, διότι $\int_{\mathbb{R}} c = c \cdot m(\mathbb{R}) = c \cdot \infty = \infty$. Ενώ $\int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \cdot m(\mathbb{R}) = 0 \cdot \infty = 0$.

2. Για $\psi = 3\chi_{[-1,2]} + 4\chi_{(2,5]} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus[-1,5]}$ υπολογίζουμε

$$\int_{[0,4]} \psi = 3m([-1, 2] \cap [0, 4]) + 4m((2, 5] \cap [0, 4]) = 3m([0, 2]) + 4m((2, 4]) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14.$$

3. Για κάθε $E \in \mathscr{M}$ ισχύει $\int_E 0 = 0$.

4. Αν $E \in \mathscr{M}$ και $m(E) = 0$, τότε $\int_E \psi = 0$ για κάθε απλή $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $\psi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μια απλή συνάρτηση και $\psi = \sum_{j=1}^{m} t_j \, \chi_{E_j}$, όπου E_j είναι ξένα ανά δύο. Τότε $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi = \sum_{j=1}^{m} t_j \, m(E_j)$.*

Απόδειξη. Έστω $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_{M_i}$ η κανονική παράσταση της ψ. Επειδή $t_j = \psi_i$ στο $E_j \cap M_i$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} t_j m(E_j) &= \sum_{j=1}^{m} t_j m\big(\coprod_{i=1}^{n} E_j \cap M_i\big) = \sum_{j=1}^{m} t_j \sum_{i=1}^{n} m\big(E_j \cap M_i\big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \psi_i m\big(E_j \cap M_i\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i \sum_{j=1}^{m} m\big(E_j \cap M_i\big)\big) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i m(M_i) = \int_{\mathbb{R}} \psi.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω $\phi, \psi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ απλές συναρτήσεις και $c_1, c_2 > 0$, τότε*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi = \int_E \psi + \int_{E^c} \psi$ *για κάθε $E \in \mathscr{M}$.*
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (c_1\psi + c_2\phi) = c_1 \int_{\mathbb{R}} \psi + c_2 \int_{\mathbb{R}} \phi$.
3. $\displaystyle\phi \le \psi \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi \le \int_{\mathbb{R}} \psi$.

Απόδειξη. Έστω $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_{M_i}$ και $\phi = \sum_{j=1}^{k} \phi_j \chi_{N_j}$ κανονικές παραστάσεις.

1.

$$\begin{aligned}\int_E \psi + \int_{E^c} \psi &= \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, m(E \cap M_i) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, m(E^c \cap M_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(m(E \cap M_i) + m(E^c \cap M_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i m(M_i) = \int_{\mathbb{R}} \psi.\end{aligned}$$

2. Επειδή $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{j=1}^{k} N_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k} M_i \cap N_j$, όπου τα σύνολα $M_i \cap N_j$ είναι ξένα ανά δύο, έχουμε τις παραστάσεις:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \psi_i \chi_{M_i \cap N_j} \text{ και } \phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \phi_j \chi_{M_i \cap N_j}.$$

Άρα, $c_1\psi + c_2\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} (c_1\psi_i + c_2\phi_j) \, \chi_{M_i \cap N_j}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (c_1\psi + c_2\phi) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} (c_1\psi_i + c_2\phi_j) \, m(M_i \cap N_j) = \\ &= c_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \psi_i m(M_i \cap N_j) + c_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \phi_j m(M_i \cap N_j) = c_1 \int_{\mathbb{R}} \psi + c_2 \int_{\mathbb{R}} \phi.\end{aligned}$$

3. Επειδή $\phi \le \psi$ στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι $\psi - \phi$ είναι απλή και μη αρνητική στο $\mathbb{R}$. Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \le \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} (\psi - \phi) = \int_{\mathbb{R}} \psi.$$

□

Θεώρημα 4.1.5. *Αν $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ και $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, τότε*

$$\int_E \psi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \psi.$$

Απόδειξη. Έστω $\psi = \sum_{i=1}^{k} \psi_i \chi_{M_i}$ κανονική παράσταση της ψ.

Για κάθε i ισχύει $M_i \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_i \cap E_n)$, όπου $M_i \cap E_1 \subseteq M_i \cap E_2 \subseteq \dots$.

Από το Θεώρημα 2.4.4: $m\Big(M_i \cap E\Big) = \lim_{n\to\infty} m(M_i \cap E_n)$. Συνεπώς

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^{k} \psi_i \, m(M_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i \lim_{n\to\infty} m(M_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \psi_i m(M_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \psi.$$

□

4.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών συναρτήσεων.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \psi : 0 \le \psi \le f \text{ και } \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } \mathbb{R} \right\}.$$

Για $E \in \mathscr{M}$ το ολκλήρωμα Lebesgue της f στο E ορίζεται ως εξής: $\displaystyle\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f \chi_E$

Αν $\displaystyle\int_E f < \infty$, τότε λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο E.*

Παράδειγμα 4.2.2. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f(x) = x$ στο $[0, 1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία απλών συναρτήσεων $\psi_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$. Τότε $0 \le \psi_n \le f$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{n-1}{2n} \implies \int_{[0,1]} f \ge \sup_n \left\{ \int_{\mathbb{R}} \psi_n \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Από την άλλη για κάθε απλή συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $\psi \le f$ στο $[0, 1]$ ο αριθμός $\int_{[0,1]} \psi$ είναι μικρότερος από τον εμβαδον του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 1)$ που ισούται με $1/2$. Συνεπώς $\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $E \in \mathscr{M}$.*

1. $\displaystyle\int_E f = \sup\left\{\int_E \psi : 0 \leq \psi \leq f \text{ στο } E, \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } E \text{ και } \psi = 0 \text{ στο } E^c\right\}.$
2. *Αν* $m(E) = 0$, *τότε* $\displaystyle\int_E f = 0.$
3. $\displaystyle\int_E cf = c\int_E f$ *για κάθε* $c > 0$.
4. *Αν* $M \subseteq N$ *και* $M, N \in \mathscr{M}$, *τότε* $\displaystyle\int_M f \leq \int_N f.$
5. *Αν* $f \leq g$ *στο* $E \in \mathscr{M}$, *τότε* $\displaystyle\int_E f \leq \int_E g.$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τις ιδιότητες 1 και 2. Οι ιδιότητες 3–5 προκύπτουν από την ιδιότητα 1.

1. Αν ψ είναι απλή με $0 \leq \psi \leq f\chi_E$ στο $\mathbb{R}$, τότε $\psi = 0$ στο E^c. Άρα, $\displaystyle\int_{E^c} \psi = 0.$

$$\begin{aligned}\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \psi : 0 \leq \psi \leq f\chi_E \text{ και } \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } \mathbb{R}\right\} = \\ &= \sup\left\{\int_E \psi + \int_{E^c} \psi : 0 \leq \psi \leq f\chi_E \text{ και } \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } \mathbb{R}\right\} = \\ &= \sup\left\{\int_E \psi : 0 \leq \psi \leq f\chi_E, \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } \mathbb{R} \text{ και } \psi = 0 \text{ στο } E^c\right\} = \\ &= \sup\left\{\int_E \psi : 0 \leq \psi \leq f \text{ στο } E, \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } E \text{ και } \psi = 0 \text{ στο } E^c\right\}.\end{aligned}$$

2. Έστω $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i \chi_{M_i} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $0 \leq \psi \leq f$ στο E. Επειδή $M_i \cap E \subseteq E$, έπεται ότι $m(M_i \cap E) = 0$. Επομένως $\int_E \psi = \sum_{i=1}^n x_i\, m(M_i \cap E) = 0$. Άρα,

$$\int_E f = \sup\left\{\int_E \psi : 0 \leq \psi \leq f \text{ στο } E \text{ και } \psi \text{ είναι απλή συνάρτηση}\right\} = 0.$$

$\square$

Θεώρημα 4.2.4. *(Ανισότητα Chebyshev)* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

$$m(f^{-1}([c, \infty])) \leq \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} f \text{ για κάθε } c > 0.$$

Απόδειξη. Επειδή $\frac{1}{c}f(x) \geq \begin{cases} \frac{c}{c} = 1, & x \in f^{-1}([c, \infty] \\ 0, & x \notin f^{-1}([c, \infty] \end{cases} = \chi_{f^{-1}([c,\infty]}$, έπεται ότι

$$\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{c} f \geq \int_{\mathbb{R}} \chi_{f^{-1}([c,\infty]} = m(f^{-1}([c, \infty]).$$

$\square$

Πρόταση 4.2.5. *Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι φραγμένη σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Επειδή $\int_{\mathbb{R}} f\in\mathbb{R}$ και $f^{-1}(\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([n,\infty])$, από την ανισότητα Chebyshev:

$$m(f^{-1}([n,\infty])\leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Συνεπώς $\left\{m(f^{-1}([n,\infty])\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα μηδενική ακολουθία. Από το Θεώρημα 2.4.4 έπεται ότι

$$m(f^{-1}(\infty))=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([n,\infty])\right)=\lim_{n\to\infty} m(f^{-1}([n,\infty]))=0.$$

$\square$

Σημείωση 4.2.6. Αν $E\in\mathscr{M}$ και $f:E\to[0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο E ορίζεται ως εξής:

$$\int_E f=\int_E \widehat{f},\ \text{όπου } \widehat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

4.2.1 Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

Θεώρημα 4.2.7. *(Μονότονης Σύγκλισης) Αν $f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty]$, $n=1,2,\ldots,$ είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $0\leq f_1\leq f_2\leq\ldots$ και $\lim_{n\to\infty} f_n=f$, τότε η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη και*

$$\int_{\mathbb{R}} f=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη από το Πόρισμα 3.5.2. Έστω $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, έπεται ότι $f_n(x)\leq f(x)$ για κάθε n. Επομένως η ακολουθία $\{\int_{\mathbb{R}} f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $\int_{\mathbb{R}} f_n\leq\int_{\mathbb{R}} f$. Άρα, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\leq\int_{\mathbb{R}} f$.

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε απλή μη αρνητική και ολοκληρώσιμη $\psi\leq f$ και για κάθε $k=1,2,\ldots,$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\geq\frac{k}{k+1}\int_{\mathbb{R}}\psi.$$

Όποτε $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\geq\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}\int_{\mathbb{R}}\psi=\int_{\mathbb{R}}\psi$ για κάθε απλή μη αρνητική $\psi\leq f$.

Επομένως $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\geq\sup\left\{\int_{\mathbb{R}}\psi : 0\leq\psi\leq f \text{ και } \psi \text{ είναι απλή και ολοκληρώσιμη στο } \mathbb{R}\right\}=\int_{\mathbb{R}} f.$

Θέτουμε $E_n=\{x\in\mathbb{R}:\frac{k}{k+1}\psi(x)\leq f_n(x)\}$. Έστω $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $\frac{k}{k+1}\psi(x)\leq\psi(x)\leq f(x)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ και η ακολοθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, έπεται ότι υπάρχει n_x για το οποίο $\frac{k}{k+1}\psi(x)\leq f_{n_x}(x)\leq f(x)$. Άρα, $x\in E_{n_x}$. Συνεπως, $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Επειδή $E_n\subseteq E_{n+1}$, από το Θεώρημα 4.1.5 παίρνουμε: $\int_E\psi=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\psi$. Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\geq\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f_n\geq\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\frac{k}{k+1}\psi=\frac{k}{k+1}\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\psi=\frac{k}{k+1}\int_{\mathbb{R}}\psi.$$

$\square$

Θεώρημα 4.2.8. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

1. *Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ απλών, μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.*

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$

3. $\displaystyle\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$, *αν* $E \cap F = \emptyset$.

4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 0$ *αν και μόνον αν* $f = 0$ *σχεδόν παντού στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. 1. Από το Θεώρημα 3.6.7 υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία απλών και μη αρνητικών συναρτήσεων $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, η οποία να συγκλίνει σημειακά στην f. Θέτουμε $f_n = a_n \chi_{[-n,n]}$.

Κάθε f_n είναι απλή και

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x)\chi_{[-n,n]}(x) &= \lim_{n\to\infty} a_n(x) \cdot \chi_{[-n,n]}(x) = \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \chi_{[-n,n]}(x) = f(x)\cdot 1 = f(x).\end{aligned}$$

Επειδή $m([-n,n]) = 2n < \infty$, κάθε απλή συνάρτηση f_n είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $[-n,n]$. Θα δείξουμε ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα:

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(x)\cdot 1 = a_n(x) \le a_{n+1}(x) = f_{n+1}(x), & x \in [-n,n] \subseteq [-(n+1), n+1] \\ a_n(x)\cdot 0 = 0 \le f_{n+1}(x), & x \notin [-n,n]. \end{cases}$$

2. Από την ιδιότητα 1 του Θεωρήματος υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ απλών, μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων τέτοιες ώστε

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ και } \lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

Τότε $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία απλών, μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n + g_n) = f + g$. Από το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f,\ \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} g \text{ και}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$$

3. Επειδή $f\chi_{E\cup F} = f\chi_E + f\chi_F$, από την ιδιότητα 2 του Θεωρήματος, παίρνουμε:

$$\int_{E\cup F} f = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{E\cup F} = \int_{\mathbb{R}} (f\chi_E + f\chi_F) = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E + \int_{\mathbb{R}} f\chi_F = \int_E f + \int_F f.$$

4. Αν $f = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, τότε $m(f^{-1}(0,\infty]) = 0$. Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{f^{-1}(0,\infty]} f + \int_{f^{-1}(0)} f = 0 + 0 = 0.$$

Αντίστροφα, επειδή $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([1/n,\infty]$, από το Θεώρημα 2.4.4 έπεται ότι

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \lim_{n\to\infty} m(f^{-1}([1/n,\infty]).$$

Αφού $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 0$, από την ανισότητα Chebyshev: $m(f^{-1}([1/n,\infty]) \leq n \int_{\mathbb{R}} f = 0$ για κάθε n.

Άρα, $m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = 0$, δηλαδή $f = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

$\square$

Θεώρημα 4.2.9. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $n = 1, 2, \dots$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.*

1. *(B. Levi) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη και*

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

2. *(Λήμμα του Fatou) Η συνάρτηση $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη και*

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη. 1. Θέτουμε $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Η s_n είναι μετρήσιμη ως άθροισμα μετρήσιμων συναρτήσεων. Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ είναι μετρήσιμη. Επειδή οι συναρτήσεις f_n είναι μη αρνητικές, έπεται ότι $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_1 + \cdots + f_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_1 + \cdots + \int_{\mathbb{R}} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

2. Θέτουμε $s_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$. Τότε $s_n \leq f_{n+k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Επομένως $\int_{\mathbb{R}} s_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_{n+k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα, $\int_{\mathbb{R}} s_n \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_{n+k}$.
Επειδή οι συναρτήσεις f_n είναι μη αρνητικές, έπεται ότι $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$.
Επομένως $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.
Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_{n+k} \right) = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

$\square$

4.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων.

Ορισμός 4.3.1. Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

Τότε οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = \max\{-f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και παίρνουν τιμές στο $[0, \infty]$. Επομένως ορίζονται τα ολοκληρώματα Lebesgue: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^+$ και $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^-$. Προφανώς $f = f^+ - f^-$.

Αν $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^+ < \infty$ ή $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^- < \infty$, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^- \in [-\infty, \infty].$$

Έστω $E \in \mathscr{M}$. Αν $\int_E f^+ < \infty$ ή $\int_E f^- < \infty$, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο E ορίζεται ως εξής:

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{_E} = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Αν $\displaystyle\int_E f \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο E.

Για κάθε $E \in \mathscr{M}$ συμβολίζουμε $\mathscr{L}^1(E)$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο E.

Σημειώσεις 4.3.2.

1. Αν $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και $m(E) = 0$, τότε $\displaystyle\int_E f = 0$.

   Διότι, $\int_E f^+ = 0$ και $\int_E f^- = 0$ για τις μη αρνητικές f^+ και f^-.

2. Για $f \in \mathscr{L}^1(E)$ έχουμε τις εξής ισοδύναμες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας:

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \iff \int_E f \in \mathbb{R} \iff \int_E f^+ - \int_E f^- \in \mathbb{R} \iff \int_E f^+ \in \mathbb{R} \text{ και } \int_E f^- \in \mathbb{R} \iff$$
$$\iff \int_E f^+ + \int_E f^- \in \mathbb{R} \iff \int_E (f^+ + f^-) \in \mathbb{R} \iff \int_E |f| \in \mathbb{R} \iff |f| \in \mathscr{L}^1(E)$$

3. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $f \in \mathscr{L}^1([a, b])$.

   Πράγματι, υπάρχει $K \geq 0$ για το οποίο $|f| \leq K$. Συνεπώς $\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} K = K(b - a) \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 4.3.3. *Έστω $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και $c \in \mathbb{R}$.*

1. $\displaystyle\left|\int_{\mathbb{R}} f\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$.

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f + g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g$.

3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} cf = c\int_{\mathbb{R}} f$.

4. *Αν $f \geq g$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, τότε* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\mathbb{R}} g$.

Απόδειξη. 1. Επειδή $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, έπεται ότι $f^+, f^-, |f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Επομένως

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^-\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} f^+\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f^-\right| = \int_{\mathbb{R}} f^+ + \int_{\mathbb{R}} f^- = \int_{\mathbb{R}} |f|$$

2. Από τις ισότητες

$$\begin{aligned} f+g &= (f+g)^+ - (f+g)^- \\ f+g &= (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = f^+ - f^- + g^+ - g^- \end{aligned}$$

συνεπάγεται ότι

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-. \tag{4.1}$$

Από την (4.1) παίρνουμε

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^-.$$

Στην τελευταία ισότητα όλες οι συναρτήσεις είναι μη αρνητικές. Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g)^+ + \int_{\mathbb{R}} f^- + \int_{\mathbb{R}} g^- = \int_{\mathbb{R}} (f+g)^- + \int_{\mathbb{R}} f^+ + \int_{\mathbb{R}} g^-.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (f+g) &= \int_{\mathbb{R}} (f+g)^+ - \int_{\mathbb{R}} (f+g)^- = \int_{\mathbb{R}} f^+ + \int_{\mathbb{R}} g^- - \int_{\mathbb{R}} f^- - \int_{\mathbb{R}} g^- = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^-\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} g^- - \int_{\mathbb{R}} g^-\right) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g. \end{aligned}$$

3. Αν $c = 0$, τότε $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} 0 \cdot f = 0 \cdot \int_{\mathbb{R}} f$.

Αν $c < 0$, τότε $(cf)^+ = |c| f^-$ και $(cf)^- = |c| f^+$. Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} cf = \int_{\mathbb{R}} (cf)^+ - \int_{\mathbb{R}} (cf)^- = |c| \int_{\mathbb{R}} f^- - |c| \int_{\mathbb{R}} f^+ = -|c| \int_{\mathbb{R}} f = c \int_{\mathbb{R}} f.$$

Αν $c > 0$, τότε $-c < 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} cf = \int_{\mathbb{R}} -(-cf) = -\int_{\mathbb{R}} (-cf) = -(-c) \int_{\mathbb{R}} f = c \int_{\mathbb{R}} f.$$

4. Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι μετρήσιμες, η συνάρτηση $f - g$ είναι μετρήσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} (f-g) = \int_{\mathbb{R}} (f-g)^+ - \int_{\mathbb{R}} (f-g)^-.$$

Επειδή $f - g \geq 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι το σύνολο $E = \{x : f(x) - g(x) < 0\}$ είναι μέτρου μηδέν. Επομένως για την μη αρνητική συνάρτηση

$$(f-g)^-(x) = \begin{cases} -(f(x) - g(x)), & x \in E \\ 0, & x \in E^c \end{cases}$$

έχουμε: $\int_{\mathbb{R}}(f-g)^- = \int_E (f-g)^- + \int_{E^c}(f-g)^- = 0 + \int_{E^c} 0 = 0.$
Από τις ιδιότητες 2 και 3 του Θεωρήματος συνεπάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f - \int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}}(f-g) = \int_{\mathbb{R}}(f-g)^+ \geq 0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\mathbb{R}} g.$$

□

Θεώρημα 4.3.4. *Αν $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και $E \in \mathscr{M}$, τότε*

1. $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g,$
2. $\int_E cf = c\int_E f.$

Απόδειξη. 1. Επειδή $(f+g)\chi_E = f\chi_E + g\chi_E$, έπεται ότι

$$\int_E f + \int_E g = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E + \int_{\mathbb{R}} g\chi_E = \int_{\mathbb{R}}(f\chi_E + g\chi_E) = \int_{\mathbb{R}}(f+g)\chi_E = \int_E (f+g).$$

2. $\int_E cf = \int_{\mathbb{R}} cf\chi_E = c\int_{\mathbb{R}} f\chi_E = c\int_E f.$

□

Θεώρημα 4.3.5. *Έστω $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α′) $f \sim g$,

(β′) $\int_{\mathbb{R}} |f-g| = 0,$

(γ′) $\int_E f = \int_E g$ *για κάθε $E \in \mathscr{M}$.*

Απόδειξη. (α′) $\Longleftrightarrow$ (β′). $f \sim g$ αν και μόνον αν το σύνολο $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ είναι μέτρου μηδέν. Αποδεικνύεται εύκολα ότι $E = \{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| \neq 0\}$. Συνεπώς $f \sim g$ αν και μόνον αν $|f-g| = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 4.2.8, $|f-g| = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ αν και μόνον αν $\int_{\mathbb{R}} |f-g| = 0$.

(β′) $\Longrightarrow$ (γ′). Επειδή $|(f-g)\chi_E| \leq |f-g|$ στο $\mathbb{R}$, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue παίρνουμε: $\left|\int_E f - \int_E g\right| = \left|\int_E (f-g)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}}(f-g)\chi_E\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |(f-g)\,\chi_E| \leq \int_{\mathbb{R}} |f-g| = 0$
Συνεπώς $\int_E f = \int_E g$.

(γ′) $\Longrightarrow$ (β′). Έστω $E = \{x : f(x) - g(x) \leq 0\}$. Επειδή $\int_{E^c} f = \int_{E^c} g$ και $\int_E f = \int_E g$, έπεται ότι $\int_{E^c}(f-g) = \int_{E^c} f - \int_{E^c} g = 0$ και $\int_E (g-f) = \int_E g - \int_E f = 0$. Από το Θεώρημα 4.2.8:

$$\int_{\mathbb{R}} |(f-g| = \int_E |(f-g| + \int_{E^c} |(f-g| = \int_E (g-f) + \int_{E^c}(f-g) = 0.$$

□

4.3.1 Θεώρημα Κυριαρχούμενης Συγκλισης.

Θεώρημα 4.3.6. *(Κυριαρχούμενης Συγκλισης) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε*

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$,

(β) υπάρχει $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *με* $|f_n(x)| \le g(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$.

Τότε $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$.

Απόδειξη. Από το (α) και (β) έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f| \le \int_{\mathbb{R}} g$. Επειδή $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, έπεται ότι $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και, άρα $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Επειδή $|f_n| \le g$ έπεται ότι $-g \le f_n \le g$. Επομένως $\{g + f_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{g - f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθίες μη αρνητικών συναρτήσεων. Επίσης $f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, διότι $\int_{\mathbb{R}} ||f_n| \le \int_{\mathbb{R}} g < \infty$.

Από το Λήμμα του Fatou έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g + \int_{\mathbb{R}} f &= \int_{\mathbb{R}} (g+f) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} (g + f_n) = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} (g + f_n) \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g + f_n) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} g + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \\
\int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} f &= \int_{\mathbb{R}} (g-f) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} (g - f_n) = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g - f_n) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} g + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (-f_n) = \int_{\mathbb{R}} g - \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \le \int_{\mathbb{R}} f
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \le \int_{\mathbb{R}} f \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Συνεπώς

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f.$$

□

Παράδειγμα 4.3.7. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & x \notin [0, 1/n]. \end{cases}$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε x και

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{[0,1/n]} f_n + \int_{\mathbb{R}\setminus[0,1/n]} f_n = \int_{[0,1/n]} n + \int_{\mathbb{R}\setminus[0,1/n]} 0 = n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = 1, \forall n.$$

Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Η αιτία της μη επιτρεπτής εναλλαγής του ορίου και του ολοκληρώματος είναι ότι δεν υπάρχει υπάρχει $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με $|f_n(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Θεώρημα 4.3.7. *(Κυριαρχούμενης Συγκλισης, ισχυρότερη μορφή.) Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

(α) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *σχεδόν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$,

(β) *υπάρχει* $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *με* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$ *και σχεδόν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = 0$ *και* $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$.

Απόδειξη. Έστω $E = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ και } |f_n(x)| \leq g(x)\}$.

Τότε $m(\mathbb{R}\setminus E) = 0$ από το (α) και (β). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F_n = |f_n - f|\chi_E$. Τότε $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και

$$|F_n(x)| = |f_n(x) - f(x)|\chi_E(x) \leq (|f_n(x)| + |f(x)|)\,\chi_E(x) \leq 2g(x)\chi_E(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, όπου $2g\chi_E \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

Από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Συγκλισης $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$.

Όμως $F_n = |f_n - f|$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Επομένως $\int_{\mathbb{R}} F_n = \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|$.

Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = 0$ Επειδή

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_{\mathbb{R}} f \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n - f) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

έπεται ότι $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$. □

Θεώρημα 4.3.8. *(Φραγμένης Συγκλισης) Έστω $E \in \mathscr{M}$ και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

(α) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *σχεδόν για κάθε* $x \in E$,

(β) *υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *με* $|f_n(x)| \leq M$ *σχεδόν για κάθε* $x \in E$ *και για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$.

(γ) $m(E) < \infty$.

Τότε $f \in \mathscr{L}^1(E)$ *και*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Απόδειξη. Από την (γ) έπεται ότι $\int_E M = \int_{\mathbb{R}} M\chi_E = Mm(E) < \infty$. Άρα, $g = M\chi_E \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις f_n και f στο $\mathbb{R}$, θέτοντας $f_n(x) = 0$ και $f(x) = 0$ για $x \in E^c$.

Τότε οι συναρτήσεις f_n, f και g ικανοποιούν τις προυποθέσεις του Θεωρήματος της Κυριαρχούμενης Σύγκλισης σε ισχυρή μορφή. Συνεπώς

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E = \int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\chi_E = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

□

Θεώρημα 4.3.9. *Αν* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, *ακολουθία μετρήσιμων και ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων και* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| < \infty$, *τότε* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *και*

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| < \infty$, από το Θεώρημα του Levi:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| < \infty.$$

Επομένως $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $E = \{x : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty\}$.

Τότε $m(\mathbb{R} \setminus E) = 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$.

Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Θέτουμε $F_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$. Τότε $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, διότι $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$|F_n(x)| \le \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = g(x)$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Συγκλισης $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n$. Για τις σχεδόν παντού ίσες συναρτήσεις $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ και f έχουμε $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} f$. Συνεπώς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} f_i \Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_i \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

□

4.4 Σύγκριση ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση.

Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{D} = \{x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n\}$ του διαστήματος $[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b$$

καλείται *διαμερισμός* του $[a,b]$. Στο διαμερισμό $\mathcal{D}$ αντιστοιχούμε τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} \inf(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) \\ U(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} \sup(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

τα οποία καλούνται *κάτω άθροισμα Darboux* και *άνω άθροισμα Darboux* της f για τον διαμερισμό $\mathcal{D}$, αντίστοιχα.

Τα αθροίσματα Darboux έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ ισχύει: $L(f,\mathcal{D}) \leq U(f,\mathcal{D})$.

2. Αν $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι διμερισμοί του $[a,b]$ τέτοιοι ώστε $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, τότε
$$L(f,\mathcal{D}_1) \leq L(f,\mathcal{D}_2) \leq U(f,\mathcal{D}_2) \leq U(f,\mathcal{D}_1).$$

3. Αν $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι οποιοιδήποτε διμερισμοί του $[a,b]$, τότε $L(f,\mathcal{D}_1) \leq U(f,\mathcal{D}_2)$.

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι το σύνολο όλων των κάτω αθροισμάτων Darboux είναι άνω φραγμένο και το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων Darboux είναι κάτω φραγμένο. Ο αριθμός

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\}$$

καλείται *κάτω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ και ο αριθμός

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\}$$

καλείται *άνω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$. Για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ ισχύει

$$L(f,\mathcal{D}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,\mathcal{D})$$

Ορισμός 4.4.1. Μια φραγμένη στο $[a,b]$ συνάρτηση f καλείται *ολοκληρώσιμη κατά Riemann* όταν το κάτω ολοκλήρωμά της στο $[a,b]$ ισούται με το άνω ολοκλήρωμά της στο $[a,b]$.

Για μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ ο αριθμός $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ καλείται *ορισμένο ολοκλήρωμα Riemann* της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ορισμός 4.4.2. Μια συνάρτηση $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ καλείται *κλιμακωτή* όταν υπάρχει διαμερισμός $D = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε η ψ να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα (x_{i-1}, x_i).

Πρόταση 4.4.3. *Αν $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κλημακωτή συνάρτηση, τότε ψ είναι κατά Riemann και κατά Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, επιπλέον*

$$\int_a^b \psi(x)dx = \int_{[a,b]} \psi. \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Επειδή η ψ είναι κλιμακωτή υπάρχει διαμερισμός $D = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε $\psi(x) = \psi_i$ για κάθε $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

Επειδή η ψ είναι συνεχής στο $[a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$, έπεται ότι τα σημεία ασυνέχειας της ψ ανήκουν στο σύνολο $\{x_0, ..., x_n\}$. Άρα, η ψ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[a,b]$. Συνεπώς η ψ είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, επιπλέον

$$\int_a^b \psi(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \psi(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \psi(x)dx = \psi_1(x_1 - x_0) + \cdots + \psi_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_i - x_{i-1}).$$

Θεωρούμε τις απλες συνάρτήσεις

$$\overline{\psi}(x) = \begin{cases} \psi_i, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \psi_n, & x = b, \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Τότε $\overline{\psi}, \phi \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, διότι $\overline{\psi}$ και ϕ είναι φραγμένες. Επειδή $\{x \in \mathbb{R} : \overline{\psi}(x) \neq \phi(x)\} \subseteq \{x_0, \ldots, x_n\}$ και $m(\{x_0, \ldots, x_n\}) = 0$, έπεται ότι $m(\{x \in \mathbb{R} : \overline{\psi}(x) \neq \phi(x)\}) = 0$. Άρα, η ϕ είναι σχεδόν παντού ίση με την $\overline{\psi}$ στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 4.3.5 για $[a,b] \in \mathscr{M}$ παίρνουμε: $\int_{[a,b]} \phi = \int_{[a,b]} \overline{\psi}$.

Επειδή $\psi = \phi$ στο $[a,b]$, καταλήγουμε

$$\int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \phi = \int_{[a,b]} \overline{\psi} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi} \chi_{[a,b]} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_i - x_{i-1}) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus [a,b]) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η ψ είναι ολοκληρώσιμη κατα Lebesgue στο $[a,b]$ και $\int_{[a,b]} \psi = \int_a^b \psi(x)dx$. $\square$

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση.*

(a) *Αν η f ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $[a, b]$ και $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$.*

(b) *Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$, αν και μόνον αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μέτρου μηδέν.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρούμε ότι $[a, b] = [0, 1]$, σε διαφορετική περίπτωση η απόδειξη είναι όμοια.

Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε τον διαμερισμό του $[0, 1]$ σε 2^n ίσα μέρη:

$$\mathcal{D}_n = \{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n}{2^n}\}.$$

Τα ίσα τμήματα είναι τα διαστήματα $J_{n,1} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ και $J_{n,k} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$, $k = 2, \ldots, 2^n$.

Επειδή $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{n+1}$ για κάθε n και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, έπεται ότι

$$L(f, D_n) \leq L(f, D_{n+1}) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq U(f, D_{n+1}) \leq U(f, D_n)$$

.

Θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $v_n, u_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που ορίζονται ως εξής:

$$x \in J_{n,k} \Longrightarrow \begin{cases} v_n(x) = \inf\limits_{y \in J_{n,k}} f(y) \\ u_n(x) = \sup\limits_{y \in J_{n,k}} f(y) \end{cases}$$

Τότε η ακολουθία $\left\{\int_0^1 v_n(x)dx\right\}_{n=1}^{\infty} = \{L(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη και άυξουσα, η ακολουθία $\left\{\int_0^1 u_n(x)dx\right\}_{n=1}^{\infty} = \{U(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη και φθίνουσα με

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} L(f, D_n) = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)dx$$

Επειδή $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{n+1}$, έπεται ότι για κάθε n και για κάθε $x \in [0, 1]$:

$$v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \leq f(x) \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x).$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $v, u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$ και $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$.

Οι v και u είναι μετρήσιμες και φραγμένες ως όρια κλημακωτών συναρτήσεων.

Από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} v &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} v_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \\ \int_{[0,1]} u &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} u_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

Θέτοντας $u = v = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, πέρνουμε ότι $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} v = \int_{\mathbb{R}} u$. Άρα, η f είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς $v = u$ σχεδόν παντου στο $\mathbb{R}$.
(a) Θέτοντας $f = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, πέρνουμε ότι $v \leq f \leq u$ στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς $v = u = f$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 4.3.5

$$\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} u = \int_0^1 f(x)dx.$$

(b) Θέτουμε $A_f = \{x \in [0,1] : x \text{ σημείο ασυνέχειας της } f\}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$A_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \{u \neq v\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \tag{4.3}$$

Έστω $x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Τότε x να ανήκει στο εσωτερικό του $J_{n,k(n,x)}$, για $k(n,x) \in \{2, \ldots, 2^n\}$.

Αν $x \notin \{u \neq v\}$, τότε $u(x) = v(x)$. Επομένως $\lim_{n\to\infty}(u_n(x) - v_n(x)) = 0$. Θεωρούμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Τοτε υπάρχει n για το οποίο $u_n(x) - v_n(x) < \varepsilon$. Τότε για κάθε y στο εσωτερικό του $J_{n,k(n,x)}$ ισχύει $v_n(x) \leq f(x), f(y) \leq u_n(x)$. Άρα, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x. Συνεπώς $x \notin A_f$.

Αν $x \notin A_f$, τότε f είναι συνεχής στο x. Επομένως για τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $y \in [0,1]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επειδή το μήκος των διαστημάτων $J_{n,k(n,x)}$ τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$, έπεται ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $diam(J_{n,k(n,x)}) < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $y \in J_{n,k(n,x)}$. Άρα, $|u_n(x) - v_n(x)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x)$, δηλαδή $x \notin \{u \neq v\}$.

Η απόδειξη της σχέσης (4.3) ολοκληρώθηκε.

Έστω f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0,1]$. Τότε $u = v$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$, όπως αποδείξαμε. Άρα, $m(\{u \neq v\}) = 0$. Όμως $A_f \subseteq \{u \neq v\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ έχει μέτρο μηδεν ως αριθμήσιμο. Συνεπώς $m(A_f) = 0$.

Έστω $m(A_f) = 0$. Επειδή $\{u \neq v\} \subseteq A_f \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ έχει μέτρο μηδεν ως αριθμήσιμο, έπεται ότι

$$m(\{u \neq v\}) \leq m(A_f) + m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) = 0.$$

Επομένως $u = v$ σχεδόν παντου στο $[0,1]$. Άρα, $\int_{[0,1]} v = \int_{[0,1]} u$. Από τον ορισμό των u και v έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} L(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U(f, D_n)$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} (U(f, D_n) - L(f, D_n)) = 0$. Οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός D_n του $[0,1]$ με $(U(f, D_n) - L(f, D_n) < \varepsilon$. Συνεπώς f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0,1]$.

$\square$

Σημειώσεις 4.4.5. 1. Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.4.4, δηλαδή μια φραγμένη συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $[a,b]$ μπορεί να μην είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ολοκληρώσιμη κατα Lebesgue στο $[0,1]$, διότι είναι σχεδόν παντού ίση με την ολοκληρώσιμη κατα Lebesgue στο $[0,1]$ συνάρτηση $g(x) = 1$. Όμως η f δεν είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

2. Το Θεώρημα 4.4.4 δεν γενικεύεται σε όλα τα διαστήματα. Για παράδειγμα για $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ το $\int_{0^+}^{1} f(x)dx \in \mathbb{R}$ όμως η f δεν είναι είναι κατά Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1]$.

Θεώρημα 4.4.6. *1. Αν* $f \in \mathscr{L}^1([a,\infty))$, *τότε* $\displaystyle\int_{[a,\infty)} f = \lim_{t\to\infty} \int_{[a,t]} f$.

2. Αν $f \in \mathscr{L}^1((-\infty,b])$, *τότε* $\displaystyle\int_{(-\infty,b]} f = \lim_{t\to-\infty} \int_{[t,b]} f$.

3. Αν $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$, *τότε* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{t\to a^+} \int_{[t,b]} f = \lim_{t\to b^-} \int_{[a,t]} f$.

Θεώρημα 4.4.7. *1. Αν* f *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[a,t]$ *για κάθε* $t \in [a,\infty)$ *και το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ *συγκλίνει, τότε* $f \in \mathscr{L}^1([a,\infty))$ *και*

$$\int_{[a,\infty)} f = \int_a^\infty f(x)dx.$$

2. Αν f *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[t,b]$ *για κάθε* $t \in (-\infty,b]$ *και το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_{-\infty}^b |f(x)|dx$ *συγκλίνει, τότε* $f \in \mathscr{L}^1((-\infty,b])$ *και* $\displaystyle\int_{(-\infty,b]} f = \int_{-\infty}^b f(x)dx$.

3. Αν f *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[a,t]$ *για κάθε* $t \in [a,b)$ *και το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_a^{b^-} |f(x)|dx$ *συγκλίνει, τότε* $f \in \mathscr{L}^1([a,b))$ *και* $\displaystyle\int_{[a,b)} f = \int_a^{b^-} f(x)dx$.

4. Αν f *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[t,b]$ *για κάθε* $t \in (a,b]$ *και το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_{a^+}^b |f(x)|dx$ *συγκλίνει, τότε* $f \in \mathscr{L}^1((a,b])$ *και* $\displaystyle\int_{(a,b]} f = \int_{a^+}^b f(x)dx$.

Θεώρημα 4.4.8. *1. Αν* $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[a,t]$ *για κάθε* $t \in [a,\infty)$, *τότε*

$$\int_{[a,\infty)} f = \int_a^\infty f(x)dx.$$

2. Αν $f : (-\infty,b) \to [0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[t,b]$ *για κάθε* $t \in (-\infty,b]$, *τότε*

$$\int_{(-\infty,b]} f = \int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

3. Αν $f : [a,b) \to [0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[a,t]$ *για κάθε* $t \in [a,b)$, *τότε*

$$\int_{[a,b)} f = \int_a^b f(x)dx.$$

4. Αν $f : (a,b] \to [0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο* $[t,b]$ *για κάθε* $t \in (a,b]$, *τότε*

$$\int_{(a,b]} f = \int_a^b f(x)dx.$$

4.5 Ολοκλήρωμα στην αφηρημένη Θεωρία μέτρου.

Ορισμός 4.5.1. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

1. Αν $\psi : X \to [0, \infty)$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_{A_i}$ όπου $A_i \in \mathscr{A}$, τότε το ολοκλήρωμα της ψ στο X ορίζεται ως εξής:

$$\int_X \psi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \mu(A_i),$$

   ορίζοντας ότι $0 \cdot \infty = 0$.

2. Αν $f : X \to [0, \infty]$ μια $\mathscr{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο X ορίζεται ως εξής:

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \psi \, d\mu : 0 \leq \psi \leq f \text{ και } \psi \text{ είναι απλή και } \int_X \psi \, d\mu < \infty \right\}.$$

   Για $E \in \mathscr{A}$ το ολοκλήρωμα της f στο E ορίζεται ως εξής: $\displaystyle\int_E f = \int_X f \chi_E$

3. Αν $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μια $\mathscr{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = \max\{-f, 0\}$ είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμες και παίρνουν τιμές στο $[0, \infty]$. Επομένως ορίζονται τα ολοκληρώματα : $\displaystyle\int_X f^+ \, d\mu$ και $\displaystyle\int_X f^- \, d\mu$. Προφανώς $f = f^+ - f^-$.

   Αν $\displaystyle\int_X f^+ \, d\mu < \infty$ ή $\displaystyle\int_X f^- \, d\mu < \infty$, τότε το ολοκλήρωμα της f στο X ορίζεται ως εξής:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

   Η f καλείται *ολοκληρώσιμη* στο X όταν $\displaystyle\int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε:

$$\mathscr{L}^1(\mu) = \{f : X \to [-\infty, \infty] : f \text{ είναι } \mathscr{A}\text{-μετρήσιμη και } \int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}.\}$$

4. Έστω $E \in \mathscr{A}$ και $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μια $\mathscr{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση.

   Αν $\displaystyle\int_E f^+ \, d\mu < \infty$ ή $\displaystyle\int_E f^- \, d\mu < \infty$, τότε το ολκλήρωμα της f στο E ορίζεται ως εξής:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \chi_E \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

   Αν $\displaystyle\int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο E.

Κεφάλαιο 5

Χώροι L^p

5.1 Νορμικοί χώροι και μετρικοί χώροι.

Ορισμός 5.1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο.
Μία απεικόνιση $d : X \times X \to [0, \infty)$ καλείται *μετρική στο X* όταν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ιδιότητα).

Το ζεύγος (X, d), όπου d είναι μετρική στο μη κενό σύνολο X καλείται *μετρικός χώρος*.

Ορισμός 5.1.2. Έστω $(X, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.
Μια συνάρτηση $\nu : X \to [0, \infty)$ καλείται *νόρμα* στο X όταν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\nu(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(ii) $\nu(cx) = |c|\nu(x)$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

(iii) $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ιδιότητα).

Το ζεύγος (X, ν), όπου X διανυσματικός χώρος και ν νόρμα στο X, καλείται *νορμικός χώρος*.

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με ουδέτερο στοιχείο 0_X.
Από τους ορισμούς 5.1.1 και 5.1.2 συνεπάγονται οι ακόλουθες προτάσεις.

- Αν $\nu : X \to [0, \infty)$ είναι νόρμα, τότε η απεικόνιση $d_\nu : X \times X \to [0, \infty)$ με $d_\nu(x, y) = \nu(x - y)$ είναι μετρική.
- Αν $d : X \times X \to [0, \infty)$ είναι μετρική, τότε η απεικόνιση $\nu_d : X \to [0, \infty)$ με $\nu_d(x) = d(x, 0_X)$ είναι νόρμα.

Συνεπώς σε κάθε νορμικό χώρο (X, ν) αντιστοιχεί μετρικός (διανυσματικός) χώρος (X, d_ν).

5.2 Ορισμός του χώρου $\mathscr{L}^p(E)$.

Για ένα μετρήσιμο σύνολο E έχουμε ορίσει το σύνολο $\mathscr{L}^1(E)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : E \to \mathbb{R}$ για τις οποίες $\int_E f < \infty$. Θα γενικεύσουμε τον ορισμό αυτό ορίζοντας το σύνολο $\mathscr{L}^p(E)$ για κάθε $p \in (0, \infty]$.

Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, η συνάρτηση $|f|^p$, $p \in (0, \infty)$ είναι επίσης μετρήσιμη ως σύνθεση μέτρήσιμης συνάρτησης f με συνεχείς συναρτήσεις $x \to |x|$ και $x \to x^p$. Επομένως ορίζεται το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα $\int_E |f|^p$.

Ορισμός 5.2.1. Για $E \in \mathscr{M}$ και $p \in (0, \infty)$ ορίζουμε

$$\mathscr{L}^p(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } \int_E |f|^p < \infty \right\}.$$

Συμβολίζουμε $\mathscr{L}^p \equiv \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Προφανώς

$$f \in \mathscr{L}^p(E) \Longleftrightarrow |f|^p \in \mathscr{L}^1(E).$$

Ορίζουμε $\|\cdot\|_p : \mathscr{L}^p(E) \to [0, \infty)$ με

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Παραδείγματα 5.2.2.

1. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ με $m(E) < \infty$ και $f : M \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $f \in \mathscr{L}^p(E)$ για κάθε $p \in (0, \infty)$.

   Πράγματι, υπάρχει $M \in [0, \infty)$ με $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in E$. Επομένως $|f(x)|^p \leq M^p$ για κάθε $x \in E$. συνεπώς

   $$\int_E |f|^p \leq \int_E M = Mm(E) < \infty.$$

2. Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Θα δείξουμε ότι $f \notin \mathscr{L}^p\left((0, \infty)\right)$ για κάθε $p \in (0, \infty)$.

   Από το Θεώρημα 4.4.8,

   $$\begin{aligned} \int_{(0,1]} |f|^p &= \int_{(0,1]} \frac{1}{x^{2p}} = \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^{2p}} < \infty \Longleftrightarrow 2p < 1, \text{ και} \\ \int_{(1,\infty)} |f|^p &= \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^{2p}} = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2p}} < \infty \Longleftrightarrow 2p > 1 \end{aligned}$$

   Συνεπώς $\displaystyle\int_{(0,\infty)} |f|^p = \int_{(0,1]} |f|^p + \int_{(1,\infty)} |f|^p = \infty$ για κάθε $p \in (0, \infty)$

Θεώρημα 5.2.3. *Αν $p \in (0,\infty)$ και $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$, τότε $f+g, cf \in \mathscr{L}^p(E)$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. $|f+g|^p \le |2\max\{|f|,|g|\}|^p = 2^p|\max\{|f|,|g|\}|^p \le 2^p|\max\{|f|^p,|g|^p\}| \le 2^p(|f|^p+|g|^p)$.
Επειδή $\int_E |f|^p < \infty$ και $\int_E |g|^p < \infty$ παίρνουμε:

$$\int_E |f+g|^p \le 2^p\left(\int_E |f|^p + \int_E |g|^p\right) < \infty$$

Επίσης $\displaystyle\int_E |cf|^p = |c|^p \int_E |f|^p < \infty$. Συνεπώς $cf \in \mathscr{L}^p(E)$. □

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη δύο γνωστές ανισότητες:

- **Ανισότητα Hölder**
  Αν $f \in \mathscr{L}^p(E)$ και $h \in \mathscr{L}^q(E)$, όπου $p, q \in (1,\infty)$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε $fh \in \mathscr{L}^1(E)$ και
  $$\|fh\|_1 \le \|f\|_p\|h\|_q$$
- **Ανισότητα Minkowski**
  Αν $f, h \in \mathscr{L}^p(E)$, όπου $p \in [1,\infty)$, τότε $f+h \in \mathscr{L}^p(E)$ και
  $$\|f+h\|_p \le \|f\|_p + \|h\|_p$$

Θεώρημα 5.2.4. *Η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : \mathscr{L}^p(E) \to [0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες για οποιαδήποτε $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$ και για κάθε $c \in \mathbb{R}$:*

(i) $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ *σχεδόν παντού στο E.*

(ii) $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$.

(iii) $\|f+h\|_p \le \|f\|_p + \|h\|_p$.

Απόδειξη. *(i)* $\|f\|_p = 0 \iff \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff \int_E |f|^p = 0 \iff |f|^p = 0$ σχεδόν παντού στο E $\iff f = 0$ σχεδόν παντού στο E.

(ii) $\|cf\|_p = \left(\int_E |cf|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|c|^p \int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |c|\left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |c|\|f\|_p$.

(iii) Είναι η ανισότητα Minkowski.

□

Σημείωση 5.2.5. Αν $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$, τότε $f+g, c\cdot f \in \mathscr{L}^p(E)$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι η τριάδα $(\mathscr{L}^p(E), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.
Από το Θεώρημα 5.2.4 η απεικόνιση $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty)$, ικανοποιεί τις ιδιότητες *(ii)* και *(iii)* του ορισμού της νόρμας, δεν ιακνοποιεί όμως την ιδιότητα *(i)*.
Συνεπώς $\|\cdot\|_p$ δεν είναι νόρμα στο $\mathscr{L}^p(E)$.

5.3 Νορμικός χώρος $L^p(E)$.

Ορισμός 5.3.1. Στο σύνολο $\mathscr{L}^p(E)$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\overset{\sigma.\pi.}{\sim}$ ως εξής

$$f \overset{\sigma.\pi.}{\sim} g \iff f = g \text{ σχεδόν παντου στο } E.$$

Ορίζουμε

$$L^p(E) = \mathscr{L}^p(E)\big|_{\overset{\sigma.\pi.}{\sim}}.$$

Δηλαδή $L^p(E)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathscr{L}^p(E)$ ως προς τη σχέση $\overset{\sigma.\pi.}{\sim}$

Για κάθε $f \in \mathscr{L}^p(E)$ συμβολίζουμε με $[f]$ την κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση $\overset{\sigma.\pi.}{\sim}$, η οποία περιέσχει την f. Ορίζουμε

$$\|\cdot\|_p : L^p(E) \to [0, \infty) \text{ με } \|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη από την επιλογή του $f \in [f]$. Πράγματι, αν $g \in [f]$, τότε $|f|^p = |g|^p$ σχεδόν παντού στο E. Από το Θεώρημα 4.3.5 συνεπάγεται ότι $\int_E |f|^p = \int_E |g|^p$. Συνεπώς

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^p = \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_p.$$

Θεώρημα 5.3.2. *Το ζεύγος $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι νορμικός χώρος για κάθε $p \in [1, \infty)$.*

Απόδειξη. Επαληθεύεται εύκολα ότι στο σύνολο $L^p(E)$ είναι καλά ορισμένες οι ακόλουθες πράξεις

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f+g] \in L^p(E) \\ c \cdot [f] &= [cf] \in L^p(E),\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

και ότι η τριάδα $(L^p(E), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ με ουδέτερο στοιχείο το $[0]$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της νόρμας, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.4.

(i) $\|[f]\|_p = 0 \iff \|f\|_p = 0 \iff f = 0$ σχεδόν παντού στο $E \iff f \in [0] \iff [f] = [0]$.

(ii) $\|[cf]\|_p = \|cf\|_p = |c|\|f\|_p = |c|\|[f]\|_p$.

(iii) Από την ανισότητα Minkowski:

$$\|[f+g]\|_p = \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|[f]\|_p + \|[g]\|_p.$$

□

5.4 Η πληρότητα του χώρου $L^p(E)$.

5.4.1 Η έννοια της πληρότητας.

Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία του X.

Ένα στοιχείο $a \in X$ καλείται όριο της $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, όταν $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι *ή* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *συγκλίνει στο* a και γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Μια ακολουθία ενός μετρικού χώρου X καλείται *συγκλίνουσα* στον X όταν έχει όριο στο X.

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ του X καλείται *ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία* όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.

Ο μετρικός χώρος (X, d) καλείται *πλήρης* όταν κάθε ακολουθία Cauchy του X έχει όριο στο X.

Αποδεικνύεται ότι:

- Μια ακολουθία ενός μετρικού χώρου X μπορεί να έχει το πολύ ένα όριο.
- Σε μετρικό χώρο κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.
- Αν η ακολουθία Cauchy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ του X περιέχει μια υπακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνουσα σε ένα σημείο $a \in X$, τότε $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$.

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας νορμικός χώρος και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$. Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \{x_1 + \cdots + x_n\}_{i=1}^{\infty}$ καλείται συγκλίνουσα, όταν υπάρχει $S \in X$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \|(x_1 + \cdots + x_n) - S\| = 0$.

Πρόταση 5.4.1. *Ένας νορμικός χώρος $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα (ως προς τη μετρική $d_{\|\cdot\|}$ του X) σειρά του X συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ μια σειρά του X. Θέτουμε $\widetilde{s}_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ και $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο X είναι πλήρης και η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ συγκλίνει.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Η $\{\widetilde{s}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ως συγκλίνουσα είναι Cauchy. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\|\widetilde{s}_{n+k} - \widetilde{s}_n\| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k = 1, 2, \ldots.$ Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|s_{n+k} - s_n\| = \|\sum_{i=n+1}^{n+k} x_i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i\| = \widetilde{s}_{n+k} - \widetilde{s}_n = \|\widetilde{s}_{n+k} - \widetilde{s}_n\| < \varepsilon.$$

Επομένως $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ως ακολουθία Cauchy του πλήρους X, δηλαδή η $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ συγκλίνει.

($\Longleftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι κάθε απολύτος συγκλίνουσα σειρά του X συγκλίνει.

Έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια τυχαία ακολουθία Cauchy του X. Για να δείξουμε ότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ συγκλίνει αρκεί να βρούμε μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Επειδή η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, επαγωγικά για κάθε k μπορεί να οριστεί i_k έτσι ώστε η ακολουθία $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ να είναι γνησίως αύξουσα και $\|x_i - x_j\| < \frac{1}{2^k}$ για $i, j \geq i_k$.

Θεωρούμε την τηλεσκοπική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k})$. Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{i_{k+1}} - x_{i_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Επομένως $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{i_{k+1}} - x_{i_k}\|$ συγκλίνει. Από την υπόθεση η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k})$ συγκλίνει ως απολύτως συγκλίνουσα. Άρα, η ακολουθία $\{\sum_{k=1}^{n}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k})\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Όμως $\sum_{k=1}^{n}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k}) = x_{i_n} - x_{i_1}$. Επομένως η ακολουθία $\{x_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Συνεπώς η ακολουθία Cauchy $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ συγκλίνει. $\square$

5.4.2 Μετρικός χώρος $L^p(E)$.

Στη νόρμα $\|\cdot\|_p$ αντιστοιχεί η μετρική στο $d_p : L^p(E) \to [0,\infty)$ που σε οποιαδήποτε $[f],[g] \in L^p(E)$ αντιστοιχεί τον αριθμό $d_p([f],[g]) = \|f-g\|_p \in [0,\infty)$.

Θα δείξουμε ότι ο αριθμος $d_p([f],[g])$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των στοιχείων f και g στις κλάσεις $[f]$ και $[g]$. Πράγματι, αν $\hat{f} \in [f]$ και $\hat{g} \in [g]$, τότε η συνάρτηση $\hat{f} - \hat{g}$ ειναι σχεδόν παντού ίση με την $f-g$. Επομένως

$$\|f-g\|_p = \left(\int_E |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |\hat{f}-\hat{g}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\hat{f}-\hat{g}\|_p.$$

Η ακολουθία $\{[f_n]\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(E)$ συγκλίνει στο $[f] \in L^p(E)$, όταν $\lim\limits_{n\to\infty} d_p([f_n],[f]) = 0$. Δηλαδή

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Η $\{[f_n]\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(E)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $L^p(E)$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $d_p([f_n],[f_m]) < \varepsilon$, δηλαδή σχεδόν παντού στο E ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon, \quad \forall n,m \geq n_0.$$

Θα συμβολίζουμε για ευκολία το στοιχείο $[f]$, του $L^p(E)$ με f.

Τότε το σύμβολο της ισότητας $=$ για τα στοιχεία του $L^p(E)$ θα σημαίνει ''ίσα σχεδόν παντού''.

Θεώρημα 5.4.2. *(Riesz-Fisher) Για κάθε $E \in \mathscr{M}$ και για κάθε $p \in [1,\infty)$ ο μετρικός χώρος $(L^p(E), d_p)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.4.1 αρκεί να δείξουμε όι κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά του νορμικού χώρου $L^p(E)$ συγκλίνει.

Θεωρούμε μια απολύτως συγκλίνουσα ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_p$ σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ με $f_n \in L^p(E)$.

Θέτουμε $\widehat{S} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \in L^p(E)$, δηλαδή $\lim\limits_{N\to\infty} \left\| \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \|f_n\|_p\right) - \widehat{S} \right\|_p = 0$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

Από την ανισότητα Minkowski για κάθε φυσικό αριθμό N και για $p \in [1,\infty)$ παίρνουμε:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} |f_n|\Big\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \Big\||f_n|\Big\|_p = \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = \widehat{S} \Longrightarrow \left(\Big\|\sum_{n=1}^{N} |f_n|\Big\|_p\right)^p \leq \widehat{S}^p.$$

Η ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} |f_n|\right\}_{N=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, επομένως για $p \in [1,\infty)$ η ακολουθία $\left\{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} |f_n|\right)^p\right\}_{N=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης:

$$\begin{aligned}
\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right)^p &= \int_E \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f_n|\right)^p = \int_E \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|\right)^p \underset{\Theta.\mathrm{M}.\Sigma}{=} \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_E \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|\right)^p = \lim_{N\to\infty} \left(\Big\|\sum_{n=1}^{N} |f_n|\Big\|_p\right)^p \leq \widehat{S}^p < \infty.
\end{aligned}$$

Επομένως $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n| \in L^p(E)$. Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in E$. Συνεπώς, σχεδόν για κάθε $x \in E$ η αριθμητική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in E$, διότι διαφορετικά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν $E_0 \subseteq E$. Οπότε για $\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \setminus E_0 \\ 0, & x \in E_0 \end{cases}$, παίρνουμε $\widetilde{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in E$ και $\widetilde{S}$ είναι σχεδόν παντού ίση στο E με την $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Έστω $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Επειδή

$$|S| = |\lim_{n\to\infty}(f_1 + \cdots + f_n)| = \lim_{n\to\infty}|f_1 + \cdots + f_n| \leq \lim_{n\to\infty}(|f_1| + \cdots + |f_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| \in L^p(E),$$

έπεται ότι $S \in L^p(E)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στη συνάρτηση S στη μετρική του $L^p(E)$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{N\to\infty}\|(\sum_{n=1}^{N} f_n) - S\|_p = 0$.

Από τον ορισμό της S, $\lim\limits_{N\to\infty}\Big|\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big| = 0$. Επομένως $\lim\limits_{N\to\infty}\Big|\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big|^p = 0$.

Επειδή

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n - S\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} f_n\right| + |S| \leq \sum_{n=1}^{N}|f_n| + |S| \leq 2\widehat{S} \in \mathscr{L}^1(E),$$

και $p \in [1, \infty)$, έπεται ότι $\left|\sum_{n=1}^{N} f_n - S\right|^p \leq 2^p \widehat{S}^p \in \mathscr{L}^1(E)$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης (Θ.Κ.Σ) στην ακολουθία συναρτήσεων $\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} f_n - S\right|^p\right\}_{N=1}^{\infty}$, παίρνουμε

$$\lim_{N\to\infty}\int_E\Big|\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big|^p \underset{\text{Θ.Κ.Σ}}{=} \int_E \lim_{N\to\infty}\Big|\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big|^p = \int_E 0 = 0.$$

Συνεπώς

$$\lim_{N\to\infty}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big\|_p = \lim_{N\to\infty}\left(\int_E\Big|\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lim_{N\to\infty}\int_E\Big|\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) - S\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

□

Ορισμός 5.4.3. Κάθε πλήρης νορμικός χώρος καλείται *χώρος Banach*. .

Δηλαδή, ένας νορμικός χώρος (X, ν) καλείται χώρος Banach, όταν ο αντίστοιχος μετρικός χώρος (X, d_ν) είναι πλήρης.

Πόρισμα 5.4.3. *Για κάθε $E \in \mathscr{M}$ και για κάθε $p \in [1, \infty)$ ο νορμικός χώρος $L^p(E)$ είναι χώρος Banach.*

5.5 Ο χώρος L^∞ ουσιαστικά φραγμένων συναρτήσεων.

Ορισμός 5.5.1. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathscr{M}$, καλείται *ουσιαστικά φραγμένη στο* E όταν υπάρχει $M \in [0, \infty)$ για το οποίο $m(\{x \in E : |f(x)| > M\}) = 0$.

Δηλαδή η f είναι ουσιαστικά φραγμένη στο E όταν υπάρχει $M \in [0, \infty)$ για το οποίο $|f(x)| \leq M$ σχεδόν σε όλα τα σημεία $x \in E$.

Το σύνολο όλων των ουσιαστικά φραγμένων στο $E \in \mathscr{M}$ συναρτήσεων συμβολίζεται με $\mathscr{L}^\infty(E)$:

$$\mathscr{L}^\infty(E) = \{f : E \to \mathbb{R} |\ f \text{ ουσιαστικά φραγμένη στο } E\}.$$

Συμβολίζουμε $\mathscr{L}^\infty \equiv \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Προφανώς κάθε φραγμένη απεικόνιση είναι ουσιαστικά φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται από το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.5.2. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι φραγμένη, όμως είναι ουσιαστικά φραγμένη διότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \notin \mathbb{Q}$ και $m(\mathbb{Q}) = 0$.

Ορισμός 5.5.3. Ορίζουμε $\|\cdot\|_\infty : \mathscr{L}^\infty(E) \to [0, \infty)$ με

$$\|f\|_\infty = \min\{M \in [0, \infty) : m(\{x \in E : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_\infty$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι έχει ελάχιστο στοιχείο το σύνολο

$$S_f = \{M \in [0, \infty) : m(\{x \in E : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Πράγματι, το S_f ως κάτω φραγμένο με αριθμό μηδέν έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf(S_f)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\inf(S_f) \in S_f$, οπότε $\inf(S_f) = \min(S_f)$. Πράγματι,

$$\{x \in E : |f(x)| > \inf(S_f)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E : |f(x)| > \inf(S_f) + \frac{1}{n}\right\}.$$

Επειδή $\inf(S_f) + \frac{1}{n} \in S_f$ για κάθε n, έπεται ότι τα σύνολα $\left\{x \in E : |f(x)| > \inf(S_f) + \frac{1}{n}\right\}$ είναι μέτρου μηδέν. Από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα έπεται ότι

$$m(\{x \in E : |f(x)| > \inf(S_f)\}) = 0.$$

Συνεπώς $\inf(S_f) \in S_f$.

Για μια συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^\infty(E)$ ο αριθμός $\|f\|_\infty$ καλείται *ουσιαστικό supremum της* f.

Πρόταση 5.5.4. *Κάθε ουσιαστικά φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη σε μετρήσιμο σύνολο E είναι σχεδόν παντού ίση με μια φραγμένη συνάρτηση F, για την οποία $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Απόδειξη. Για $f \in \mathscr{L}^\infty(E)$ θέτουμε

$$E_f = \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}.$$

Επειδή $\|f\|_\infty \in S_f$, έπεται ότι $m(E_f) = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $F : E \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \setminus E_f \\ 0, & x \in E_f. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $F \overset{\sigma.\pi.}{\sim} f$, διότι το σύνολο

$$\{x \in E : f(x) \neq F(x)\} \subseteq E_f$$

είναι μέτρου μηδέν. Επίσης παρατηρούμε ότι η F είναι φραγμένη, διότι $|F(x)| \leq \|f\|_\infty$ σε κάθε $x \in E$. Από τον ορισμό της συνάρτησης $\|\cdot\|_\infty$ έπεται ότι

$$\|f\|_\infty = \|F\|_\infty.$$

□

Ορισμός 5.5.4. Στο σύνολο $\mathscr{L}^\infty(E)$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\overset{\sigma.\pi.}{\sim}$ ως εξής

$$f \overset{\sigma.\pi.}{\sim} g \iff f = g \text{ σχεδόν παντου στο } E.$$

Ορίζουμε

$$L^\infty(E) = \mathscr{L}^\infty(E)\big|_{\overset{\sigma.\pi.}{\sim}}.$$

Δηλαδή $L^\infty(E)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathscr{L}^\infty(E)$ ως προς τη σχέση $\overset{\sigma.\pi.}{\sim}$

Για κάθε $f \in \mathscr{L}^\infty(E)$ συμβολίζουμε με $[f]$ την κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση $\overset{\sigma.\pi.}{\sim}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $g \in [f]$ ισχύει $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned} m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} &= 0 \\ m(\{x \in E : f(x) > \|f\|_\infty\} &= 0 \\ \{x \in E : g(x) > \|f\|_\infty\} &\subseteq \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in E : g(x) = f(x) > \|f\|_\infty\} \end{aligned}$$

Επομένως $m(\{x \in E : g(x) > \|f\|_\infty\}) = 0$. Από τον ορισμό του $\|g\|_\infty\}$ έπεται ότι $\|g\|_\infty\} \leq \|f\|_\infty$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\|f\|_\infty\} \leq \|g\|_\infty$. Άρα, $\|f\|_\infty\} = \|g\|_\infty$.

Συνεπώς είναι καλά ορισμένη η απεικόνιση

$$\|\cdot\|_\infty : L^\infty(E) \to (0, \infty) \text{ με } \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Θεώρημα 5.5.5. *Το ζεύγος $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι νορμικός χώρος.*

Στη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ αντιστοιχεί η μετρική στο $d_\infty : L^\infty(E) \to [0, \infty)$, η οποία σε οποιαδήποτε $[f], [g] \in L^\infty(E)$ αντιστοιχεί τον αριθμό $d_\infty([f], [g]) = \|f - g\|_\infty \in [0, \infty)$.

Θεώρημα 5.5.6. *Για κάθε $E \in \mathscr{M}$ ο μετρικός χώρος $(L^\infty(E), d_\infty)$ είναι πλήρης.*

Πόρισμα 5.5.7. *Για κάθε $E \in \mathscr{M}$ ο νορμικός χώρος $L^\infty(E)$ είναι χώρος Banach.*

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Κουμουλής και Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[2] Δ. Μπετσάκος, *Εισαγωγή στην Πραηματική Ανάλυση*, Εκδόσεις Αφοι Κυριακίδη Α.Ε., 2016.

[3] Γ.Κ. Σαραντόπουλος, *Σημειώσεις Θεωρίας μέτρου και Ολοκλήρωσης*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2008 (https://semfe.gr/files/users/184/Lebesgue.pdf).

[4] W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw–Hill, 1976.

[5] M. Papadimitrakis, *Notes on Measure Theory*, 2004 (http://fourier.math.uoc.gr/ mathweb/lnotes/papadimitrakis+graduate-measure-theory.pdf).