Σοφία Ζαφειρίδου

Γενική Τοπολογία ΙΙ

Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών

Πάτρα 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες.

1.1 Τοπολογικοί χώροι.

Ορισμός 1.1.1. Μια οικογένεια υποσυνόλων T ενός συνόλου X καλείται *τοπολογία* του X αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\emptyset, X \in T$
2. $U_1, U_2 \in T \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in T$
3. $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq T \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$

Αν T είναι τοπολογία του X, τότε το ζεύγος (X,T) καλείται *τοπολογικός χώρος*.

Τα στοιχεία της τοπολογίας T καλούνται *ανοικτά υποσύνολα* (ως προς την T) του X.

Όταν η τοπολογία του X είναι συγκεκριμένη και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, αντί της έκφρασης "τοπολογικός χώρος (X,T)" χρησιμοποιείται η έκφραση "τοπολογικός χώρος X" ή απλά "χώρος X".

Ένα υποσύνολο F ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *κλειστό* αν το υποσύνολο $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

Από τις ιδιότητες 2 και 3 του ορισμού της τοπολογίας προκύπτει ότι

(i) Η τομή των στοιχείων οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας $\{G_1, ..., G_n\}$ ανοικτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X είναι ανοικτό σύνολο.

(ii) Η ένωση των στοιχείων οποιασδήποτε οικογένειας $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X είναι ανοικτό σύνολο.

Θεώρημα 1.1.2. *Η τομή των στοιχείων οποιασδήποτε οικογένειας $\{F_i\}_{i\in I}$ κλειστών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X είναι κλειστό σύνολο.*

Θεώρημα 1.1.3. *Η ένωση των στοιχείων οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας $\{F_1, ..., F_n\}$ κλειστών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X είναι κλειστό σύνολο.*

Θεώρημα 1.1.4. *Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο και F είναι κλειστό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X, τότε*

(i) *$F \setminus G$ είναι κλειστό σύνολο και*

(ii) *$G \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο.*

1.2 Περίβλημα και εσωτερικό.

Έστω (X,T) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.

Ένα σημείο $x \in X$ καλείται

- *εσωτερικό σημείο* του A αν υπάρχει $U \in T$ τέτοιο ώστε $x \in U \subseteq A$
- *σημείο επαφής* του A αν για κάθε $U \in T$ τέτοιο ώστε $x \in U$ ισχύει $U \cap A \neq \emptyset$
- *οριακό σημείο* του A αν για κάθε $U \in T$ τέτοιο ώστε $x \in U$ ισχύει

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

- *μεμονωμένο σημείο* του A αν υπάρχει $U \in T$ τέτοιο ώστε $U \cap A = \{x\}$.

Στο A αντιστοιχούμε τα εξής σύνολα:

$Int(A) = \{x \in X : x$ εσωτερικό σημείο του $A\}$ - *εσωτερικό (interior)* του A

$Cl(A) = \{x \in X : x$ σημείο επαφής του $A\}$ - *περίβλημα (closure)* του A

$A^d = \{x \in X : x$ οριακό σημείο του $A\}$ - *παράγωγος (derivative)* του A

$Bd(A) = Cl(A) \cap Cl(X \setminus A)$ - *σύνορο (boundary)* του A

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $G \subseteq X$.*

(i) G είναι ανοικτό αν και μόνον αν $G = Int(G)$.

(ii) G είναι κλειστό αν και μόνον αν $G = Cl(G)$.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω X ένας μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Τότε στο X*

(i) $Cl(G)$ είναι κλειστό, (ii) $Int(G)$ είναι ανοικτό, (iii) $Bd(G)$ είναι κλειστό.

Θεώρημα 1.2.2. *Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε*

(i) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$

(ii) $Int(Int(A)) = Int(A)$

(iii) $Int(A) \subseteq A \subseteq Cl(A)$

(iv) $X \setminus Cl(A) = Int(X \setminus A)$

(v) $X \setminus Int(A) = Cl(X \setminus A)$

(vi) $Bd(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$

(vii) $Cl(A) = A \cup A^d$.

Θεώρημα 1.2.3. *Αν X είναι ένας τοπολογικού χώρος και $A \subseteq B \subseteq X$, τότε*

$$Int(A) \subseteq Int(B), \quad Cl(A) \subseteq Cl(B), \quad A^d \subseteq B^d$$

Θεώρημα 1.2.4. *Αν X είναι ένας τοπολογικού χώρος και $A, B \subseteq X$, τότε*

(a) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$

(b) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

Ορισμός 1.2.5. Μία οικογένεια $\mathfrak{B}$ ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *βάση* του X αν κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι ένωση κάποιων στοιχείων της $\mathfrak{B}$.

Θεώρημα 1.2.6. *Μια οικογένεια ανοικτών συνόλων $\mathfrak{B} = \{O_i\}_{i\in I}$ ενός τοπολογικού χώρου X είναι βάση του X αν και μόνον αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $O_i \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε*

$$x \in O_i \subseteq G$$

Ορισμός 1.2.7. Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *παντού πυκνό* στο X αν $Cl(A) = X$.

Ορισμός 1.2.8. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *διαχωρίσιμος* αν περιέχει ένα παντού πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο.

1.3 Υπόχωροι τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 1.3.1. Έστω (X, T) ένας τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Αποδεικνύεται ότι η οικογένεια

$$T|_Y = \{U \cap Y : U \in T\}$$

είναι τοπολογία του Y. Η $T|_Y$ καλείται *σχετική τοπολογία* του υποσυνόλου Y του X ως προς την τοπολογία T του X.

Ο τοπολογικός χώρος $(Y, T|_Y)$ καλείται *τοπολογικός υπόχωρος* ή απλά *υπόχωρος* του (X, T).

Όταν η τοπολογία ενός συνόλου X είναι συγκεκριμένη και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, αντί της έκφρασης "υπόχωρος $(Y, T|_Y)$ του (X, T)" χρήσιμοποιείται η έκφραση "υπόχωρος Y του τοπολογικού χώρου X" ή απλά "υπόχωρος Y του χώρου X".

Έστω Y υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και $G \subseteq Y$. Από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας προκύπτει ότι

(i) G είναι ανοικτό στον υπόχωρο Y αν και μόνον αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G^* του X τέτοιο ώστε $G = Y \cap G^*$.

(ii) G είναι κλειστό στον υπόχωρο Y αν και μόνον αν υπάρχει κλειστό υποσύνολο G^* του X τέτοιο ώστε $G = Y \cap G^*$.

Πρόταση 1.3.2. *Αν X είναι τοπολογικός χώρος και $G \subseteq Y \subseteq X$, τότε*

1. $Cl_Y(G) = Y \cap Cl_X(G)$.
2. $Bd_Y(G) = Y \cap Cl_X(G) \cap Cl_X(Y \setminus G)$.
3. $Int_Y(G) = G \setminus Cl_X(Y \setminus G)$.

1.4 Συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών χώρων.

Έστω (X, T_X) ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$.

Καλούμε *ανοικτή περιοχή* του σημείου x στον (X, T_X) κάθε ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχει το x, δηλαδή κάθε $U \in T_X$ τέτοιο ώστε $x \in U$.

Ορισμός 1.4.1. Έστω (X, T_X) και (Y, T_Y) δύο τοπολογικοί χώροι.

Μιά απεικόνιση $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ καλείται *συνεχής στο σημείο* $x \in X$ αν για κάθε ανοικτή περιοχή $U_{f(x)}$ του $f(x)$ στο Y υπάρχει ανοικτή περιοχή V_x του x στο X τέτοια ώστε:

$$f(V_x) \subseteq U_{f(x)}$$

Δηλαδή

$$f(x) \in U_{f(x)} \in T_Y \Longrightarrow \exists V_x \in T_X :\ x \in V_x \text{ και } f(V_x) \subseteq U_{f(x)}$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$, τότε η f καλείται *συνεχής στο* X.

Παραδείγματα 1.4.2.

1. Κάθε σταθερή απεικόνιση $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ ($f(x) = y_0 \in Y$ για κάθε $x \in X$) είναι συνεχής.

2. Η ταυτοτική απεικόνιση απεικόνιση $f : (X, T_X) \to (X, T_X)$ ($f(x) = x$ για κάθε $x \in X$) είναι συνεχής.

3. Καθε απεικόνιση ορισμένη σε ένα διακριτικό χώρο είναι συνεχής.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες συνεχούς απεικόνισης.

Θεώρημα 1.4.3. *Μια απεικόνιση* $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ *είναι συνεχής στο* $x_0 \in X$ *αν και μόνον αν*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Πόρισμα 1.4.4. *Μια απεικόνιση* $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ *είναι συνεχής αν και μόνον αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ισχύει*

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Θεώρημα 1.4.5. *Έστω* $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ *μια απεικόνιση.*

Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) f *είναι συνεχής στο* X

(ii) *το σύνολο* $f^{-1}(G)$ *είναι ανοικτό στο* X *για κάθε* G *ανοικτό στο* Y

(iii) *το σύνολο* $f^{-1}(F)$ *είναι κλειστό στο* X *για κάθε* F *κλειστό στο* Y

(iv) $f(Cl(S)) \subseteq Cl(f(S))$ *για κάθε* $S \subseteq X$

Ανοικτές και κλειστές απεικονίσεις.

Ορισμός 1.4.6. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$, από ένα τοπολογικό χώρο X σε ένα τοπολογικό χώρο Y, καλείται *ανοικτή* αν η f είναι συνεχής και για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X η εικόνα $f(U)$ του U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.

Ορισμός 1.4.7. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$, από ένα τοπολογικό χώρο X σε ένα τοπολογικό χώρο Y, καλείται *κλειστή* αν η f είναι συνεχής και για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X η εικόνα $f(F)$ του F είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

Θεώρημα 1.4.8. *Έστω $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ μια συνεχής απεικόνιση. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) f είναι κλειστή απεικόνιση, *(ii) $f(Cl(S)) = Cl(f(S))$ για κάθε $S \subseteq X$.*

Ομοιομορφισμοί.

Ορισμός 1.4.9. Μιά απεικόνιση $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ καλείται ομοιομορφισμός αν

(i) f είναι ένα προς ένα και επί,

(ii) f είναι συνεχής,

(iii) f^{-1} είναι συνεχής.

Δύο τοπολογικοί χώροι (X, T_X) και (Y, T_Y) καλούνται ομοιομορφικοί αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$.

Θεώρημα 1.4.10. *Έστω $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ μια ένα προς ένα και συνεχής απεικόνιση του X επί του Y. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) f είναι ομοιομορφισμός

(ii) f είναι κλειστή απεικόνιση

(iii) f είναι ανοικτή απεικόνιση

Παραδείγματα 1.4.11.

1. Η απεικόνιση $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι ομοιμορφισμός.
2. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιμορφισμός.
3. Η απεικόνιση $f : Y \to \mathbb{R}$, όπου $Y = [(-\infty, 0] \times \{1\}] \cup [(0, \infty) \times \{2\}]$ με $f(x, y) = x$ δεν είναι ομοιμορφισμός

Τοπολογικές ιδιότητες.

Μια ιδιότητα $\mathcal{P}$ ένος τοπολογικού χώρου καλείται τοπολογική αν μεταφέρεται με ομοιομορφισμούς, δηλαδή αν ένας τοπολογικος χώρος X έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$, τότε κάθε χώρος ομοιομορφικός με τον X έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$.

Τοπολογικές ιδιότητες είναι: η συμπαγότητα, η συνεκτικότητα, η τοπική συνεκτικότητα, η διάσταση ενός τοπολογικού χώρου κ.τ.λ..

1.5 Σταθερό σημείο μιας απεικόνισης.

Ορισμός 1.5.1. Ένα σημείο $s \in X$ καλείται *σταθερό σημείο* μιας απεικόνισης $f : X \to X$ αν και μόνον αν $f(s) = s$.

Ορισμός 1.5.2. Ένας χώρος X λέγεται ότι έχει την *ιδιότητα του σταθερού σημείου*, όταν κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ έχει σταθερό σημείο.

Θεώρημα 1.5.3. *Αν ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε κάθε χώρος ομοιμορφικός με τον X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Απόδειξη. Έστω ότι ένας χώρος Y είναι ομοιομορφικός με το X και $h : X \to Y$ είναι ένας ομοιομορφισμός. Θεωρούμε μια συνεχής απεικόνιση $f : Y \to Y$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Η απεικόνιση $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ είναι συνεχής. Επειδή ο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $h^{-1}(f(h(x_0)) = x_0$. Για $y_0 = h(x_0)$ έχουμε

$$h^{-1}(f(y_0)) = x_0.$$

Επομένως $f(y_0) = h(x_0) = y_0$. Άρα, y_0 είναι σταθερό σημείο της f. □

1.6 Συρρικνώσεις και συρρικνώματα.

Ορισμός 1.6.1. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω ότι $S \subseteq X$.

Μια συνεχής απεικόνιση $r : X \to S$ καλείται *συρρίκνωση* αν $r(s) = s$, για κάθε $s \in S$.

Συρρίκνωμα του X καλείται κάθε $S \subseteq X$ για το οποίο υπάρχει μία συρρίκνωση $r : X \to S$.

Αν $S \subseteq X$ και $r : X \to S$ είναι μία συρρίκνωση, τότε r είναι επέκταση της ταυτοτικής απεικόνισης $\tau : S \to S$ στον X.

Θεώρημα 1.6.2. *Αν ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε κάθε συρρίκνωμα του X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Απόδειξη. Επειδή το S είναι συρρίκνωμα του X, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r : X \to S$ η οποία είναι συρρίκνωση του X στο S, δηλαδή $r(s) = s$ για κάθε $s \in S$.

Έστω $f : S \to S$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η απεικόνιση $f \circ r : X \to S$ είναι συνεχής. Επειδή η $f \circ r$ απεικονίζει το X στο X και επειδή το X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $f(r(x_0)) = x_0$.

Για κάθε $x \in X \setminus S$ έχουμε $f(r(x)) \neq x$, αφού $f(r(x)) \in S$. Συνεπώς $x_0 \in S$. Οπότε $r(x_0) = x_0$ και $f(x_0) = f(r(x_0)) = x_0$. Άρα x_0 είναι σταθερό σημείο της f. □

1.7 Μετρικοί χώροι.

Ορισμός 1.7.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

Μία απεικόνιση $d : X \times X \to [0, \infty)$ καλείται *μετρική επί του X* αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες (αξιώματα της μετρικής):

(*i*) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (**αξίωμα ταύτισης**)

(*ii*) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (**αξίωμα συμμετρίας**)

(*iii*) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (**ανισότητα του τριγώνου**)

Αν d είναι μετρική επί του X, τότε το ζεύγος (X, d) καλείται *μετρικός χώρος*.
Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε:

την ανοικτή μπάλα $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ και
την κλειστή μπάλα $B[x, \varepsilon] = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ με κέντρο x και ακτίνα ε.

Παράδειγμα 1.7.2. Η συνήθης μετρική του $\mathbb{R}^n$ είναι η απεικόνιση $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, η οποία σε $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί τον αριθμό

$$d_n(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Απόσταση μεταξύ δύο συνόλων στο μετρικό χώρο.

Άπόσταση μεταξύ των δύο υποσυνόλων A και B ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι ο αριθμός

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Άπόσταση ενός σημείου x από ένα σύνολο A είναι ο αριθμός

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Πρόταση 1.7.3. *Αν $x, y \in X$ και $A \subseteq X$, τότε $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$.*

Διάμετρος συνόλου.

Ορισμός 1.7.4. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X καλείται φραγμένο αν το σύνολο $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ είναι φραγμένο.

Αν ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι φραγμένο, τότε ο αριθμός

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

καλείται διάμετρος του A.

Σύγκλιση ακολουθίας σημείων μετρικού χώρου.

Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ σημείων ενός μετρικού χώρου (X, d) συγκλίνει στο σημείο $x \in X$ και θα γράφουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, αν $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$.

Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα μετρικού χώρου.

Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Η οικογένεια

$$T_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists B(x,\varepsilon) \subseteq U\}$$

είναι τοπολογία του X και καλείται *τοπολογία παραγόμενη από την μετρική* d .

Δύο μετρικές d_1, d_2 ενός συνολου X είναι ισοδύναμες όταν παράγουν την ίδια τοπολογία, δηλαδή $T_{d_1} = T_{d_2}$.

Ένα υποσύνολο G του μετρικού χώρου X είναι *ανοικτό* αν και μόνον αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G$.

Ένα υποσύνολο F του μετρικού X είναι *κλειστό* αν $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

Θεωρήματα 1.7.5. *Σε κάθε μετρικό χώρο X ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Κάθε ανοικτή μπάλα $B(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο και κάθε κλειστή μπάλα $B[x, \varepsilon]$ είναι κλειστό σύνολο.*

2. *Έστω $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ είναι*

   - εσωτερικό σημείο *του A αν και μόνον υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$*
   - σημείο επαφής *του A αν και μόνον για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$*
   - οριακό σημείο *(ή* σημείο συσσώρευσης*) του A αν και μόνον για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει*
   $$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$
   - μεμονωμένο σημείο *του A αν και μόνον υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$*

3. *Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό στο X για κάθε $x \in X$.*

4. *Για οποιαδήποτε κλειστά και ξένα υποσύνολα F_1 και F_2 του X υπάρχουν ανοικτά σύνολα O_1 και O_2 τέτοια ώστε*
   $$F_1 \subseteq O_1,\ F_2 \subseteq O_2 \text{ και } O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

Θεώρημα 1.7.6. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και $x \in X$.*
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) x είναι οριακό σημείο του A ($x \in A^d$),

(ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $B(x, \varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(iii) $x = \lim_{n\to\infty} a_n$, όπου $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ και $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$.

Σε κάθε μετρικό χώρο X ισχύουν τα Θεωρήματα 1.2.1 – 1.2.4. Επιπλέον ισχύει το παρακάτω θεώρημα που σχετίζεται με την μετρική του X.

Θεώρημα 1.7.7. *Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε $diam(A) = diam(Cl(A))$*

Μετρικοί χώροι με αριθμήσιμη βάση.

Θεώρημα 1.7.8. *Ένας μετρικός χώρος X έχει αριθμήσιμη βάση αν και μόνον αν ο X περιέχει ένα αριθμήσιμο παντού πυκνό υποσύνολο.*

Το αριθμήσιμο σύνολο Q^n είναι παντου πυκνό στο $\mathbb{R}^n$ με την μετρική

$$d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

Μετρικοί υπόχωροι.

Ορισμός 1.7.9. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$.
Η απεικόνιση $d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to [0, \infty)$ που ορίζεται ως εξής

$$d|_{Y\times Y}(x, y) = d(x, y), \quad x, y \in Y$$

ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής.
Ο μετρικός χώρος $(Y, d|_{Y\times Y})$ καλείται *μετρικός υπόχωρος* του (X, d).

Αν $y \in Y$, $B_Y(y, \varepsilon) = \{x \in Y : d(y, x) < \varepsilon\}$ είναι η ανοικτή μπάλα του y στο Y και $B_X(y, \varepsilon) = \{x \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$ είναι η ανοικτή μπάλα του y στο X, τότε

$$B_Y(y, \varepsilon) = Y \cap B_X(y, \varepsilon)$$

Θεώρημα 1.7.10. *Έστω $(Y, d|_{Y\times Y})$ μετρικός υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (X, d).
Η σχετική τοπολογία $T_d|_Y$ του Y ως προς την τοπολογία T_d του X ισούται με την τοπολογία $T_{d|_{Y\times Y}}$ του Y παραγόμενη από τη μετρική $d|_{Y\times Y}$, δηλαδή $T_d|_Y = T_{d|_{Y\times Y}}$.*

Μετρικό γινόμενο μετρικών χώρων.

Έστω (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n), $n > 1$, είναι μετρικοί χώροι.
Για $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ ορίζουμε

$$d_{X_1\times...\times X_n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i, y_i))^2}.$$

Η $d_{X_1\times...\times X_n}$ είναι μετρική επί του $X_1 \times ... \times X_n$.
Ο μετρικός χώρος $(X_1 \times ... \times X_n, d_{X_1\times...\times X_n})$ συμβολίζεται με $(X_1, d_1) \times ... \times (X_n, d_n)$.

Θεώρημα 1.7.11.

$$(X_1, d_1) \times ... \times (X_n, d_n) \times (X_{n+1}, d_{n+1}) = \big((X_1, d_1) \times ... \times (X_n, d_n)\big) \times (X_{n+1}, d_{n+1}).$$

Θεώρημα 1.7.12. *Ένα σύνολο $U \subseteq X_1 \times ... \times X_n$ είναι ανοικτό στο μετρικό γινόμενο μετρικών χώρων $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ αν και μόνον αν για κάθε $(x_1, ..., x_n) \in U$ υπάρχουν ανοικτα υποσύνολα $U_1, ..., U_n$ των $X_1, ..., X_n$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε*

$$(x_1, ..., x_n) \in U_1 \times ... \times U_n \subseteq U.$$

1.8 Συνεχείς απεικονίσεις μετρικών χώρων.

Ορισμός 1.8.1. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι.

Μιά απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ καλείται συνεχής στο σημείο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(S_{d_X}(x_0, \delta)) \subseteq S_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$$

Δηλαδή

$$d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$, τότε η f καλείται συνεχής στο X.

1.8.1 Ομοιόμορφα συνεχείς απεικονίσεις μετρικών χώρων.

Ορισμός 1.8.2. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι.

Μιά απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται *ομοιόμορφα συνεχής* στο X αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Πρόταση 1.8.3. *Αν $f : X \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι συνεχής.*

Παραδείγματα 1.8.4.

1. Η απεικόνιση $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής και δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

   Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

   Έστω $x_0 \in (0, \infty)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ για μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $(0, \infty)$. Τότε

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$$

   Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

   Έστω $\varepsilon = 1$. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\frac{1}{n} < \delta$ και $x_1 = \frac{1}{2n}$, $x_2 = \frac{1}{n}$ τέτοια ώστε

   $$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \delta$$

   και $\Big|f(x_1) - f(x_2)\Big| = |2n - n| = n \geq 1 = \varepsilon$.

2. Αν για την απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο

   $$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d_X(x_1, x_2), \text{ για οποιαδήποτε } x_1, x_2 \in X,$$

   τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $n > k$ με
$$f(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$$
είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Η απεικόνιση $(X, d) \to (\mathbb{R}, ||)$ με
$$f(x) = d(x, A), x \in X$$
είναι ομοιόμορφα συνεχής.

   Πράγματι, για οποιαδήποτε $x, y \in X$ ισχύει
$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \text{ και } d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$$
   Συνεπώς,
$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \text{ και } d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y).$$
   Επομένως,
$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$
   Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Η απεικόνιση $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

   Πράγματι, έστω $x, y \in [1, \infty)$. Τότε
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow$$
$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|$$
   Συνεπώς $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, για κάθε $x, y \in [1, \infty)$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6. Αν $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι μια ομοιμόρφα συνεχής και επί απεικόνιση και $A \subseteq X$, τότε ο περιορισμός της f στον μετρικό υπόχωρο A είναι ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση.

1.8.2 Ισομετρίες.

Ορισμός 1.8.5. Μια απεικόνιση $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ καλείται *ισομετρία* αν και για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει
$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$$

Πρόταση 1.8.6. *Κάθε ισομετρία είναι ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση.*

Πρόταση 1.8.7. *Αν $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι μια επί ισομετρία, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*

Παραδείγματα 1.8.8.

1. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $k<n$ με $f(x_1,...,x_k)=(x_1,...,x_k,0,...,0)$ είναι ισομετρία.
2. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(x,-y)$ είναι ισομετρία.
3. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f(x_1,...,x_n)=(x_1+c_1,...,x_k+c_2)$, όπου $(c_1,...,c_n)$ είναι σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^n$, είναι ισομετρία.
4. Η απεικόνιση $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ με $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι ομοιμορφισμός και δεν είναι ισομετρία.
5. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $n>k$ με
$$f(x_1,...,x_k,...,x_n)=(x_1,...,x_k)$$
είναι ομοιόμορφα συνεχής και δεν είναι ισομετρία.

1.9 Πλήρως φραγμένοι μετρικοί χώροι.

Ορισμός 1.9.1. Ένας μετρικός χώρος καλείται πλήρως φραγμένος αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1,...,x_n\in X$ τέτοιο ώστε $X=S(x_1,\varepsilon)\cup...\cup S(x_n,\varepsilon)$.

Κάθε σύνολο $\{x_1,...,x_n\}\subseteq X$ για το οποίο
$$X=S(x_1,\varepsilon)\cup...\cup S(x_n,\varepsilon)$$
καλείται ε-πλέγμα του X.

Πρόταση 1.9.2. *Ενας μετρικός χώρος X είναι πλήρως φραγμένος αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη κενών συνόλων $A_1,...,A_n$ τέτοιων ώστε*
$$X=A_1\cup...\cup A_n \text{ και } \operatorname{diam}(A_i)<\varepsilon \text{ για κάθε } i=1,...,n. \tag{1.1}$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι πλήρως φραγμένος και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1,...,x_n\in X$ τέτοιο ώστε
$$X=S(x_1,\frac{\varepsilon}{2})\cup...\cup S(x_n,\frac{\varepsilon}{2}).$$

Για $A_1=S(x_1,\frac{\varepsilon}{2})$, ..., $A_n=S(x_n,\frac{\varepsilon}{2})$ ισχύουν οι σχέσεις (1.1).

Αντιστρόφως, έστω για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη κενών συνόλων $A_1,...,A_n$ τέτοιων ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (1.1). Για κάθε $i=1,...,n$ επιλέγουμε ένα $x_i\in A_i$. Αν $x\in A_i$, τότε $d(x,x_i)\le\operatorname{diam}(A_i)<\varepsilon$, επομένως $x\in S(x_i,\varepsilon)$. Άρα,
$$X=S(x_1,1)\cup...\cup S(x_n,1),$$
που σημαίνει ότι ο X είναι πλήρως φραγμένος.

□

Πρόταση 1.9.3. *Κάθε μετρικός υπόχωρος ενός πλήρως φραγμένου μετρικού χώρου είναι πλήρως φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω X ένας πλήρως φραγμένος χώρος και $Y \subseteq X$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο X είναι πλήρως φραγμένος, από την Πρόταση 1.9.2, έχουμε ότι

$$X = A_1 \cup ... \cup A_n \text{ και } \operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Επομένως

$$Y = (A_1 \cap Y) \cup ... \cup (A_n \cap Y) \text{ και } \operatorname{diam}(A_i \cap Y)) < \varepsilon \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Άρα, από την Πρόταση 1.9.2, ο Y είναι πλήρως φραγμένος. □

Πρόταση 1.9.4. *Κάθε πλήρως φραγμένος μετρικός χώρος είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μετρικός χώρος X είναι πλήρως φραγμένος. Τότε υπάρχει ένα 1-πλέγμα $\{x_1, ..., x_n\}$ του X, δηλαδή

$$X = S(x_1, 1) \cup ... \cup S(x_n, 1)$$

Έστω $\Delta = \max\{d(x_i, x_j) : i, j = 1, ..., n\}$.

Αν $x, y \in X$, τότε $x \in S(x_i, 1)$ και $y \in S(x_j, 1)$. Συνεπώς

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq \Delta + 2$$

Άρα, $\operatorname{diam}(X) \leq \Delta + 2$, δηλαδή ο X είναι φραγμένος. □

Παραδείγματα 1.9.5.

1. Αν X είναι άπειρο σύνολο και d είναι διακριτική μετρική επί του X, τότε ο μετρικός χώρος (X, d) είναι φραγμένος αλλά δεν είναι πλήρως φραγμένος.

   Πράγματι, $\operatorname{diam}(X) = 1$ ενώ δεν υπάρχει ε-πλέγμα του X για $\varepsilon = 1/2$.

2. Κάθε κύβος $[a_1, a_1 + a] \times ... \times [a_n, a_n + a]$ του $\mathbb{R}^n$ με πλευρά $a > 0$ είναι πλήρως φραγμένος.

   Έστω $\varepsilon > 0$. Αν χωρίσουμε κάθε πλευρά $[a_i, a_i + a]$ του κύβου σε m ίσα τμήματα μήκους $\frac{a}{m} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, τότε ο n-διαστατος κύβος θα χωριστεί σε m^n μικρότερους n-διαστατους κύβους με πλευρά $\frac{a}{m}$ και, άρα, με διάμετρο $\frac{a}{m} \cdot \sqrt{n} < \varepsilon$. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.9.2, ο κύβος είναι πλήρως φραγμένος.

Πρόταση 1.9.6. *Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένος αν και μόνον αν είναι πλήρως φραγμένος.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε φραγμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρως φραγμένος.

Έστω A φραγμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $\delta = \operatorname{diam}(A)$.

Θεωρούμε $\bar{a} = (a_1, ..., a_n) \in A$. Έχουμε $d_n(\bar{a}, \bar{x}) \leq \delta$ για κάθε $\bar{x} \in A$, συνεπώς

$$A \subseteq S_{\mathbb{R}^n}[\bar{a}, \delta] \subseteq [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \times ... \times [a_n - \delta, a_n + \delta] = K$$

Ο κύβος K είναι πλήρως φραγμένος (Παράδειγμα 1.9.5(2)) και A είναι υπόχωρος του K.

Από την Πρόταση 1.9.3 ο A είναι πλήρως φραγμένος. □

Πρόταση 1.9.7. *Αν ο (X, d_X) είναι πλήρως φραγμένος και $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι μια ομοιμόρφα συνεχής και επί απεικόνιση, τότε και ο (Y, d_Y) είναι πλήρως φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σύνολα $B_1, ..., B_n \subseteq Y$ τέτοια ώστε $Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ και $\operatorname{diam}(B_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επειδή ο X είναι πλήρως φραγμένος, υπάρχουν $A_1, ..., A_n \subseteq X$ τέτοια ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ και } \operatorname{diam}(A_i) < \delta \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Θέτουμε $B_i = f(A_i)$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Τότε

$$Y = f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Αν $y_1, y_2 \in B_i$, τότε $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$, όπου $x_1, x_2 \in A_i$. Επομένως $d_X(x_1, x_2) < \delta$. Άρα, $d_Y(y_1, y_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Συνεπώς $\operatorname{diam}(B_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Παράδειγμα 1.9.8. Η απεικόνιση $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Επειδή $(0, 1]$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και τα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι πλήρως φραγμένα, το $(0, 1]$ είναι πλήρως φραγμένο. Άρα, από το Θεώρημα 1.9.7, το σύνολο $f[((0, 1]] = (1, \infty)$ είναι πλήρως φραγμένο, που είναι άτοπο.

1.10 Πλήρεις μετρικοί χώροι.

1.10.1 Ακολουθίες του Cauchy.

Ορισμός 1.10.1. Μιά ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων μετρικού χώρου (X, d) καλείται *ακολουθία του Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n, m > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Πρόταση 1.10.2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ενός μετρικού χώρου είναι ακολουθία του Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα ακιλουθία ενός μετρικού χώρου X και $x \in X$ είναι το όριό της. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει: $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως για κάθε $n, m > n_0$ έχουμε:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy. □

Πρόταση 1.10.3. *Μιά ακολουθία του Cauchy συγκλίνει αν και μόνον αν αυτή περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μιά ακολουθία του Cauchy.

Αν $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει, τότε η ίδια είναι συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έστω ότι $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ με όριο $x \in X$. Θα δείξουμε ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Επειδή $x_{n(k)} \to x$, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $d(x, x_{n(k)}) < \frac{\varepsilon}{2}$, αν $k > k_0$.

Επειδή $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ αν } n, m > n_0$$

Έστω $n_1 = \max\{n_0, n(k_0)\}$, τότε για κάθε $n > n_1$ υπάρχει $n(k) > n$. Από τον ορισμό του n_1 έχουμε

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

1.10.2 Ορισμός του πλήρους μετρικού χώρου.

Ορισμός 1.10.4. Ένας μετρικός χώρος (X, d) καλείται *πλήρης* αν κάθε ακολουθία του Cauchy του X συγκλίνει (σε κάποιο σημείο του X).

Παραδείγματα 1.10.5.

1. Ο $\mathbb{R}^n$ με την μετρική $d_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$ είναι πλήρης για κάθε $n = 1, 2, ...,$.

   Πράγματι, έστω $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ μια ακολουθία Cauchy του $\mathbb{R}^n$, όπου $\overline{x}_k = (x_k^1, ..., x_k^n)$. Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m, k \geq k_0$

   $$d(\overline{x}_k, \overline{x}_m) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k^i - x_m^i)^2} < \varepsilon$$

   Άρα, $\sum_{i=1}^{n}(x_k^i - x_m^i)^2 < \varepsilon^2$. Επομένως για κάθε $i = 1, ..., n$ και για κάθε $m, k \geq k_0$ ισχύει

   $$|x_k^i - x_m^i| = \sqrt{(x_k^i - x_m^i)^2} < \varepsilon$$

   Συνεπώς για κάθε $i = 1, ..., n$ $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy του $\mathbb{R}$.

   Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

   Θέτουμε $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$. Τότε, επειδή $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k^i - x_i) = 0$, προκύπτει ότι

   $$\lim_{k\to\infty} d(\bar{x}, \bar{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_k^i)^2} = 0,$$

   δηλαδή η ακολουθία Cauchy $\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο $\bar{x}$.

2. Ο χώρος $\mathcal{C}_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής $\}$ με τη μετρική
$$d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$$
είναι πλήρης.

3. Κάθε διακριτικός μετρικός χώρος X είναι πλήρης, επειδή και οι ακολουθίες του Cauchy και οι συγκλίνουσες ακολουθίες του X συμπίπτουν και είναι οι ακολουθίες της μορφής $x_1, ...x_n, x, x, ..., x, ...$, όπου $x_1, ..., x_n, x \in X$.

4. Ο χώρος των ρητών αριθμών με τη μετρική $d(x,y) = |x - y|$ δεν είναι πλήρης.

1.10.3 Ιδιότητες του πλήρους μετρικού χώρου.

Θεώρημα 1.10.6. *Ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία $\{B[x_n, r_n]\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ και*
$$B[x_1, r_1] \supseteq ... \supseteq B[x_n, r_n] \supseteq B[x_{n+1}, r_{n+1}] \supseteq ... ,$$
ισχύει $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και
$$B(x_1, r_1) \supseteq ... \supseteq B(x_n, r_n) \supseteq B(x_{n+1}, r_{n+1}) \supseteq ...$$
μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών σφαιρών με $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy. Πράγμτι, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $r_n < \varepsilon$. Έστω $n, m > n_0$ και $m > n$, τότε $B[x_m, r_m] \subseteq B[x_n, r_n]$. Επομένως $x_m \in B[x_n, r_n]$, άρα, $d(x_m, x_n) \leq r_n < \varepsilon$.

Έπειδή Ο X είναι πλήρης, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$.

Για κάθε n ισχύει $\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \subseteq B[x_n, r_n]$ και $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n+i} = x$, συνεπώς $x \in B[x_n, r_n]$, επειδή $B[x_n, r_n]$ είναι κλειστό σύνολο. Άρα, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών σφαιρών
$$B[x_1, r_1] \supseteq ... \supseteq B[x_n, r_n] \supseteq B[x_{n+1}, r_{n+1}] \supseteq ...$$
του X με $r_n \to 0$ έχει μη κενή τομή. Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του X. Έπαγωγικά μπορεί να κατασκευαστει μια αύξουσα ακολουθία $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ τέτοια ώστε: $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ για κάθε $n > n_k$

Θεωρουμε την ακολουθία κλειστών σφαιρών $\left\{B[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$. Θα δείξουμε ότι $B[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}] \subseteq B[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]$.

Πράγματι, αν $x \in B[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}]$, τότε $d(x, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Επομένως
$$d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \Rightarrow x \in B[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]$$
Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}]$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$. Επειδή η ακολουθία του Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία η $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει. Άρα ο X είναι πλήρης. $\square$

Πρόταση 1.10.7. *Κάθε πλήρης υπόχωρος F ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστός στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in F'$, τότε $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, όπου $x_n \in F$.

Επειδή η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα είναι ακολουθία του Cauchy του X. Άρα η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy του F. Επειδή ο F είναι πλήρης, υπάρχει $x^* \in F$ τέτοιο ώστε $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Μιά ακολουθία δεν μπορεί να έχει δύο όρια άρα $x = x^*$, οπότε $x \in F$. Συνεπώς το σύνολο F είναι κλειστό. □

Πρόταση 1.10.8. *Κάθε κλειστός υπόχωρος F ενός πλήρους μετρικού χώρου X είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του Cauchy του F.

Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ αν $n, m > n_0$. Άρα $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του Cauchy του X. Επειδή ο X είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Επειδή το F είναι κλειστό και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ προκύπτει ότι $x \in F' \subseteq F$. Άρα $x \in F$ και συνεπώς κάθε ακολουθία του Cauchy του F συγκλίνει, δηλαδή ο F είναι πλήρης. □

1.10.4 Πλήρωση μετρικού χώρου.

Ορισμός 1.10.9. Ένας μετρικός χώρος (X^*, d^*) καλείται πλήρωση του μετρικού χώρου (X, d) αν

(i) (X^*, d^*) είναι πλήρης

(ii) υπάρχει μία ισομετρία $f : X \to f(X) \subseteq X^*$

(iii) $\overline{f(X)} = X^*$

Θεώρημα 1.10.10. *Κάθε μετρικός χώρος (X, d) έχει μία πλήρωση.*

Θεώρημα 1.10.11. *Οποιεσδήποτε δύο πληρώσεις (X^*, d^*) και $\hat{x} \in \hat{X}$ ενός μετρικού (X, d) χώρου είναι ισομετρικές.*

Κεφάλαιο 2

Συμπαγείς χώροι.

Οι χώροι στους οποίους αναφέρεται το κεφάλαιο αυτό είναι οι τοπολογικοί χώροι.

2.1 Η έννοια του συμπαγούς χώρου.

Μιά οικογένεια υποσυνόλων $\{O_t\}_{t\in T}$ ενός χώρου X καλείται *κάλυμμα* του X αν

$$X = \bigcup_{t\in T} O_t.$$

Κάθε κάλυμμα του X που αποτελείται ανοικτα υποσύνολα του X καλείται *ανοικτό κάλυμμα*.

Κάθε υποοικογένεια $\{O_t\}_{t\in T_0}$ ενός καλύμματος $\{O_t\}_{t\in T}$ του X, η οποία είναι επίσης κάλυμμα του X, καλείται *υποκάλυμμα* του καλύμματος $\{O_t\}_{t\in T}$.

Ορισμός 2.1.1. Ένας χώρος καλείται *συμπαγής* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Ένα υποσύνολο S ενός χώρου X καλείται *συμπαγές* αν ο υπόχωρος S του X είναι συμπαγής.

2.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες συμπαγούς μετρικού χώρου.

Θεώρημα 2.2.1. *Για έναν μετρικό χώρο X οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) *Ο X είναι συμπαγής*

(β) *Κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει οριακό σημείο,*

(γ) *Κάθε ακολουθία σημείων ενός μετρικού χώρου X έχει συγκλίνουσα (στο σημείο του X) υπακολουθία.*

(δ) *Ο X είναι πλήρης και πλήρως φραγμένως.*

Απόδειξη. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο A του X που δεν έχει οριακό σημείο. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon_x)$ τέτοια ώστε το σύνολο $A \cap S(x, \varepsilon_x)$ είναι πεπερασμένο.

Έχουμε $X = \bigcup_{x \in X} S(x, \varepsilon_x)$. Συνεπώς $\{S(x, \varepsilon_x)\}_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Επειδή ο X είναι συμπαγής το ανοικτό αυτό κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{S(x_1, \varepsilon_{x_1}), ..., S(x_n, \varepsilon_{x_n})\}$.

Συνεπώς $X = S(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup ... \cup S(x_n, \varepsilon_{x_n})$. Άρα

$$A \subseteq (A \cap S(x_1, \varepsilon_{x_1})) \cup ... \cup (A \cap S(x_n, \varepsilon_{x_n}))$$

και συνεπώς το A είναι πεπερασμένο, που είναι άτοπο.

Άρα, κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει οριακό σημείο.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία του X.

Αν $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε n υπάρχει $k_n > n$ τέτοιο ώστε $x_{k_n} = x$, τότε η υπακολουθία $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{x, x, ...\}$ συγκλίνει στο x.

Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει n_x τέτοι ώστε $x \neq x_n$ για κάθε $n > n_x$, τότε το σύνολο $A = \{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ είναι άπειρο και από την υπόθεση υπάρχει $x \in A^d$.

Συνεπώς για κάθε $k = 1, 2, ...$ το σύνολο $A \cap S(x, 1/k)$ είναι άπειρο. Έστω

$x_{n_1} \in A \cap S(x, 1) \setminus \{x\}$

$x_{n_2} \in A \cap S(x, 1/2) \setminus \{x, x_{n_1}\}$, $n_2 > n_1$

....

$x_{n_k} \in A \cap S(x, 1/k) \setminus \{x, x_{n_1}, ..., x_{n_{k-1}}\}$, $n_k > n_{k-1}$.

Τότε $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$ και $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$(\gamma) \Rightarrow (\delta)$ Έστω $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια Cauchy του X. Τότε, από την υπόθεση, η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει συγκλινουσα υπακολουθία. Άρα, από την Πρόταση 1.10.3, η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Συνεπώς ο X είναι πλήρης.

Ας υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι πλήρως φραγμένος. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο ο X δεν περιέχει κανένα ε-πλέγμα.

Έστω $x_1 \in X$, τότε $X \nsubseteq S(x_1, \varepsilon)$.

Έστω $x_2 \in X \setminus S(x_1, \varepsilon)$, τότε $X \nsubseteq S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$ και $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε για κάθε n:

$$X \nsubseteq S(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup S(x_n, \varepsilon) \text{ και } d(x_1, x_2) \geq \varepsilon, ..., d(x_{n-1}, x_n) \geq \varepsilon$$

Άρα, $d(x_k, x_n) \geq \varepsilon$ για κάθε $k, n = 1, 2, ...$, οπότε η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ δεν περιέχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία, που είναι άτοπο.

$(\delta) \Rightarrow (\alpha)$ Ας υποθέσουμε ότι ένας πλήρης και πλήρως φραγμένος χώρος X δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει ανοικτο κάλυμμα $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$ του X που δεν περιέχει κανένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Επειδή ο X είναι πλήρως φραγμένος, από την Πρόταση 1.9.2 υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $P_1 \subseteq X$ τέτοιο ώστε

$$X = \bigcup_{p\in P_1} A(p) \text{ και } \operatorname{diam}(A(p)) < 1.$$

Οπότε υπάρχει $p_1 \in P_1$ τέτοιο ώστε το σύνολο $A(p_1)$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του καλύμματος $\mathcal{O}$. Από την Πρόταση 1.9.3 ο υπόχωρος $A(p_1)$ είναι πλήρως φραγμένος. Άρα, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $P_2 \subseteq A(p_1)$ τέτοιο ώστε

$$A(p_1) = \bigcup_{p\in P_2} A(p) \text{ και } \operatorname{diam}(A(p)) < \frac{1}{2}.$$

Οπότε υπάρχει $p_2 \in P_2$ τέτοιο ώστε το σύνολο $A(p_2)$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τόυ καλύμματος $\mathcal{O}$.

Επαγωγικά μπορούμε να κατασκευάσουμε μια φθίνουσα ακολοθία συνόλων

$$A(1) \supseteq A(2) \supseteq \cdots \supseteq A(n) \supseteq A(n+1) \supseteq \ldots$$

τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(A(n)) < \frac{1}{n}$ και κανένα από τα $A(n)$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του καλύμματος $\mathcal{O}$.

Για κάθε n διαλέγουμε ένα σημείο $x_n \in A(n)$. Θα δείξουμε ότι $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε $A(n), A(m) \subseteq A(n_0)$. Επομένως $x_n, x_m \in A(n_0)$. Άρα, επειδή $\operatorname{diam}(A(n_0)) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, έπεται ότι $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Επειδή από την υπόθεση ο X είναι πλήρως φραγμένως, η ακολουθία Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε ένα $x \in X$. Επειδή $\mathcal{O}$ είναι κάλυμμα του X, υπάρχει $O_{i(x)} \in \mathcal{O}$ με $x \in O_{i(x)}$. Επειδή $O_{i(x)}$ είναι ανοικτό υπάρχει m για το οποίο

$$S(x, 1/m) \subseteq O_{i(x)}$$

Επειδή $\lim x_n = x$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in S\left(x, \frac{1}{2m}\right)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Έστω $n > \max\{n_0, 2m\}$. Τότε $x_n \in S\left(x, \frac{1}{2m}\right)$ και $x_n \in A(n)$.

Επειδή $x_n \in A(n)$ και $\operatorname{diam}(A(n)) < 1/n$, για κάθε $a \in A(n)$ έχουμε

$$d(x,a) \leq d(x,x_n) + d(x_n,a) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}.$$

Άρα,

$$A(n) \subseteq S(x, 1/m) \subseteq O_{i(x)}.$$

Συνεπώς $A(n)$ καλύπτεται από ένα στοιχείο $O_{i(x)}$ του καλύμματος $\mathcal{O}$, που είναι άτοπο.

Άρα, ο X είναι συμπαγής.

$\square$

Ορισμός 2.2.2. Ένας μετρικός χώρος X λέγεται ότι έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass αν κάθε άπειρο υποσύνολο του X (έχει στο X) οριακό σημείο.

Ορισμός 2.2.3. Ένας μετρικός χώρος X καλείται ακολουθιακά συμπαγής αν κάθε ακολουθία σημείων X έχει συγκλίνουσα (στο σημείο του X) υπακολουθία.

Από το Θεώρημα 2.2.1 συνεπάγεται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2.4. *Για έναν μετρικό χώρο X οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) *Ο X είναι συμπαγής.*

(β) *Ο X έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass.*

(γ) *Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.*

Παραδείγματα 2.2.5.

1. Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών δεν έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass και, άρα δεν είναι συμπαγής χώρος.

2. Κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα $[a, b]$ των πραγματικών αριθμών έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass και, συνεπώς είναι συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 2.2.6. Ένας αριθμός $\varepsilon > 0$ καλείται αριθμός του Lebesgue για το ανοικτό κάλυμμα $\{O_i\}_{i\in I}$ του μετρικού χώρου X αν κάθε σφαίρα $S(x, \varepsilon)$, $x \in X$, είναι υποσύνολο κάποιου στοιχείου του καλύμματος $\{O_i\}_{i\in I}$.

Δηλαδή, αν $x, y \in X$ και $d(x, y) < \varepsilon$, τότε υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $x, y \in O_i$.

Θεώρημα 2.2.7. *Για κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου υπάρχει αριθμός του Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα ενός συμπαγούς χώρου X. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ τέτοιο ώστε $x \in O_{i_x}$ και, επειδή O_{i_x} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ για το οποίο $x \in S(x, \varepsilon_x) \subseteq O_{i_x}$.

Συνεπώς

$$X = \bigcup_{x\in X} S(x, \varepsilon_x).$$

Επειδή ο X είναι συμπαγής, το ανοικτό κάλυμμα $\{S(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) : x \in X\}$ το X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή

$$X = S(x_1, \frac{\varepsilon_{x_1}}{2}) \cup \cdots \cup S(x_n, \frac{\varepsilon_{x_n}}{2})$$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\frac{\varepsilon_{x_1}}{2} \ldots, \frac{\varepsilon_{x_n}}{2}\}$ Έστω ότι $x \in X$ και $y \in S(x, \varepsilon)$. Τότε $x \in S(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$ για κάποιο $i = 1, ..., n$. Επομένως

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} \leq \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} = \varepsilon_{x_i}$$

Επομένως $y \in S(x_i, \varepsilon_{x_i})$. Άρα, $S(x, \varepsilon) \subseteq S(x_i, \varepsilon_{x_i}) \subseteq O_i$. Συνεπώς ε είναι αριθμός του Lebesgue για το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i\in I}$.

$\square$

2.3 Συμπαγείς υπόχωροι.

Θεώρημα 2.3.1. *Ένας υπόχωρος F ενός συμπαγής χώρου X είναι συμπαγούς αν και μόνον αν για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{G_i\}_{i\in I}$ του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ υπάρχει πεπερασμένη υποοικογένεια $\{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ τέτοια ώστε $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο υπόχωρος F του X είναι συμπαγής και $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών συνόλων του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Τότε

$$F = \bigcup_{i\in I} (F \cap G_i)$$

και $F \cap G_i$ είναι ανοικτό στο F για κάθε $i \in I$. Επειδή ο F είναι συμπαγής το ανοικτό κάλυμμα $\{F \cap G_i\}_{i\in I}$ του F περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{F \cap G_{i_1}, ..., F \cap G_{i_n}\}$. Έχουμε $F = (F \cap G_{i_1}) \cup ... \cup (F \cap G_{i_n})$, άρα $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$.

Έστω για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{G_i\}_{i\in I}$ του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ υπάρχει πεπερασμένη υποοικογένεια $\{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ τέτοια ώστε $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$. Θα δείξουμε ότι ο F είναι συμπαγής. Έστω $F = \bigcup\limits_{i\in I} G'_i$, όπου G'_i είναι ανοικτο στο F για κάθε $i \in I$. Τότε για κάθε $i \in I$ θα υπάρχει ανοικτό στο X σύνολο G_i τέτοιο ώστε $G'_i = F \cap G_i$. Συνεπώς $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχουν $\{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ τέτοια ώστε $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$. Οπότε $F = (F \cap G_{i_1}) \cup ... \cup (F \cap G_{i_n})$. Άρα $F = G'_{i_1} \cup ... \cup G'_{i_n}$. Συνεπώς ο F είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 2.3.2. *Κάθε κλειστός υπόχωρος F ενός συμπαγούς χώρου X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Επειδή F είναι κλειστό το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Επειδή ο X είναι συμπαγής το ανοικτό κάλυμμα $\{G_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$ του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $G_{i_1}, ..., G_{i_n}, X \setminus F$.

Έχουμε $X = G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n} \cup (X \setminus F)$, συνεπώς $F \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$. Άρα ο υπόχωρος F είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 2.3.3. *Κάθε συμπαγής υπόχωρος F ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Άρκει να δείξουμε ότι $\mathrm{Cl}(F) \subseteq F$.

Έστω $x \in \mathrm{Cl}(F)$, τότε υπάρχει $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Κάθε υπακολουθία της $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ που συγκλίνει έχει όριο το x.

Επειδή ο F είναι συμπαγής η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει μια υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει σε ένα σημείο του F. Άρα $x \in F$. □

Πρόταση 2.3.4. *Ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν το σύνολο F είναι φραγμένο και κλειστό στο $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι πλήρης και πλήρως φραγμένος.

Επειδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης, ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης αν και μόνο αν είναι κλειστός. Επίσης, ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρως φραγμένος αν και μόνον αν είναι φραγμένος.

Συνεπώς ένας υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης και πλήρως φραγμένος αν και μόνον αν είναι κλειστός και φραγμένος.

□

2.4 Απεικονίσεις συμπαγών χώρων.

Θεώρημα 2.4.1. *Κάθε συνεχής απεικόνιση ορισμένη σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο X είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι συνεχής και (X, d_X) είναι συμπαγής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\{S_Y(f(x), \varepsilon/2)\}_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$ και η f είναι συνεχής, το $\mathcal{K} = \{f^{-1}[S_Y(f(x), \varepsilon/2)]\}_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Έστω $\delta > 0$ είναι αριθμός του Lebesgue για το $\mathcal{K}$.

Αν $x_1, x_2 \in X$ και $d_X(x_1, x_2) < \delta$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$x_1, x_2 \in f^{-1}[S_Y(f(x), \varepsilon/2)]$$

Τότε

$$f(x_1), f(x_2) \in S_Y(f(x), \varepsilon/2)$$

Συνεπώς

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f(x)) + d_Y(f(x), f(x_2)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Θεώρημα 2.4.2. *Αν η απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή χώρο X σε ένα χώρο Y είναι συνεχής, τότε ο υπόχωρος $f(X)$ του Y είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$.

Επειδή η f είναι συνεχής $\{f^{-1}(G_i)\}_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.

Επειδή ο X είναι συμπαγής το ανοικτό κάλυμμα $\{f^{-1}(G_i)\}_{i \in I}$ περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{f^{-1}(G_1), ..., f^{-1}(G_n)\}$. Επομένως

$$X = f^{-1}(G_1) \cup ... \cup f^{-1}(G_n)$$

Επομένως

$$f(X) = G_1 \cup ... \cup G_n$$

Άρα ο $f(X)$ είναι συμπαγής. □

Πρόταση 2.4.3. *Κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο είναι φραγμένη και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και X συμπαγής. Τότε ο υπόχωρος $f(X)$ του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγής. Συνεπώς το υποσύνολο $f(X)$ του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό και φραγμένο.

Έστω $m = \inf f(X)$ και $M = \sup f(X)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $m, M \in f(X)$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$[m, m - \varepsilon) \cap f(X) \neq \emptyset$$

Συνεπώς $m \in Cl(f(X))$. Επειδή το σύνολο $f(X)$ είναι κλειστό, έπεται ότι $Cl(f(X)) = f(X)$. Άρα, $m \in f(X)$. Όμοια $M = \max f(X)$. □

Θεώρημα 2.4.4. *Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή χώρο X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι κλειστή.*

Απόδειξη. Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X. Από το Θεώρημα 2.3.2 F είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Επειδή η f είναι συνεχής, το σύνολο $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y από το Θεώρημα 2.4.2. Άρα, $f(F)$ είναι κλειστό από το Θεώρημα 2.3.3. □

Πρόταση 2.4.5. *Κάθε συνεχής, ένα προς ένα και επί απεικόνιση $f : X \to Y$ από ένα συμπαγή μετρικό χώρο X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Άρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Έχουμε ότι $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$.

Επειδή ο X είναι συμπαγής και η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα 2.4.5 έπεται ότι η f είναι κλειστή. Επομένως $f(F)$ είναι κλειστό στο Y. Άρα, το $(f^{-1})^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο Y. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.4.5, η f^{-1} είναι συνεχής.

□

2.5 Ένωση, τομή και γινόμενο συμπαγών χώρων.

Θεώρημα 2.5.1. *Αν $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $X_1, ..., X_n$ είναι συμπαγείς υπόχωροι του X, τότε και ο X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X.

Για κάθε $j = 1, ..., n$ η οικογένεια $\{X_j \cap G_i\}_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X_j. Επειδή κάθε X_j είναι συμπαγής, για κάθε $j = 1, ..., n$ το ανοικτό κάλυμμα $\{X_j \cap G_i\}_{i \in I}$ του X_j έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{X_j \cap G_i^j\}_{i=1}^{k_j}$.

Συνεπώς

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{k_j} G_i^j \right) \subseteq X.$$

Άρα, η οικογένεια $\bigcup_{j=1}^{n} \left\{ G_i^j : i = 1, ..., k_j \right\}$ είναι πεπερσμένο υποκάλυμμα του $\{G_i\}_{i \in I}$. □

Θεώρημα 2.5.2. *Αν $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων ενός συμπαγούς χώρου X τέτοια ώστε*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq ...F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq ...,$$

τότε ο υπόχωρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μη κενός και συμπαγής.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Τότε

$$X = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)$$

Το ανοικτό κάλυμμα $\{X \setminus F_n\}_{n=1}^{\infty}$ του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{X \setminus F_{k_1}, ..., X \setminus F_{k_m}\}$, όπου $F_{k_1} \supseteq F_{k_2} \supseteq ... \supseteq F_{k_m}$. Συνεπώς

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{k_i} = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} (X \setminus F_{k_i}) = X \setminus X = \emptyset,$$

που είναι άτοπο, αφού $\bigcap_{k=i}^{m} F_{k_i} = F_{k_m} \neq \emptyset$. Άρα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Κάθε F_n είναι κλειστό στο X, συνεπώς ο υπόχωρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι κλειστός στο X.

Άρα, ο υπόχωρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 2.5.3. *Έστω X ένας μετρικός χώρος και $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq ... \supseteq ...X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq ...$$

Τότε για κάθε ανοικτό σύνολο U που περιέχει την τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $X_n \subseteq U$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.3 έπεται ότι κάθε σύνολο X_n είναι κλειστό στο X, επομένως κάθε σύνολο $F_n = X_n \setminus U$ είναι κλειστό στο X. Επειδή κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς υποχώρου X_1, κάθε F_n είναι συμπαγές σύνολο. Επίσης

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq ...F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq ...$$

Παρατηρούμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq U$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq X \setminus U$. Επομένως $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Από το Θεώρημα 2.5.2 προκύπτει ότι υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε $F_n = \emptyset$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $X_n \setminus U = \emptyset$. Άρα $X_n \subseteq U$ για κάθε $n \geq n_0$. □

Θεώρημα 2.5.4. *Μετρικό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συμπαγών μετρικών χώρων είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το γινόμενο δύο συμπαγών μετρικών χώρων είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω ότι (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι συμπαγείς μετρικοί χώροι και $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $a_n = (x_n, y_n)$, μια ακολουθία σημείων του μετρικού χώρου $(X \times Y, d_{X\times Y})$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Επειδή ο X είναι συμπαγής, η ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Επειδή ο Y είναι συμπαγής, η ακολουθία $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ του Y περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{y_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$.

Έστω ότι $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ και $\lim\limits_{i\to\infty} \{y_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty} = y$. Η ακολουθία $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, επομένως έχει το ίδιο όριο, δηλαδή $\lim\limits_{i\to\infty} \{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty} = x$.

Θέτουμε $a = (x, y)$. Από τα παραπάνω

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} d_{X\times Y}(a_{n_{k_i}}, a) &= \lim_{i\to\infty} \sqrt{d_X^2(x_{n_{k_i}}, x) + d_Y^2(y_{n_{k_i}}, y)} = \\ &= \sqrt{\lim_{i\to\infty} d_X^2(x_{n_{k_i}}, x) + \lim_{i\to\infty} d_Y^2(y_{n_{k_i}}, y)} = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Άρα, $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_{k_i}} = a$, δηλαδή $\{a_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ είναι συκλίνουσα υπακολουθία της $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

2.6 Τοπικά συμπαγείς χώροι.

Ορισμός 2.6.1. Ένας χώρος X καλείται *τοπικά συμπαγής στο σημείο* $x \in X$ αν υπάρχει ανοικτό σύνολο U τέτοιο ώστε $x \in U$ και $Cl(U)$ είναι συμπαγές.

Ο χώρος X καλείται *τοπικά συμπαγής* αν είναι τοπικά συμπαγής σε κάθε σημείο.

Παρατηρούμε ότι αν ένας χώρος X είναι τοπικά συμπαγής σε ένα σημείο x και U είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x για το οποίο $Cl(U)$ είναι συμπαγής, τότε ο X είναι τοπικά συμπαγής σε κάθε σημείο του U. Συνεπώς κανένας χώρος δεν μπορεί να είναι τοπικά συμπαγής μόνο σε ένα σημείο x, εκτός αν το σημείο x είναι μεμονωμένο και το σύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό, οπότε $\{x\} = U = Cl(U)$.

Θεώρημα 2.6.2. *Κάθε συμπαγής χώρος είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω X ένας συμπαγής χώρος και $x \in X$. Τότε $U = X$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x και του οποίου το περίβλημα $Cl(U) = X$ είναι συμπαγές. □

Παραδείγματα 2.6.3.

1. Ο $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, ...$, είναι παράδειγμα μη συμπαγούς μετρικού χώρου που είναι τοπικά συμπαγής. Πράγματι, κάθε ανοικτή μπάλα $B(x, \varepsilon)$ στο $\mathbb{R}^n$ έχει συμπαγές περίβλημα $B[x, \varepsilon]$.

2. Κάθε ανοικτός U υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγής. Πράγματι, για κάθε $x \in U$ υπάρχει $B(x, \varepsilon)$, το οποίο είναι ανοικτό στο U, τέτοιο ώστε $x \in B[x, \varepsilon] \subseteq U$. Επειδή $B[x, \varepsilon]$ είναι συμπαγές, U είναι τοπικά συμπαγής στο x.

3. Κάθε διακριτικός χώρος είναι τοπικά συμπαγής.

4. Ο χώρος Q των ρητών αριθμών δεν είναι τοπικά συμπαγής.

Θεώρημα 2.6.4. *Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός τοπικά συμπαγούς χώρου είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και F κλειστός υπόχωρος του X. Αν $x \in F$ και $x \in U$, όπου U είναι το ανοικτό υποσύνολο του X με συμπαγές περίβλημα $Cl_X(U)$, τότε $U \cap F$ είναι ανοικτο υποσύνολο του F που περιέχει το x και $Cl_F(U \cap F) = F \cap Cl_X(U \cap F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $Cl_X(U)$ και γι' αυτό $Cl_F(U \cap F)$ είναι συμπαγές. □

Θεώρημα 2.6.5. *Κάθε ανοικτός υπόχωρος ενός τοπικά συμπαγούς μετρικού χώρου είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και Y ανοικτός υπόχωρος του X.

Έστω $y \in Y$. Τότε ο X είναι τοπικά συμπαγής στο y. Επομένως υπάρχει υπάρχει $U \subseteq X$ τέτοιο ώστε $y \in U$, U είναι ανοικτό στο X και το σύνολο $Cl_X(U)$ είναι συμπαγές.

Το σύνολο $Y \cap U$ είναι ανοικτό στο X (ως τομή ανοικτών συνόλων) και $y \in Y \cap U$. Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(y,\varepsilon) \subseteq Y \cap U$. Τότε $B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap Y$ είναι ανοικτό στο Y. Επίσης $Cl_X\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \subseteq B\left[y, \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq B(y,\varepsilon) \subseteq Y \cap U$. Επομένως

$$Cl_Y(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)) = Y \cap Cl_X(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)) = Cl_X(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)) \subseteq Cl_X(U)$$

Άρα, το σύνολο $Cl_Y(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right))$ είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς $Cl_X(U)$. □

Θεώρημα 2.6.6. *Αν $f : X \to Y = f(X)$ είναι ανοικτή απεικόνιση ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X επί ενός μετρικού χώρου Y, τότε ο Y είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $y \in Y$ και $x \in f^{-1}(y)$. Επειδή ο X είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ με συμπαγές περίβλημα $Cl_X(U)$ τέτοιο ώστε $x \in U$.

Θέτουμε $U_y = f(U)$. Τότε $y \in U_y$. Επειδή η f είναι ανοικτή το σύνολο $U_y = f(U)$ είναι ανοικτό στο Y. Επειδή η f είναι συνεχής και το σύνολο $Cl_X(U)$ είναι συμπαγές, το σύνολο $f(Cl_X(U))$ είναι συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου Y. Άρα, το σύνολο $f(Cl_X(U))$ είναι κλειστό στο Y. Συνεπώς

$$Cl_Y(U_y) = Cl_Y(f(U)) \subseteq Cl_Y(f(Cl_X(U)) = f(Cl_X(U))$$

Άρα, το σύνολο $Cl_Y(U_y)$, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς υποχώρου $f(Cl_X(U))$ είναι συμπαγές. □

Κεφάλαιο 3

Συνεκτικοί χώροι.

Οι χώροι στους οποίους αναφέρεται το κεφάλαιο αυτό είναι οι τοπολογικοί χώροι.

3.1 Η έννοια του συνεκτικού χώρου.

Ορισμός 3.1.1. Ένας χώρος X καλείται *συνεκτικός* αν τα μόνα υποσύνολα του X τα οποία είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο X είναι ο X και $\emptyset$. Ένα υποσύνολο S ενός χώρου X καλείται συνεκτικό αν ο υπόχωρος S του X είναι συνεκτικός.

Θεώρημα 3.1.2. *Για κάθε μετρικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι μη συνεκτικός.

(ii) $X = F_1 \cup F_2$, όπου F_1 και F_2 είναι μη κενά, κλειστά στο X και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

(iii) $X = U_1 \cup U_2$, όπου U_1 και U_2 είναι μη κενά, ανοικτά στο X και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι ο X είναι μη συνεκτικός. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο F του X τέτοιο ώστε $F \neq \emptyset$ και $F \neq X$. Θέτουμε $F_1 = F$ και $F_2 = X \setminus F$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Θέτουμε $U_1 = X \setminus F_1$ και $U_2 = X \setminus F_2$.

$(iii) \Leftrightarrow (i)$ Έχουμε $U_2 = X \setminus U_1$. Άρα, το ανοικτό U_2 είναι κλειστό ώς συμπλήρωμα ανοικτού συνόλου. Ο X είναι μη συνεκτικός, αφού υπάρχει ανοικτό και κλειστό υποσύνολο U_2 του X, τέτοιο ώστε $U_2 \neq X$ και $U_2 \neq \emptyset$. □

Θεώρημα 3.1.3. *Ένα υποσύνολο F ενός χώρου X είναι ανοικτό και κλειστό στο X αν και μόνο αν $Bd(F) = \emptyset$.*

Απόδειξη. Αν F είναι ανοικτό και κλειστό, τότε $F = Int(F) = Cl(F)$. Άρα, $Bd(F) = Cl(F) \setminus Int(F) = \emptyset$.

Αν $Bd(F) = \emptyset$, τότε $Cl(F) \setminus Int(F) = \emptyset$. Επομένως $Cl(F) \subseteq Int(F)$. Συνεπώς

$$Cl(F) \subseteq Int(F) \subseteq F \subseteq Cl(F).$$

Επομένως $F = Int(F) = Cl(F)$. Άρα, $F = Int(F) = Cl(F)$, που σημαίνει ότι F είναι ανοικτό και κλειστό. □

Πόρισμα 3.1.4. *Ένας χώροε είναι μη συνεκτικός αν και μόνον αν υπάρχει $F \subseteq X$ τέτοιο ώστε $F \neq \emptyset$, $F \neq X$ και $Bd(F) = \emptyset$.*

Θεώρημα 3.1.4. *Αν S είναι συνεκτικό υποσύνολο ενός χώρου X και $X = U_1 \cup U_2$, όπου U_1, U_2 είναι μη κενα ανοικτά στο M και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, τότε $S \subseteq U_1$ ή $S \subseteq U_2$.*

Απόδειξη. Επειδή $S = S \cap M = (S \cap U_1) \cup (S \cap U_2)$ και S είναι συνεκτικό σύνολο, ένα από τα ανοικτά υποσύνολα $S \cap U_1$, $S \cap U_2$ του S είναι κενό. Επομένως, $S = S \cap U_1$ ή $S = S \cap U_2$. Άρα, $S \subseteq U_2$ ή $S \subseteq U_1$.

□

Θεώρημα 3.1.5. *Αν S είναι συνεκτικό υποσύνολο ενός χώρου X και*

$$S \subseteq M \subseteq Cl(S),$$

τότε το σύνολο M είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο M είναι μη συνεκτικός. Τότε $M = U_1 \cup U_2$, όπου U_1, U_2 είναι μη κενα ανοικτά στο M και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Τότε $S = S \cap M = (S \cap U_1) \cup (S \cap U_2)$, όπου τα σύνολα $S \cap U_1$, $S \cap U_2$ είναι ανοικτα στο S και δεν τέμνονται.

Από την σχέση $S \subseteq M \subseteq Cl(S)$ συνεπάγεται ότι $Cl_M(S) = M \cap Cl(S) = M$. Άρα, S είναι παντού πυκνό στο M. Επομένως τα σύνολα $S \cap U_1$, $S \cap U_2$ είναι μη κενά.

Από τα παραπάνω το σύνολο S δεν είναι συνεκτικό, που είναι άτοπο. □

Παραδείγματα 3.1.6.

1. Κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό.

   Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε φραγμένο διάστημα της μορφής (a, b) είναι συνεκτικό.

   Ας υποθέσουμε ότι το (a, b) είναι μη συνεκτικό. Τότε υπάρχουν ανοικτα μη κενα υποσύνολα U και U^* του (a, b), τέτοια ώστε $(a, b) = U \cup U^*$. Έστω $x \in U$.

   Έστω $(x, b) \cap U^* \neq \emptyset$ και $c = \inf\{y : y \in U^* \cap (x, b)\}$. Τότε c ανήκει σε ένα ακριβώς από τα σύνολα U, U^*. Επειδή τα σύνολα U και U^* είναι ανοικτα, ή $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U$ ή $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U^*$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Επομένως $c \neq \inf\{y : y \in U^* \cap (x, b)\}$, που είναι άτοπο. Άρα, $U^* \cap (x, b) = \emptyset$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $U^* \cap (a, x) = \emptyset$. Άρα, $U^* = \emptyset$.

   Από το Θεώρημα 3.1.5, επειδή το διάστημα (a, b) είναι συνεκτικό,

   $$(a, b) \subseteq (a, b] \subseteq Cl((a, b)) = [a, b], \text{ και } (a, b) \subseteq [a, b) \subseteq Cl((a, b)) = [a, b],$$

   τα διαστήματα $(a, b]$, $[a, b)$ και $[a, b]$ είναι συνεκτικά.

   Αν Δ είναι ένα από τα διασήματα της μορφής $[c, \infty)$, (c, ∞), $(-\infty, c)$, $(-\infty, c]$, τότε για κάθε $a, b \in \Delta$ το συνεκτικό σύνολο $[a, b] \subseteq \Delta$, άρα, από το Θεώρημα 3.2.2, Δ είναι συνεκτικό.

2. Αν A συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $a, b \in A$, τότε $[a, b] \subseteq A$.

   Πράγματι, αν $c \in [a, b] \setminus A$, τότε το συνεκτικό A είναι ένωση ανοικτών, μη κενων υποσυνόλων του $A \cap (-\infty, c)$ και $A \cap (c, \infty))$ που δεν τέμνονται, που είναι άτοπο.

3. Κάθε συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία είναι διάστημα.

   Έστω A είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία.

   Έστω A είναι άνω και κάτω φραγμένο, $m = \inf(A)$ και $M = \sup(A)$. Επειδή το A περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία, προκύπτει ότι $M \neq m$. Έστω $a \in (m, M)$. Υπάρχουν $m^*, M^* \in A$, τέτοια ώστε $m < m^* \leq a \leq M^* < M$. Συνεπώς $a \in [m^*, M^*] \subseteq A$. Από τα παραπάνω $(m, M) \subseteq A \subseteq [m, M]$. Άρα, A είναι ένα από τα διαστήματα (m, M), $[m, M)$, $(m, M]$, $[m, M]$.

   Όμοια αποδεικνύεται ότι A είναι διάστημα στις περιπτώσεις που είναι μόνο άνω φραγμένο, ή μόνο κάτω φραγμένο, ή δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένο.

4. Ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνον αν το A ή είναι μονοσύνολο ή είναι διάστημα.

   Προκύπτει από τα προηγούμενα παραδείγματα.

3.2 Ιδιότητες συνεκτικών χώρων.

Θεώρημα 3.2.1. *Αν $X = \bigcup_{t\in T} X_t$ και $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι οικογένεια συνεκτικών υποχώρων του χώρου X με $\bigcap_{t\in T} X_t \neq \emptyset$, τότε ο X είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω $X = F_1 \cup F_2$, όπου F_1 και F_2 είναι κλειστά υποσύνολα του X και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Έστω $t \in T$. Επειδή ο χώρος X_t είναι συνεκτικός, προκύπτει ότι : $X_t \subseteq F_1$ ή $X_t \subseteq F_2$.

Έστω ότι υπάρχουν $t_1, t_2 \in T$, τέτοια ώστε $X_{t_1} \subseteq F_1$ και $X_{t_2} \subseteq F_2$. Τότε

$$\bigcap_{t\in T} X_t \subseteq X_t \subseteq F_1 \text{ και } \bigcap_{t\in T} X_t \subseteq X_{t_2} \subseteq F_2,$$

που είναι άτοπο. Επομένως, ή $X_t \subseteq F_1$ για κάθε t, ή $X_t \subseteq F_2$ για κάθε t.

Τότε όμως $X \subseteq F_1$ ή $X \subseteq F_2$. Άρα, $F_2 = \emptyset$, ή $F_1 = \emptyset$. Συνεπώς ο X είναι συνεκτικός. □

Θεώρημα 3.2.2. *Αν οποιαδήποτε δύο σημεία ενός χώρου X περιέχονται σε ένα συνεκτικό υπόχωρο του X, τότε ο X είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος A_x του X που περιέχει τα σημεία x και x_0. Επομένως $X = \bigcup_{x\in X} A_x$ και $\bigcap_{x\in X} A_x \supseteq \{x_0\} \neq \emptyset$. Από το Θεώρημα 3.2.1 ο χώρος X είναι συνεκτικός. □

Θεώρημα 3.2.3. *Αν (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι συνεκτικοί μετρικοί χώροι, τότε το μετρικό γινόμενο τους $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$ είναι συνεκτικός μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $(a_x, a_y), (b_x, b_y) \in X \times Y$. Θέτουμε

$$\Sigma_X = \{(x, b_y) \in X \times Y : x \in X\},$$

$$\Sigma_Y = \{(a_x, y) \in X \times Y : y \in Y\}.$$

Παρατηρούμε ότι $(b_x, b_y) \in \Sigma_X$ και $(a_x, a_y) \in \Sigma_Y$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο υπόχωρος $\Sigma_X \cup \Sigma_Y$ του $X \times Y$ είναι συνεκτικός.

Αν $(x_1, b_y), (x_2, b_y) \in \Sigma_X$, τότε

$$d_{X\times Y}((x_1, b_y), (x_2, b_y)) = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(b_y, b_y))^2} = d_X(x_1, x_2).$$

Άρα, η επί απεικόνιση $i : X \to \Sigma_X$ που ορίζεται από τον τύπο $i(x) = (x, b_y)$ είναι ισομετρία. Επειδή ο X είναι συνεκτικός και κάθε ισομετρία είναι συνεχής απεικόνιση, από το Θεώρημα 3.2.6 προκύπτει ότι ο υπόχωρος Σ_X του $X \times Y$ είναι συνεκτικός. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο υπόχωρος Σ_Y του $X \times Y$ είναι συνεκτικός. Επειδή $(a_x, b_y) \in \Sigma_X \cap \Sigma_Y$, από το Θεώρημα 3.2.2 προκύπτει ότι ο υπόχωρος $\Sigma_X \cup \Sigma_Y$ είναι συνεκτικός. □

Θεώρημα 3.2.4. *Αν (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) είναι συνεκτικοί μετρικοί χώροι, τότε το μετρικό γινόμενο τους $(X_1, d_1) \times ... \times (X_n, d_n)$ είναι συνεκτικός μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Το Θεωρημα αποδεκνύεται με επαγωγή ως προς $n = 2, 3, ...$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.3 και την σχέση (βλ. Θεώρημα 1.7.11):

$$(X_1, d_1) \times ... \times (X_n, d_n) \times (X_{n+1}, d_{n+1}) = \big((X_1, d_1) \times ... \times (X_n, d_n)\big) \times (X_{n+1}, d_{n+1})$$

□

Παράδειγμα 3.2.5. Ο n-διάστατος κύβος

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times ... \times [0,1]}_{n \text{ φορες}}$$

είναι συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, επειδή το διάστημα $[0,1]$ είναι συνεκτικός χώρος.

Θεώρημα 3.2.6. *Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση από ένα συνεκτικό χώρο X επί ενός χώρου Y, τότε ο Y είναι συνεκτικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω αντίθετα ότι ο Y είναι μη συνεκτικός. Τότε ο Y περιέχει μη κενό ανοικτό και κλειστό σύνολο $F \neq Y$. Επειδή η f είναι συνεχής και επί του Y, το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι μη κενό, ανοικτό και κλειστό στο X και $f^{-1}(F) \neq X$. Συνεπώς ο X είναι μη συνεκτικός, που είναι άτοπο.

□

Θεώρημα 3.2.7. *Αν ο χώρος X είναι συνεκτικός και $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) < f(x_2)$ και για κάθε $c \in [f(x_1), f(x_2)]$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.*

Απόδειξη. Επειδή ο X είναι συνεκτικός και η f είναι συνεχής, το σύνολο $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο $f(X)$ περιέχει τουλάχιστον τα δύο σημεία $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Συνεπώς το $f(X)$ είναι διάστημα και $[f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(X)$. Άρα για κάθε $c \in [f(x_1), f(x_2)]$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$. □

Θεώρημα 3.2.8. *Έστω Δ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε το γράφημα $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \Delta\}$ της f είναι συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $f_\Gamma : \Delta \to \Gamma_f$ που ορίζεται από τον τύπο

$$f_\Gamma(x) = (x, f(x)),\ x \in \Delta.$$

Τότε $\Gamma_f = f_\Gamma(\Delta)$ και το Δ είναι συνεκτικό. Αρκεί να δείξουμε ότι η f_Γ είναι συνεχής.

Έστω $x_0 \in \Delta$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Έστω $\delta^* < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\}$. Αν $|x - x_0| < \delta^*$, τότε $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ και $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Επομένως

$$d_2((x, f(x)), (x_0, f(x_0))) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Άρα η f_Γ είναι συνεχής. □

Παρατήρηση 3.2.8. Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.2.8.

Θα δείξουμε ότι η μη συνεχής στο $x = 0$ συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

έχει συνεκτικό γράφημα. Πράγματι, ας συμβολίσουμε με Γ_f το γράφημα της f. Θέτουμε

$$S = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\}$$

Τότε $\Gamma_f = S \cup \{(0, 0)$ και $Cl(S) = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

Επειδή S είναι συνεκτικό σύνολο και $S \subseteq \Gamma_f \subseteq Cl(S)$.

Από το Θεώρημα 3.1.5 το γράφημα Γ_f είναι συνεκτικό.

Ορισμός 3.2.9. Μια οικογένεια $U_1, ..., U_n$ υποσυνόλων ενώς χώρου X καλείται απλή αλυσίδα από $a \in X$ έως $b \in X$ αν $a \in U_1$, $b \in U_n$, και $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ αν και μόνον αν $|i - j| \leq 1$.

Θεώρημα 3.2.10. *Αν a και b είναι δύο σημεία ενός συνεκτικού χώρου X και $\mathcal{K} = \{U_t\}_{t\in T}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, τότε υπάρχει απλή αλυσίδα $U_1, ..., U_n \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $a \in U_1$ και $b \in U_n$.*

Απόδειξη. Έστω ότι A είναι το σύνολο όλων των σημείων $x \in X$, για τα οποία υπάρχει μια απλή αλυσίδα στοιχείων του $\mathcal{K}$ από το a έως το x. Αρκεί να δείξουμε ότι $A = X$.

Το A είναι ανοικτό στο X. Πράγματι, έστω $x \in A$. Τότε υπάρχει απλή αλυσίδα $U_1, ..., U_n \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε $a \in U_1$ και $x \in U_n$. Για κάθε $y \in U_n$ η οικογένεια $U_1, ..., U_n$ είναι απλή αλυσίδα από a έως y, άρα $x \in U_n \subseteq A$.

Το A είναι κλειστό στο X. Πράγματι, έστω $y \in Cl(A)$. Επειδή $X = \bigcup_{t\in T} U_t$, υπάρχει $U_{t_y} \in \{U_t\}_{t\in T}$ τέτοιο ώστε $y \in U_{t_y}$. Επειδή y είναι σημείο επαφής του A και U_{t_y} είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το y, υπάρχει $x \in A \cap U_{t_x}$. Εφόσον $x \in A$, υπάρχει απλή αλυσίδα $U_1, ..., U_n \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε $a \in U_1$ και $x \in U_n$. Έστω k είναι ο μικρότερος από τους αριθμούς $1, 2, ..., n$ για τον οποίο ισχύει $U_k \cap U_{t_y} \neq \emptyset$. Τότε $U_1, ..., U_k, U_{t_y}$ είναι απλή αλυσίδα στοιχείων του $\mathcal{K}$ από a έως y. Άρα, $y \in A$.

Επειδή A συγχρόνως ανοικτό και κλειστό υποσύνολο συνεκτικού χώρου X, συνεπάγεται ότι $A = X$. □

Θεώρημα 3.2.11. *Δύο οποιαδήποτε σημεία ενός ανοικτού και συνεκτικού συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ μπορούν να συνδεθούν με μια τεθλασμένη γραμμή που περιέχεται στο U.*

Απόδειξη. Έχουμε $U = \bigcup_{x\in U} B(x, \varepsilon_x)$. Έστω $a, b \in U$. Επειδή $\mathcal{K} = \{B(x, \varepsilon_x)\}_{x\in U}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συνεκτικού χώρου U, υπάρχει απλή αλυσίδα $B(x_1, \varepsilon_1), ..., B(x_n, \varepsilon_n) \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $a \in B(x_1, \varepsilon_1)$ και $b \in B(x_n, \varepsilon_n)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \neq x_1$ και $b \neq x_2$.

Η ένωση των ευθύγραμμων τμημάτων $ax_1, x_1x_2, ..., x_{n-1}x_n, x_nb$ περιέχει τεθλασμένη γραμμή από a έως b. □

3.3 Συνιστώσες του χώρου.

Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ ενός χώρου είναι συνεκτικό σύνολο. Επομενως κάθε σημείο x ενός χώρου X ανήκει σε ένα τουλάχιστον συνεκτικό υποσύνολο του X. Από το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει ότι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το σημείο x είναι συνεκτικό σύνολο.

Ορισμός 3.3.1. Έστω X ένας χώρος και $x \in X$. Η ένωση S_x όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το σημείο x καλείται *συνεκτική συνιστώσα* του x στο X.

Από τον ορισμό της συνεκτικής συνιστώσας S_x ενός σημείου x έπεται ότι S_x είναι μη κενό συνεκτικό σύνολο και ότι είναι το "μεγάλύτερο" συνεκτικό σύνολο που περιέχει το σημείο x. Δηλαδή, αν $x \in S \subseteq X$ και το S είναι συνεκτικό, τότε $S \subseteq S_x$.

Θεώρημα 3.3.2. *Σε κάθε χώρο X ισχύουν τα εξής:*

1. *Αν $x, y \in X$, τότε ή $S_x = S_y$ ή $S_x \cap S_y = \emptyset$.*
2. *Ο X είναι ένωση των συνεκτικών συνιστωσών των σημείων του.*
3. *Για κάθε $x \in X$ η συνεκτική συνιστώσα S_x είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη.
1. Αν $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, τότε $S_x \cup S_y$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X που περιέχει τα σημεία x και y. Συνεπώς $S_x \cup S_y \subseteq S_x$ και $S_x \cup S_y \subseteq S_y$. Οπότε $S_y \subseteq S_x$ και $S_x \subseteq S_y$. Άρα, $S_y = S_x$.

2. Έστω $x \in X$. Τότε $\{x\}$ είναι συνεκτικό σύνολο που περιέχει το x. Άρα $\{x\} \subseteq S_x$, δηλαδή $S_x \neq \emptyset$.

3. Επειδή το σύνολο S_x είναι συνεκτικό και περιέχει κάθε συνεκτικό σύνολο που περιέχει το x, προκύπτει ότι $Cl(S_x)$ είναι συνεκτικό και $Cl(S_x) \subseteq S_x$. Άρα, το σύνολο S_x είναι κλειστό.

$\square$

Από το Θεώρημα 3.3.2 προκύπτει ότι η οικογένεια $\{S_x : x \in X\}$ αποτελούμενη από συνεκτικές συνιστώσες σημείων του X είναι διαμέριση του X σε κλειστά και συνεκτικά υποσύνολα. Η ίδια διαμέριση προκύπτει αν ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο X ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \text{ και } y \text{ ανήκουν σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του } X.$$

Κάθε κλάση ισοδυναμίας ως προς την σχέση $\sim$ καλείται *συνεκτική συνιστώσα* του X.

Προφανώς ένας χώρος X είναι συνεκτικός αν και μόνον αν ο X έχει μοναδική συνεκτική συνιστώσα (το ίδιο το X).

Ορισμός 3.3.3. Ένας χώρος X που περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία καλείται *ολικά μη συνεκτικός* όταν κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι μονοσύνολο.

Παραδείγματα 3.3.4.

1. Οι συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου των ρητών αριθμών Q είναι τα μονοσύνολα $\{q\}$, $q \in Q$. Άρα, ο Q είναι ολικά μη συνεκτικός.

2. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $X = [0,1] \cup [2,3] \cup ... \cup [2n, 2n+1] \cup ...$, $n = 0, 1, ...$, είναι τα διαστήματα $S_n = [2n, 2n+1]$.

3. Οι συνεκτικές συνιστώσες της υπερβολής $Y = \{(x,y) \in R^2 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$ είναι
$$S_1 = \{(x,y) \in Y : x < 0\},\ S_2 = \{(x,y) \in Y : x > 0\}$$

4. Οι συνεκτικές συνιστώσες του υπόχωρου $X = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ του $\mathbb{R}$ είναι τα μονοσύνολα. Η συνεκτική συνιστώσα $\{0\}$ δεν είναι ανοικτή στο X.

5. Οι συνεκτικές συνιστώσες οποιουδήποτε διακριτικού χώρου είναι τα μονοσύνολα. Τα μονοσύνολα σε ένα διακριτικό χώρο είναι ανοικτά. Άρα οι συνεκτικές συνιστώσες κάθε διακριτικού χώρου είναι ανοικτές.

3.4 Τοπικά συνεκτικοί χώροι.

Ορισμός 3.4.1. Ένας χώρος X καλείται *τοπικά συνεκτικός στο σημείο* $x \in X$ αν για κάθε ανοικτή περιοχή U του x στο X υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή V του x τέτοια ώστε $x \in V \subseteq U$.

Ένας χώρος X καλείται *τοπικά συνεκτικός* όταν είναι τοπικά συνεκτικός σε κάθε σημείο.

Θεώρημα 3.4.2. *Ένας χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνον αν ο X έχει βάση αποτελούμενη από ανοικτά και συνεκτικά συγχρόνως σύνολα.*

Απόδειξη. Προκύπτει από τον ορισμό της τοπικής συνεκτικότητας ενός χώρου και από το Θεώρημα 1.2.6. $\square$

Παραδείγματα 3.4.3.

1. Ο $\mathbb{R}$ είναι τοπικά συνεκτικός επειδή τα ανοικτά και συνεκτικά σύνολα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ αποτελούν μία βάση του.

2. Κάθε διακριτικός χώρος είναι τοπικά συνεκτικός.

3. Ο υπόχωρος $X = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,0)\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός σε κάθε σημείο εκτός του σημείου $(0,0)$.

Θεώρημα 3.4.3. *Μετρικό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μετρικών τοπικά συνεκτικών χώρων είναι τοπικά συνεκτικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για δύο τοπικά συνεκτικούς χώρους X και Y.

Έστω $(x,y) \in U$ όπου U ανοικτό στο $X \times Y$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.7.12 υπάρχεί U_x ανοικτό στο X και U_y ανοικτό στο Y, τέτοια ώστε $(x,y) \subseteq U_x \times U_y \subseteq U$. Επειδή οι χώροι X και Y είναι τοπικά συνεκτικοί υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή V_x του x στο X και ανοικτή και συνεκτική περιοχή V_y του y στο Y, έτσι ώστε $x \in V_x \subseteq U_x$ και $y \in V_y \subseteq U_y$. Επειδή V_x και V_y είναι συνεκτικά, το ανοικτό στο $X \times Y$ σύνολο $V = V_x \times V_y$ είναι συνεκτικό και

$$(x,y) \in V = V_x \times V_y \subseteq U_x \times U_y \subseteq U.$$

Άρα, ο X είναι τοπικά συνεκτικός σε κάθε σημείο (x,y) του $X \times Y$. □

Θεώρημα 3.4.4. *Για έναν χώρο X τα εξής είναι ισοδύναμα*

(i) ο X είναι τοπικά συνεκτικός,

(ii) για κάθε $x \in X$ αν για κάθε ανοικτή περιοχή G του x υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο V του X τέτοιο ώστε $x \in Int(V) \subseteq V \subseteq G$,

(iii) οι συνεκτικές συνιστώσες κάθε ανοικτού υποσυνόλου G του X είναι ανοικτά στο X σύνολα,

(iv) κάθε ανοικτός υπόχωρος U του X είναι τοπικά συνεκτικός.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Αν ο X έχει την ιδιότητα (i), τότε για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή G του x υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή V του x τέτοια ώστε $x \in V \subseteq G$. Επειδή το σύνολο V είναι ανοικτό, $V = Int(V)$. Άρα, $x \in Int(V) \subseteq V \subseteq G$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω ότι ο X έχει την ιδιότητα (ii) και G είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αν S είναι μια συνεκτική συνιστώσα του G, τότε για κάθε $s \in S$ η G είναι ανοικτή περιοχή του s. Επομένως, για κάθε $s \in S$ υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο V_s του X τέτοιο ώστε $s \in Int(V_s) \subseteq V_s \subseteq G$. Επειδή για κάθε $s \in S$ το S είναι ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του G που περιέχουν το s προκύπτει ότι κάθε $V_s \subseteq S$. Άρα S είναι ανοικτό στο X ως ένωση ανοικτών στο X συνόλων $Int(V_s)$, $s \in S$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Έστω ότι ο X έχει την ιδιότητα (iii) και U είναι ανοικτός υπόχωρος του X. Αν $x \in U$ και G είναι ανοικτή περιοχή του x στο U, τότε G είναι ανοικτό υποσύνολο του X και, συνεπώς, οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι ανοικτά υποσυνόλα του X. Επομένως η συνεκτική συνιστώσα S_x του x στο G είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του U τέτοιο ώστε $x \in S_x \subseteq G$. Άρα ο U είναι τοπικά συνεκτικός.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Αν ο X έχει την ιδιότητα (iv), τότε ο X είναι τοπικά συνεκτικός ως ανοικτός υπόχωρος του εαυτού του.

$\square$

Παραδείγματα 3.4.5.

1. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι τοπικά συνεκτικός, ο $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, ...$, είναι τοπικά συνεκτικός ως γινόμενο τοπικά συνεκτικών χώρων (από το Θεώρημα 3.4.3). Κάθε ανοικτός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συνεκτικός (από το Θεώρημα 3.4.4).

2. Η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής $S = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) : -1 < y \leq 1\}$ περιέχει έναν ανοικτό υποχώρο $U = \{(x, y) \in S : -1 \leq y < \frac{1}{2}\}$, ο οποίος έχει μη ανοικτή συνεκτική συνιστώσα $\{(0, y) \in U : -1 \leq y < \frac{1}{2}\}$.

   Άρα, η συμπυκνωμένη ημινοτονοειδής δεν είναι τοπικά συνεκτική. Ο S είναι τοπικά συνεκτικός σε κάθε $(x, y) \in S \setminus \{(0, y) : -1 < y \leq 1\}$ και δεν είναι τοπικά συνεκτικός στα σημεία $(x, y) \in \{(0, y) : -1 < y \leq 1\}$.

Θεώρημα 3.4.5. *Αν ο χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός και $f : X \to Y = f(X)$ είναι κλειστή απεικόνιση του X επί του χώρου Y, τότε ο Y είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του Y και S μια συνεκτική συνιστώσα του U. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.4 αρκεί να αποδειχθεί ότι S είναι ανοικτό στο Y.

Παρατηρούμε ότι $S = Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(S))$. Επειδή η f είναι κλειστή, αρκεί να δείξουμε ότι $f^{-1}(S)$ είναι ανοικτό.

Έστω ότι $x \in f^{-1}(S)$. Τότε $x \in f^{-1}(U)$. Εφόσον η f είναι συνεχής, $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X. Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός, η συνεκτική συνιστώσα S_x του $f^{-1}(U)$ που περιέχει το x είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επειδή S_x είναι συνεκτικό και η f είναι συνεχής, το σύνολο $f(S_x)$ είναι συνεκτικό.

Έχουμε $f(x) \in f(S_x) \cap S$, όπου $f(S_x)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του U και S είναι συνεκτική συνιστώσα του U. Επομένως $f(S_x) \subseteq S$. Άρα

$$x \in S_x \subseteq f^{-1}(S).$$

Από τα παραπάνω το σύνολο $f^{-1}(S)$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων S_x. $\square$

Θεώρημα 3.4.6. *Αν ο χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός και $f : X \to Y = f(X)$ είναι ανοικτή απεικόνιση του X επί του χώρου Y, τότε ο Y είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω $y = f(x) \in Y$ και U ανοικτό σύνολο με $y \in U$. Τότε $x \in f^{-1}(U)$ και, επειδή η f είναι συνεχής, $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X. Από την τοπική συνεκτικότητα του X έπεται ότι υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο V του X τέτοιο ώστε $x \in V \subseteq f^{-1}(U)$. Άρα, $y = f(x) \in f(V) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$. Επειδή η f είναι ανοικτή και V είναι ανοικτό στυνεκτικό, το σύνολο $f(V)$ ανοικτό και συνεκτικό. Άρα, ο Y είναι τοπικικά συνεκτικός στο y. $\square$

3.5 Κατά τόξο συνεκτικοί χώροι.

Ορισμός 3.5.1. Ένας χώρος X καλείται *τόξο* αν υπάρχει (επί) ομοιομορφισμός

$$h : [0,1] \to X.$$

Τα σημεία $h(0)$ και $h(1)$ καλούνται άκρα του τόξου X.

Από το Θεώρηματα 2.4.2, 3.2.6 και 3.4.6 προκύπτει ότι

Πρόταση 3.5.2. *Κάθε τόξο είναι συμπαγής, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός χώρος.*

Παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $[0,1] \setminus \{0\}$ και $[0,1] \setminus \{1\}$ είναι συνεκτικα υποσύνολα του $[0,1]$ και για κάθε $x \in [0,1] \setminus \{0,1\}$, το σύνολο $[0,1] \setminus \{x\}$ είναι μη συνεκτικό.

Επομένως σε κάθε τόξο X υπάρχουν δύο σημεία a και b ($\{a,b\} = \{h(0), h(1)\}$) τέτοια ώστε τα σύνολα $X \setminus \{a\}$ και $X \setminus \{b\}$ είναι συνεκτικά και για κάθε κάθε $x \in X \setminus \{a,b\}$ το σύνολο $X \setminus \{x\}$ είναι μη συνεκτικό. Αποδεικνύεται ότι αυτή η ιδιότητα είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των τόξων, δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.2. *Ένας μετρικός, συνεκτικός και συμπαγής χώρος X είναι τόξο αν και μόνον αν υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $a, b \in X$, τέτοια ώστε $X \setminus \{a\}$ και $X \setminus \{b\}$ να είναι συνεκτικά σύνολα.*

Ορισμός 3.5.3. Ένας χώρος X καλείται κατά τόξο συνεκτικός αν οποιαδήποτε δύο σημεία $a, b \in X$ είναι άκρα ενός τόξου του X, δηλαδή υπάρχει ομοιομορφισμός

$$h : [0,1] \to h([0,1]) \subseteq X$$

τέτοιος ώστε $h(0) = a$ και $h(1) = b$.

Θεώρημα 3.5.4. *Κάθε κατά τόξο συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Οποιαδήποτε δύο σημεία a και b ενός κατά τόξο συνεκτικού χώρου X ανήκουν σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του X: το τόξο με άκρα a και b. Άρα, ο X είναι συνεκτικός από το Θεώρημα 3.2.2. □

Παραδείγματα 3.5.5.

1. Ο υπόχωρος $T = \left\{(x, x \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,0)\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι τόξο.

   Πράγματι, ο ομοιομορφισμός $h : [0,1] \to T$ ορίζεται από τις σχέσεις: $h(0) = (0,0)$ και $h(x) = (x, x \sin \frac{1}{x})$ για $x \in [0,1] \setminus \{0\}$.

2. Ο $\mathbb{R}$ είναι κατά τόξο συνεκτικός, επειδή οποιαδήποτε δύο σημεία $a, b \in \mathbb{R}$ είναι άκρα του ευθύγραμμου τμήματος $[a,b]$. Ο ομοιομορφισμός $h : [0,1] \to [a,b]$ τέτοιος ωστε $h(0) = a$ και $h(1) = b$ ορίζεται από τον τύπο $h(x) = (b-a)x + a$.

3. Ο συνεκτικός υπόχωρος $X = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,0)\}$ του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι κατά τόξο συνεκτικός.

   Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$ για την οποία $f(0) = (0,0)$ και $f(1) = (1, \sin 1)$. Το μοναδικός συνεκτικός υποχώρος του X που περιέχει τα σημεία $(0,0)$ και $(1, \sin 1)$ είναι ο X. Επομένως $f([0,1]) = X$ είναι συμπαγής χώρος, που είναι άτοπο. Άρα, το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.5.4 δεν είναι αληθές.

   Το παρακάτω Θεώρημα προσφέρει τις ικανές συνθήκες για να είναι ένας χώρος κατά τόξο συνεκτικός.

Θεώρημα 3.5.6. *Κάθε πλήρης, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός μετρικός χώρος είναι κατά τόξο συνεκτικός.*

Πόρισμα 3.5.7. *Κάθε συμπαγής, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός μετρικός χώρος είναι κατά τόξο συνεκτικός.*

Απόδειξη. Συνεπάγεται από το Θεώρημα 3.5.6, αφού κάθε συμπαγής μετρικός χώρος ειναι πλήρης. □

Παραδείγματα 3.5.8.

1. Ο $\mathbb{R}^n$ ως πλήρης, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός μετρικός χώρος είναι κατά τόξο συνεκτικός. Επειδή δύο οποιαδήποτε σημεία ενός ανοικτού και συνεκτικού συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ μπορούν να συνδεθούν με μια τεθλασμένη γραμμή που περιέχεται στο U και η τεθλασμένη γραμμή είναι τόξο, έπεται ότι κάθε ανοικτο και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κατά τόξο συνεκτικό.

2. Το διάστημα (a, b) είναι παράδειγμα κατά τόξο συνεκτικού χώρου, ο οποίος ενώ είναι συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός, δεν είναι πλήρης. Άρα, το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.5.6 δεν είναι αληθές.

3. Θεωρούμε το υποσύνολο του επιπέδου

$$E = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \right) \cup (\{0\} \times [0,1]).$$

   Ο υπόχωρος S είναι παράδειγμα κατά τόξο συνεκτικού χώρου, ο οποίος ενώ είναι πλήρης και συνεκτικός, δεν είναι τοπικά συνεκτικός στα σημεία του συνόλου $\{0\} \times (0,1]$.

Ορισμός 3.5.9. Ένας χώρος X καλείται δρόμος (ή μονοπάτι) αν υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $h : [0,1] \to X$. Τα σημεία $h(0)$ και $h(1)$ καλούνται άκρα του δρόμου X.

Ορισμός 3.5.10. Ένας χώρος X καλείται κατά δρόμο συνεκτικός αν οποιαδήποτε σημεία $a, b \in X$ είναι άκρα ενός δρόμου του X, δηλαδή υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$ τέτοια ώστε $f(0) = a$ και $f(1) = b$.

Από τα Θεωρήματα 2.4.2, 3.2.2, 3.2.6, 3.4.6 και Πόρισμα 3.5.7 συνεπάγεται ότι:

(*i*) *Κάθε τόξο είναι δρόμος.*

(*ii*) *Κάθε κατά τόξο συνεκτικός χώρος είναι κατά δρόμο συνεκτικός.*

(*iii*) *Κάθε μετρικός χώρος που είναι δρόμος είναι τοπικά συνεκτικός, συμπαγής και συνεκτικός χώρος.*

(*iv*) *Κάθε κατά δρόμο συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός.*

(*v*) *Κάθε κατά δρόμο συνεκτικός μετρικός χώρος είναι κατά τόξο συνεκτικός.*

Από τις προτάσεις (*ii*) και (*v*) συνεπάγεται ότι:

(*vi*) *Ένας μετρικός χώρος είναι κατά τόξο συνεκτικός αν και μόνον αν είναι κατά δρόμο συνεκτικός.*

Κεφάλαιο 4

Τα συνεχή.

Οι χώροι στους οποίους αναφέρεται το κεφάλαιο αυτό είναι οι τοπολογικοί χώροι.

4.1 Η έννοια του συνεχούς.

Ορισμός 4.1.1. Κάθε (μη κενός) χώρος που είναι συμπαγής και συνεκτικός καλείται *συνεχές*.

Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συνεχές όταν ο χώρος (X, T_d) είναι συνεχές.

Παραδείγματα 4.1.2.

1. Κάθε κλεστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ της ευθείας των πραγματικών αριθμών είναι συνεχές.

2. Κάθε κλειστή μπάλα $B[x, \varepsilon]$ του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεχές.

Θεώρημα 4.1.3. *Οι συνεκτικές συνιστώσες κάθε συμπαγούς χώρου είναι συνεχή.*

4.2 Βασικές ιδιότητες των συνεχών.

Θεώρημα 4.2.1. *Αν οι υπόχωροι $X_1, ..., X_n$ ενός χώρου X είναι συνεχή, $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $X_1 \cap ... \cap X_n \neq \emptyset$, τότε ο X είναι συνεχές.*

Απόδειξη. Συνεπάγεται από τα Θεωρήματα 2.5.1 και 3.2.1. $\square$

Θεώρημα 4.2.2. *Αν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής απεικόνιση ενός συνεχούς X επί ενός χώρου Y, τότε ο Y είναι συνεχές.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής, ο $Y = f(X)$ είναι συνεκτικός και συμπαγής, άρα ο Y είναι συνεχές. $\square$

Θεώρημα 4.2.3. *Το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μετρικών συνεχών είναι μετρικό συνεχές.*

Απόδειξη. Προκύπτει από τα Θεωρήματα 2.5.4 και 3.2.4. $\square$

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη κενών μετρικών συνεχών τέτοια ώστε*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq ... \supseteq ...X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq ...,$$

τότε ο υποχώρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ του X_1 είναι συνεχές.

Απόδειξη. Επειδή κάθε X_n είναι μη κενός συμπαγής χώρος, κάθε υπόχωρος X_n είναι κλειστός στο X_1. Άρα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι (μη κενός) συμπαγής υποχώρος (από το Θεώρημα 2.5.2). Αρκεί να δείξουμε ότι ο υποχώρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι συνεκτικός.

Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα ο $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι μη συνεκτικός. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = F_1 \cup F_2$, όπου F_1 και F_2 είναι μη κενά, κλειστά υποσύνολα του $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Επειδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι κλειστό στο X_1, τα F_1 και F_2 είναι κλειστά στο X_1. Υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U_1 και U_2 του X_1, τέτοια ώστε $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Το ανοικτό σύνολο $U_1 \cup U_2$ περιέχει την τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Επομένως (από το Θεώρημα 2.5.3) υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $X_n \subseteq U_1 \cup U_2$. Άρα

$$X_{n_0} = (X_{n_0} \cap U_1) \cup (X_{n_0} \cap U_2).$$

Επειδή ο $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X_{n_0}$ και το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ τέμνει το καθένα από τα U_1 και U_2, τα σύνολα $X_{n_0} \cap U_1$, $X_{n_0} \cap U_2$ είναι μη κενά. Άρα, ο X_{n_0} είναι μη συνεκτικός που είναι άτοπο.

□

Παραδείγματα 4.2.1.

1. Το τρίγωνο του Sierpinski είναι ένα υποσύνολο του επιπέδου που ορίζεται ως εξής:

   1 βήμα. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο T_0 χωρίζουμε με ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των πλευρών του σε 4 ισόπλευρα τρίγωνα.

   2 βήμα Αφαιρούμε το εσωτερικό του μεσαίου τριγώνου από το T_0 και παίρνουμε ένα συνεχές $T_1 \subseteq T_0$.

   Επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 στο καθένα από τα 3 τρίγωνα από τα οποία αποτελείται το T_1, παίρνουμε το συνεχές $T_2 \subseteq T_1$. Επαγωγικά επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 στα τρίγωνα του T_n παίρνουμε το συνεχές $T_{n+1} \subseteq T_n$. Το σύνολο $T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n$ είναι ένα συνεχές που καλείται τρίγωνο του Sierpinski.

2. Το χαλί του Sierpinski (Sierpinski carpet) είναι ένα υποσύνολο του επιπέδου που ορίζεται ως εξής:

   1 βήμα. Ένα τετράγωνο S_0 χωρίζουμε σε 9 ισα τετράγωνα.

   2 βήμα Αφαιρούμε το εσωτερικό του μεσαίου τετραγώνου από το S_0 και παίρνουμε ένα συνεχές $S_1 \subseteq S_0$.

   Επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 στο καθένα από τα 8 τετράγωνα από τα οποία αποτελείται το S_1, παίρνουμε το συνεχές $S_2 \subseteq S_1$. Επαγωγικά επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 στα τετράγωνα του S_n παίρνουμε το συνεχές $S_{n+1} \subseteq S_n$. Το σύνολο $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ είναι ένα συνεχές που καλείται χαλί του Sierpinski.

3. Ο σπόγγος του Menger (Menger sponge) είναι ένα υποσύνολο του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου που ορίζεται ως εξής:

   1 βήμα. Έναν κύβο M_0 χωρίζουμε σε 27 ίσους κύβους (κύβος Rubik).

   2 βήμα Αφαιρούμε από το M_0 τα εσωτερικά εκείνων των κύβων που δεν τέμνουν καμία ακμή του M_0 και παίρνουμε ένα συνεχές $M_1 \subseteq M_0$.

   Επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 στο καθένα από τα 20 κύβους από τα οποία αποτελείται το M_1, παίρνουμε το συνεχές $M_2 \subseteq M_1$. Επαγωγικά επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 στους κύβους του M_n παίρνουμε το συνεχές $M_{n+1} \subseteq M_n$. Το σύνολο $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ είναι ένα συνεχές που καλείται σπόγγος του Menger.

4.3 Τοπικά συνεκτικά συνεχή και συνεχή του Peano.

Θεώρημα 4.3.1. *Αν για έναν χώρο X υπάρχει μια συνεχής και επί απεικόνιση $f : [0,1] \to X$, τότε ο X είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές.*

Απόδειξη. Ο χώρος $[0,1]$ είναι τοπικά συνεκτικός, συμπαγής και συνεκτικός. Επειδή κάθε συνεχής απεικόνιση ορισμένη σε ένα συμπαγή χώρο είναι κλειστή, η f είναι κλειστή. Από τα Θεωρήματα 3.4.6 ,2.4.2 και 3.2.6 ο X είναι τοπικά συνεκτικός, συμπαγής και συνεκτικός χώρος. □

Ορισμός 4.3.2. Ένας μετρικός χώρος που είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές καλείται *συνεχές του Peano.*

Το παρακάτω Θεώρημα προσφέρει μια χαρακτηριστική ιδιότητα ενός συνεχούς του Peano.

Θεώρημα 4.3.3. *(**Hahn-Mazurkiewicz**) Ένας μετρικός χώρος X είναι συνεχές του Peano αν και μόνον αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to f([0,1]) = X$.*

Θεώρημα 4.3.4. *Κάθε συνεχές του Peano είναι κατά τόξο συνεκτικός χώρος.*

Απόδειξη. Το Θεώρημα έπεται από το Θεώρημα 3.5.6, άφού κάθε συνεχές του Peano είναι μετρικός, πλήρης, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός χώρος. □

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω γενικότερο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.5. *Κάθε ανοικτός και συνεκτικός υπόχωρος ενός συνεχούς του Peano είναι κατά τόξο συνεκτικός.*

Θεώρημα 4.3.6. *Ένας μετρικός χώρος Y που είναι συνεχής εικόνα ενός συνεχούς του Peano είναι συνεχές του Peano.*

Απόδειξη. Έστω X ένα συνεχές του Peano και $f : X \to Y = f(X)$. Επειδή ο X είναι συμπαγής χώρος, κάθε συνεχής απεικόνιση είναι κλειστή. Η συνεχής εικόνα ενός συμπαγούς και συνεκτικού χώρου είναι συμπαγής και συνεκτικός χώρος και η κλειστή εικόνα ενός τοπικά συνεκτικού χώρου είναι τοπικά συνεκτικός χώρος, άρα $f(X)$ είναι συνεχές του Peano. □

Θεώρημα 4.3.7. *Μετρικό γινόνενο πεπερασμένου πλήθους συνεχών του Peano είναι συνεχές του Peano.*

Απόδειξη. Μετρικό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μετρικών, συμπαγών, συνεκτικών και τοπικά συνεκτικών χώρων είναι μετρικός συμπαγής, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός χώρος. □

Θεώρημα 4.3.8. ***(Sierpinski)*** *Για ένα μετρικό και συμπαγή χώρο X τα εξής είναι ισοδύναμα*

(i) *ο X είναι τοπικά συνεκτικός*

(ii) *για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν συνεχή $X_1, ..., X_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $\operatorname{diam}(X_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, ..., n$.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή O_x του x τέτοια ώστε $O_x \subseteq S(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, το ανοικτό κάλυμμα $\{O_x\}_{x\in X}$ του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{O_{x_1}, ..., O_{x_n}\}$.

Θέτουμε $X_i = Cl(O_{x_i})$, $i = 1, ..., n$. Κάθε X_i είναι συνεκτικό ως περίβλημα συνεκτικού συνόλου και συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς μετρικού χώρου. Επομένως κάθε X_i είναι συνεχές. Επίσης

$$\operatorname{diam}(X_i) = \operatorname{diam}(O_x) < \operatorname{diam}(S(x, \varepsilon/2)) \leq \varepsilon.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $x \in X$ και U_x ανοικτή περιοχή του x στο X. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq U_x$. Επομένως υπάρχουν συνεχή $X_1, ..., X_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $\operatorname{diam}(X_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Έστω ότι $X_{k_1}, ..., X_{k_x}$ είναι τα στοιχεία του καλύμματος $\{X_1, ..., X_n\}$ του X που περιέχουν το σημείο x. Επειδή $x \in X_{k_1} \cap ... \cap X_{k_x}$, το σύνολο $A = X_{k_1} \cup ... \cup X_{k_x}$ είναι συνεχές. Επίσης $x \in A \subseteq B(x, \varepsilon)$.

Έστω $X_{m_1}, ..., X_{m_x}$ είναι τα στοιχεία του καλύμματος $\{X_1, ..., X_n\}$ του X που δεν περιέχουν το σημείο x και $G = X \setminus (X_{m_1} \cup ... \cup X_{m_x})$. Τότε το G είναι ανοικτό και $x \in G \subseteq A$. Άρα, $x \in \operatorname{Int}(A)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $x \in X$ για κάθε ανοικτή περιοχή U_x του x στο X, υπάρχει συνεκτικό σύνολο A, τέτοιο ώστε $x \in \operatorname{Int}(A) \subseteq A \subseteq U_x$. Που σημαίνει ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός. □

Θεώρημα 4.3.9. *Ένα μετρικό συνεχές X είναι συνεχές του Peano αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν συνεχή $X_1, ..., X_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $\operatorname{diam}(X_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, ..., n$.*

Απόδειξη. Συνεπάγεται από το Θεώρημα 4.3.8. □

Παραδείγματα 4.3.9.

1. Από το Θεώρημα 4.3.9 προκύπτει ότι το καθένα από τα ακόλουθα σύνολα είναι συνεχές του Peano:

   (α΄) το τρίγωνο του Sierpinski

   (β΄) το χαλί του Sierpinski

   (γ΄) ο σπόγγος του Menger

2. Η συμπυκνωμένη ημινοτονοειδής δεν είναι συνεχές του Peano, επειδή δεν είναι τοπικά συνεκτική σε κάθε σημείο.

Κεφάλαιο 5

Τοπολογοκή διάσταση ενός χώρου

Οι χώροι στους οποίους αναφέρεται το κεφάλαιο αυτό είναι μετρικοί με αριθμήσιμη βάση.

5.1 Χώροι διάστασης μηδέν (μηδενοδιάστατοι χώροι).

Ορισμός 5.1.1. Ένας μη κενός χώρος X καλείται μηδενοδιάστατος (0-διάστατος) αν για κάθε σημείο $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x τέτοια ώστε

$$x \in V \subseteq U \text{ και } Bd(V) = \emptyset.$$

Δηλαδή, ένας χώρος είναι 0-διάστατος αν έχει βάση που αποτελείται από σύνολα με κενά σύνορα.

Ένα υποσύνολο A έχει κενό σύνορο, δηλαδή $Bd(A) = Cl(A) \setminus Int(A) = \emptyset$ αν και μόνον αν $A = Int(A) = Cl(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν το A είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Συνεπώς

- Ένας μη κενός χώρος X είναι 0-διάστατος αν και μόνον αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x υπάρχει συγχρόνως ανοικτό και κλειστο σύνολο V τέτοιο ώστε

$$x \in V \subseteq U.$$

- Ένας μη κενός χώρος είναι 0-διάστατος αν και μόνον αν έχει βάση που αποτελείται από ανοικτά και κλειστά συγχρόνως σύνολα.
- Κάθε 0-διάστατος χώρος X που περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία είναι μη συνεκτικός.

Παραδείγματα 5.1.1.

1. Κάθε μη κενός αριθμήσιμος χώρος είναι 0-διάστατος.

   Πράγματι, έστω $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ (ή $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$) ένας αριθμήσιμος χώρος και d μετρική του A. Αν $a \in A$ και U είναι ανοικτή περιοχή του a στο A, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(a, \varepsilon) \subseteq U$. Επειδή το A είναι αριθμήσιμο, υπάρχει πραγματικός αριθμός $r \in (0, \varepsilon)$ διαφορετικός από κάθε $d(a, a_n)$, $n = 1, 2, ...$ Τότε

$$a \in B(a, r) \subseteq B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

   και $Bd(B(a, r)) = \emptyset$, επειδή $d(a, a_n) \neq r$ για κάθε $a_n \in A$.

2. Κάθε υπόχωρος του $\mathbb{R}$ που δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα είναι 0-διάστατος.

   Πράγματι, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και A δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Αν $a \in A$ και U είναι ανοικτή περιοχή του a στο A, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

   $$B_A(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \subseteq U.$$

   Επειδή το A δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα, υπάρχουν $r_1, r_2 \notin A$ τέτοια ώστε $a - \varepsilon < r_1 < a$ και $a < r_2 < a + \varepsilon$. Τότε το σύνολο $V = [r_1, r_2] \cap A = (r_1, r_2) \cap A$ είναι ανοικτο και κλειστό στο A και $a \in V \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \subseteq U$.

3. Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι 0-διάστατο.

4. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι 0-διάστατο.

5. Το σύνολο του Cantor είναι 0-διάστατο.

Θεώρημα 5.1.1. *Κάθε 0-διάστατος χώρος που περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία είναι ολικά μη συνεκτικός.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας 0-διάστατος χώρος X που δεν είναι ολικά συνεκτικός. Τότε υπάρχει $x \in X$, του οποίου η συνεκτική συνεστώσα S_x περιέχει $y \neq x$. Επειδή σε ένα μετρικό χώρο τα μονοσύνολα είναι κλειστά, το σύνολο $U = X \setminus \{y\}$ είναι ανοικτό. Επειδή ο X είναι 0-διάστατος και $x \in U$, υπάρχει ανοικτό και κλειστό υποσύνολο V του X τέτοιο ώστε $x \in V \subseteq U$. Τότε το σύνολο $S_x \cap V$ είναι ανοικτό και κλειστό στο συνεκτικό χώρο S_x, $S_x \cap V \neq S_x$ και $S_x \cap V \neq \emptyset$, που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 5.1.2. *Κάθε ολικά μη συνεκτικός και συμπαγής χώρος είναι 0-διάστατος.*

5.2 Ορισμός τοπολογικής διάστασης n.

Η τοπολογική διάσταση [1] $\mathrm{ind}(X)$ ενός χώρου X είναι ένας ακέραιος αριθμός ≥ -1 ή ∞ και ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

1. $\mathrm{ind}(X) = -1$ αν και μόνον αν $X = \emptyset$,

2. $\mathrm{ind}(X) \leq n$, όπου $n = 0, 1, 2, ...$, αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x υπάρχει ανοικτό σύνολο V τέτοιο ώστε

   $$x \in V \subseteq U \text{ και } \mathrm{ind}(Bd(V)) \leq n - 1.$$

3. $\mathrm{ind}(X) = n \geq 0$, αν $\mathrm{ind}(X) \leq n$ και $\mathrm{ind}(X) \nleq n - 1$.

4. $\mathrm{ind}(X) = \infty$ αν $\mathrm{ind}(X) \nleq n$ για κάθε $n = 0, 1, ...$

Θα γράφουμε $\mathrm{ind}(X) > n$ τότε και μόνον τότε όταν $\mathrm{ind}(X) \nleq n$.

[1] Η διάσταση ind καλείται συνήθως *μικρή επαγωγική διάσταση*.

Παραδείγματα 5.2.1.

1. Η ευθεία και κάθε υποδιάστημα της ευθείας έχουν διάσταση 1.

   Πραγματι, το $\mathbb{R}$ ως συνεκτικός χώρος δεν περιέχει κανένα ανοικτό σύνολο με κενό σύνορο, άρα $\mathrm{ind}(\mathbb{R}) \nleq 0$. Η οικογένεια ανοικτών διαστημάτων $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}$ και το σύνορο $Bd((a,b)) = \{a,b\}$ κάθε ανοικτού διαστήματος είναι 0-διάστατο. Επειδή $\mathrm{ind}(\mathbb{R}) \leq 1$ και $\mathrm{ind}(\mathbb{R}) \nleq 0$ προκύπτει ότι $\mathrm{ind}(\mathbb{R}) = 1$.

   Όμοια αποδεικνύεται ότι κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ έχει διάσταση 1.

2. Ο κύκλος $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ έχει διάσταση 1.

   Πράγματι, οι ανοικτές μπαλες $B_{S^1}(x,\varepsilon)$ του S^1 είναι τα ανοικτά τόξα $\widehat{ab}$ των οποίων το σύνορο $Bd_{S^1}(\widehat{ab}) = \{a,b\}$ είναι 0-διάστατο, άρα $\mathrm{ind}(S^1) \leq 1$. Επειδή το S^1 είναι συνεκτικό, $\mathrm{ind}(S^1) \nleq 0$. Άρα, $\mathrm{ind}(S^1) = 1$.

3. Η συμπυκνωμένη ημινοτονοειδής έχει διάσταση 1.

4. $\mathrm{ind}(\mathbb{R}^n) \leq n$, $n = 1, 2, ...$

   Πράγματι, οι ανοικτοί κύβοι

   $$K(x,\varepsilon) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times .... \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon), \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \varepsilon > 0,$$

   αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $\mathrm{ind}(Bd(K(x,\varepsilon))) \leq n - 1$.

Θεώρημα 5.2.1. *Αν* $\mathrm{ind}(X) \leq n$ *και* $A \subseteq X$, *τότε* $\mathrm{ind}(A) \leq n$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή ως προς n.

Για $n = -1$ το θεώρημα προφανώς ισχύει.

Ας υποθέσουμε ότι το Θεώρημα ισχύει για $n - 1$.

Έστω $\mathrm{ind}(X) \leq n$. Αν $a \in A$ και U ανοικτή περιοχή του a στο A, τότε $U = U^* \cap A$, όπου U^* ανοικτό στο X. Επειδή $\mathrm{ind}(X) \leq n$, υπάρχει V^* ανοικτό στο X τέτοιο ώστε

$$a \in V^* \subseteq U^* \text{ και } \mathrm{ind}(Bd(V^*)) \leq n - 1.$$

Το σύνολο $V = V^* \cap A$ είναι ανοικτό στο A και $a \in V \subseteq U$.

Έστω $Bd_A(V)$ είναι το σύνορο του V στο A και $Cl_A(V)$ το περίβλημα του V στο A, τότε

$$Bd_A(V) = Cl_A(V) \setminus V = (Cl(V) \cap A) \setminus V \subseteq (Cl(V^*) \cap A) \setminus (V^* \cap A) \subseteq Cl(V^*) \setminus V^* = Bd(V^*).$$

Επειδή $Bd_A(V) \subseteq Bd(V^*)$ και $\mathrm{ind}(Bd(V^*)) \leq n - 1$, από την υπόθεση της επαγωγής $\mathrm{ind}(Bd_A(V)) \leq n - 1$. $\square$

Το Θεωρήματα που ακολουθούν αποδεικνύονται με επαγωγή.

Θεώρημα 5.2.2. *Για οποιουσδήποτε υποχώρους A και B ενός χώρου X ισχύει:*

$$\mathrm{ind}(A \cup B) \leq \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B) + 1.$$

Θεώρημα 5.2.3. *Αν ο χώρος X είναι ένωση αριθμήσιμης οικογένειας κλειστών υποχώρων $\{X_j\}_{j \in J}$ και $\mathrm{ind}(X_j) \leq n$ για κάθε $j \in J$, τότε $\mathrm{ind}(X) \leq n$.*

Θεώρημα 5.2.4. *Αν $A,\ B \subseteq X$, $\mathrm{ind}(A) \leq n$, $\mathrm{ind}(B) \leq n$ και A είναι κλειστό στο X, τότε $\mathrm{ind}(A \cup B) \leq n$.*

Θεώρημα 5.2.5. *Αν $\mathrm{ind}(X) \leq n$, τότε υπάρχουν υπόχωροι A και B του X τέτοιοι ώστε $X = A \cup B$, $\mathrm{ind}(A) \leq n-1$ και $\mathrm{ind}(B) \leq 0$.*

Θεώρημα 5.2.6. *Η διάσταση ενός χώρου δεν αυξάνεται με την προσθήκη πεπερασμένου πλήθους σημείων.*

Θεώρημα 5.2.7. *Ένας χώρος είναι διάστασης $\leq n$ αν και μόνον αν είναι ένωση $n+1$ υποχώρων διάστασης ≤ 0.*

Θεώρημα 5.2.8. *Αν τουλάχιστον ένας από του χώρους A και B είναι μη κενός, τότε*

$$\mathrm{ind}(A \times B) \leq \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B).$$

Θεώρημα 5.2.9. *Αν B έχει διάσταση 0, τότε*

$$\mathrm{ind}(A \times B) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B).$$

5.3 Τοπολογική διάσταση του $\mathbb{R}^n$.

Τα τρία θεωρήματα που ακολουθούν είναι από τα σημαντικότερα που αφορούν τη διάσταση των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων αυτών είναι αρκετά πολύπλοκες.

Θεώρημα 5.3.1. $\mathrm{ind}(\mathbb{R}^n) = n$, $n = 1, 2, ...$

Κάθε υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση $\leq n$. Το παρακάτω θεώρημα προσφέρει την ικανή και αναγκαία συνθήκη ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ να έχει διάσταση ακριβώς n.

Θεώρημα 5.3.2. *Ένας υπόχωρος X του $\mathbb{R}^n$ είναι n-διάστατος, δηλαδή $\mathrm{ind}(X) = n$, αν και μόνον αν ο X περιέχει ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 5.3.3. *Κάθε n-διάστατος χώρος X, $n = 0, 1, ...$, είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του κύβου $[0,1]^{2n+1}$.*

Από το Θεώρημα 5.3.3 προκύπτει ότι:

Κάθε 0-διάστατος χώρος είναι ομοιομορφικός με ένα υπόσύνολο του διαστήματος $[0,1]$.

Κάθε 1-διάστατος χώρος είναι ομοιομορφικός με ένα υπόσύνολο του τρισδιάστατου κύβου $[0,1]^3$.

Συνεπώς μπορούμε να ˝ βλέπουμε˝ κάθε 0-διάστατο χώρο ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κάθε 1-διάστατο χώρο ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Κεφάλαιο 6

Καμπύλες.

Οι χώροι στους οποίους αναφέρεται το κεφάλαιο αυτό είναι μετρικοί με αριθμήσιμη βάση.

Ορισμός 6.0.1. Κάθε μετρικό 1-διάστατο συνεχές καλείται *καμπύλη*.

Η πιο απλή καμπύλη είναι το ευθύγραμμο τμήμα. Η ευθεία όμως, αν και είναι μονοδιάστατος χώρος, δεν είναι καμπύλη, επειδή δεν είναι συμπαγής χώρος.

Η συμπαγότητα, η συνεκτικότητα και η διάσταση είναι τοπολογικές ιδιότητες, άρα

(*i*) *Η ιδιότητα ενός χώρου να είναι καμπύλη είναι τοπολογική.*

(*ii*) *Κάθε τόξο είναι καμπύλη.*

Ένας χώρος που είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους συμπαγών 1-διάστατων συνόλων είναι συμπαγής και 1-διάστατος. Επομένως:

(*iii*) *Κάθε συνεκτικός χώρος που είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους καμπυλών είναι καμπύλη.*

Ορισμός 6.0.2. Ένα συνεχές καλείται *γράφημα*, αν μπορεί να γραφεί ως ένωση πεπερασμένου πλήθους τόξων, τα οποία ανά δύο είτε δεν τέμνονται, είτε τέμνονται σε ένα από τα άκρα τους, είτε τέμνονται στα δυό τους άκρα.

Απο τον ορισμό του γραφήματος και από την πρόταση (*iii*) έπεται ότι

(*iv*) *Κάθε γράφημα είναι καμπύλη.*

Η περιφέρεια του κύκλου είναι γράφημα, αφού είναι ένωση δύο τόξων που τέμνονται μόνο στα άκρα τους.

Ορισμός 6.0.3. Μια καμπύλη που είναι ομοιομορφική με την περιφέρεια του κύκλου καλείται *απλή κλειστή καμπύλη*.

Ορισμός 6.0.4. Ένα γραφήμα που δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες καλείται *δένδρο*.

Απο τον ορισμό του δέντρου και από την πρόταση (*iv*) έπεται ότι

(*v*) *Κάθε δέντρο είναι καμπύλη.*

6.1 Τάξη διακλάδωσης καμπύλης σε σημείο.

Κάθε σημείο x ενός γραφήματος G είναι κοινό άκρο πεπερασμένου πλήθους τόξων του G που δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός από το x. Το μέγιστο πλήθος n των τόξων αυτών συμβολίζεται με $\mathrm{ord}(x, G)$ και καλείται τάξη διακλάδωσης του G στο x.

Παραδείγματα 6.1.1.

1. Τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος AB είναι τάξης 1, ενώ τα εσωτερικά του σημεία AB είναι τάξης 2.

2. Κάθε σημείο ενός κύκλου είναι τάξης 2.

3. Έστω G είναι ένωση n ευθύγραμμων τμήματων $BA_1, ..., BA_n$ ενός επιπέδου που έχουν μόνο ένα κοινό σημείο B. Τότε $\mathrm{ord}(B, G) = n$, $\mathrm{ord}(A_i) = 1$ για κάθε $i = 1, ..., n$ και $\mathrm{ord}(M, G) = 2$ για κάθε $M \in G \setminus \{B, A_1, ..., A_n\}$.

Υπάρχουν όμως καμπύλες που δεν περιέχουν κανένα τόξο, οπότε η τάξη διακλάδωσης μιας καμπύλης K σε ένα σημείο $x \in K$ δεν μπορεί να οριστεί ως το μέγιστο πλήθος τόξων με κοινό άκρο το σημείο x.

Παρατήρουμε ότι αν η τάξη διακλάδωσης ενός γραφήματος G στο σημείο x είναι n και $\tau_1, ..., \tau_n$ είναι τόξα του G με μοναδικό κοινό σημείο το άκρο τους x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο U του G τέτοιο ώστε $x \in U \subseteq B(x, \varepsilon)$ και $\mathrm{Bd}(U) = \{x_1, ..., x_n\}$, όπου $\{x_i\} = \mathrm{Bd}(U) \cap \tau_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Συμβολίζοντας με $|\mathrm{Bd}(U)|$ τον πληθάριθμο του $\mathrm{Bd}(U)$, έχουμε $|\mathrm{Bd}(U)| = n$.

Επειδή το σύνορο $\mathrm{Bd}(U)$ ενός ανοικτού υποσυνόλου U μιας καμπύλης K είναι συμπαγές, μπορεί να έχει ως πληθάριθμο: ή ένα φυσικό αριθμό, ή τον πληθάριθμο $\mathcal{N}_0$ του συνόλου των φυσικών αριθμών ή τον πληθάριθμο $\mathfrak{c}$ του συνεχούς.

Συμβολίζουμε με ω τον διατακτικό τύπο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Τότε $n < \omega$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Ορισμός 6.1.1. Έστω ότι $\mathfrak{n}$ είναι ή ένας φυσικός αριθμός, ή $\mathcal{N}_0$, ή $\mathfrak{c}$, ή ω.

Θα λέμε ότι *η τάξη διακλάδωσης* της καμπύλης K στο σημείο $x \in K$ είναι $\leq \mathfrak{n}$ και θα γράφουμε $\mathrm{ord}(x, K) \leq \mathfrak{n}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο U του K τέτοιο ώστε

$$x \in U \subseteq B(x, \varepsilon) \text{ και } |\mathrm{Bd}(U)| \leq \mathfrak{n}.$$

Ορίζουμε $\mathrm{ord}(x, K) > \mathfrak{n}$ αν δεν ισχύει η ανισότητα $\mathrm{ord}(x, K) \leq \mathfrak{n}$.

Ορίζουμε $\mathrm{ord}(x, K) = \mathfrak{n}$ αν $\mathrm{ord}(x, K) \leq \mathfrak{n}$ και για κάθε $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ ισχύει $\mathrm{ord}(x, K) > \mathfrak{m}$.

Τα σημεία x μιας καμπύλης K ταξινομούνται ως προς την τάξη διακλάδωσης ως εξής:

1. Σημεία x πεπερασμένης τάξης διακλάδωσης $n \in \{1, 2, ...\}$.

   $\mathrm{ord}(x, K) = n$ αν $\mathrm{ord}(x, K) \leq n$ και $\mathrm{ord}(x, K) > n - 1$.

2. Σημεία x μη φραγμένης τάξης διακλάδωσης ω.

   $\mathrm{ord}(x, K) = \omega$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή του x διαμέτρου $< \varepsilon$ με πεπερασμένο σύνορο και $\mathrm{ord}(x, K) > n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

3. Σημεία x αριθμήσιμης τάξης διακλάδωσης $\mathcal{N}_0$.

   $\mathrm{ord}(x, K) = \mathcal{N}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή του x διαμέτρου $< \varepsilon$ με αριθμήσιμο σύνορο και $\mathrm{ord}(x, K) > n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

4. Σημεία x μη αριθμήσιμης τάξης διακλάδωσης $\mathfrak{c}$.

   $\mathrm{ord}(x, K) = \mathfrak{c}$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο κάθε ανοικτή περιοχή του x διαμέτρου $< \varepsilon$ έχει μη αριθμήσιμο σύνορο.

Παραδείγματα 6.1.2.

1. Η συμπυκνωμένη ημινοτονοειδής $S = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) : -1 < y \leq 1\}$ έχει ταξή διακλάδωσης $\mathcal{N}_0$ σε κάθε σημείο του διαστήματος $\{(0, y) : -1 < y \leq 1\}$ και τάξη διακλάδωσης 2 σε κάθε σημείο του συνόλου $\left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\}$.

2. Το τρίγωνο του Sierpinski στις κορυφές του αρχικού τριγώνου έχει τάξη διακλάδωσης 2, στις κορυφές των τριγώνων που αφαιρούνται έχει τάξη διακλάδωσης 4, στα υπόλοιπα σημεία έχει τάξη διακλάδωσης 3.

3. Το χαλί του Sierpinski είναι καμπύλη, η οποία έχει τάξη διακλάδωσης $\mathfrak{c}$ σε κάθε σημείο.

4. Ο σπόγγος του Menger είναι καμπύλη, η οποία έχει τάξη διακλάδωσης $\mathfrak{c}$ σε κάθε σημείο.

6.2 Τοπικά συνεκτικές καμπύλες.

Κάθε τοπικά συνεκτικό συνεχές είναι κατά τόξο συνεκτικό. Επομένως οποιαδήποτε δύο σημεία μιας τοπικά συνεκτικής καμπύλης K μπορούν να συνδεθούν με ένα τόξο της K.

Τοπικά συνεκτικές καμπύλες είναι: τα τόξα, τα γραφήματα, τα δένδρα, το χαλί του Sierpinski, το τρίγωνο του Sierpinski, ο σπόγγος του Menger.

Η συμπυκνωμένη ημινοτονοειδής δεν είναι κατά τόξο συνεκτική, αν και περιέχει τόξα. Άρα, η συμπυκνωμένη ημινοτονοειδής είναι μη τοπικά συνεκτική καμπύλη.

Θεώρημα 6.2.1. *Αν $\mathrm{ord}(x, K) \geq \mathfrak{n}$ σε ένα σημείο x μιας τοπικά συνεκτικής καμπύλης K, τότε υπάρχουν $\mathfrak{n}$ τόξα (αριθμήσιμου πλήθους τόξα αν $\mathfrak{n} = \omega$) της K με άκρο x τα οποία εκτός από το x δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.*

Θεώρημα 6.2.2. *Μια καμπύλη η οποία έχει τάξη διακλάδωσης $\leq \omega$ σε κάθε σημείο, είναι τοπικά συνεκτική.*

Τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν είναι πολύ σημαντικά στην ταξινόμηση των καμπυλών.

Θεώρημα 6.2.3. *Το χαλί του Sierpinski είναι καθολική επίπεδη καμπύλη, δηλαδή κάθε επίπεδη καμπήλη είναι ομοιομορφική με ένα υποσύνολο του χαλιού του Sierpinski.*

Θεώρημα 6.2.4. *Ο σπόγγος του Menger είναι καθολική καμπύλη, δηλαδή κάθε καμπύλη είναι ομοιομορφική με ένα υποσύνολο του σπόγκου του Menger.*

Κεφάλαιο 7

Διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^n$ όλων των διατεταγμένων n-αδων

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2 ..., x_n)$$

πραγματικών αριθμών. Συμβολίζουμε

$$\mathbf{0}_n = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ορίζουμε την πρόσθεση στο $\mathbb{R}^n$, θέτοντας για $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

Ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό στοιχείου του $\mathbb{R}^n$ επί πραγματικό αριθμό, θέτοντας για $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$$

Η τριάδα $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο $\{\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητο* αν και μόνον αν η ισότητα

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{p}_m = \mathbf{0}_n$$

ικανοποιείται μόνο για $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$.

Στο $\mathbb{R}^n$, όπως και σε κάθε διανυσματικό χώρο, ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το σύνολο $\{\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνον αν ένα από τα σημεία $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m$ είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλλων.

2. Αν το σύνολο $\{\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε κάθε μη κενό υποσύνολό του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

3. Αν το σύνολο $\{\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το σύνολο $\{\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m, \mathbf{p}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε $\mathbf{p}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_m$.

Το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων σημείων του $\mathbb{R}^n$ είναι n. Τα γραμμικώς ανεξάρτητα σημεία

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

αποτελουν μία βάση του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n.$$

Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2..., x_n)$ και $y = (y_1, y_2..., y_n)$, τότε η απόσταση $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ μεταξύ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Η απεικόνιση $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μετρική.

Παρατηρούμε ότι

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}_n).$$

Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε

$$|\mathbf{x}|_n = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{0}_n).$$

Τότε

$$|\mathbf{x}|_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Για οποιαδήποτε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Συνεπώς

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_n(\mathbf{x}, \mathbf{0}_n) + d_n(\mathbf{0}_n, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|_n + |\mathbf{y}|_n$$

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_n = d_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{0}_n) \leq d_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y}) + d_n(\mathbf{y}, \mathbf{0}_n) = |\mathbf{x}|_n + |\mathbf{y}|_n$$

Άρα,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n \leq |\mathbf{x}|_n + |\mathbf{y}|_n$$
$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_n \leq |\mathbf{x}|_n + |\mathbf{y}|_n$$

Μια απεικόνιση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ είναι *συνεχής* στο $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^k$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \text{ και } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_k < \delta \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|_n < \varepsilon.$$

Μια απεικόνιση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ είναι *ομοιόμορφα συνεχής* στο $\mathbb{R}^k$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \text{ και } |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_k < \delta \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|_n < \varepsilon.$$

7.1 Γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός 7.1.1. Έστω V_1 και V_2 διανυσματικοί χώροι πάνω στο $\mathbb{R}$.

Μια απεικόνιση $f : V_1 \to V_2$ καλείται *γραμμική* όταν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ ισχύει

$$f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y})$$

Θεώρημα 7.1.1. *Κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (και άρα συνεχής).*

Απόδειξη. Θεωρούμε την βάση του $\mathbb{R}^k$ που αποτελείται από τα σημεία

$$\mathbf{d}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{d}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{d}_k = (0, 0, ..., 1).$$

Έστω $\mathbf{p}_1 = f(\mathbf{d}_1), \mathbf{p}_2 = f(\mathbf{d}_2), ..., \mathbf{p}_k = f(\mathbf{d}_k)$.

Θεωρούμε την βάση του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από τα σημεία

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

Τότε $\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^{n} p_i^j \mathbf{e}_j$ για $i = 1, ..., k$.

Επειδή η f είναι γραμμική για κάθε $\mathbf{x} = x_1 d_1 + ... + x_k d_k \in \mathbb{R}^k$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(\mathbf{x})|_n &= |f(x_1 d_1 + ... + x_k d_k)|_n = |x_1 p_1 + ... + x_k p_k|_n = \\
&= \left| x_1 \sum_{j=1}^{n} p_1^j \mathbf{e}_j + ... + x_k \sum_{j=1}^{n} p_k^j \mathbf{e}_j \right|_n = \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i p_i^j \right) \mathbf{e}_j \right|_n = \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i p_i^j \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{k} (p_i^j)^2 \right) \right)} = \\
&= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} (p_i^j)^2 \right) \right)} = |\mathbf{x}|_k \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} (p_i^j)^2 \right)}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Θέτοντας $p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} (p_i^j)^2 \right)}$ παίρνουμε

$$|f(\mathbf{x})|_n \leq p |\mathbf{x}|_k.$$

Επομένως και για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|_n = |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|_n \leq p \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_k.$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

7.2 Διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$.

Ένα υποσύνολο $\mathbf{V}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι *διανυσματικός υπόχωρος* του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν έχει την εξής ιδιότητα

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V} \text{ και } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathbf{V}$$

Έστω $\mathbf{V}$ ένας διανυσματικός υπόχωρος $\mathbb{R}^n$.

Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$, τότε $0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}_n$. Άρα, $\mathbf{0}_n = (0, 0, ..., 0) \in \mathbf{V}$.

Η διάσταση ενός υποχώρου $\mathbf{V}$ του $\mathbb{R}^n$ ισούται με το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων του $\mathbf{V}$. Επειδή το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων σημείων του $\mathbb{R}^n$ είναι n, η διάσταση του $\mathbf{V}$ είναι $\leq n$.

Ο μοναδικός 0-διαστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι ο $\{\mathbf{0}_n\}$.

Για κάθε $k = 1, ..., n$, οποιαδήποτε k γραμμικώς ανεξάρτητα σημεία $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_k$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζουν ένα μοναδικό k-διάστατο υπόχωρο $\mathbf{V}^k$ που τα περιέχει:

$$\mathbf{V}^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{p}_k, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}.\}$$

Για $k = n$ παίρνουμε τον μοναδικό n-διάστατο υπόχωρο $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 7.2.1. *Αν $\mathbf{V}^k$ είναι k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $k < n$, τότε για κάθε βάση $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_k$ του $\mathbf{V}^k$ υπάρχουν $\mathbf{p}_{k+1}, ..., \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}, ..., \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 7.2.2. *Έστω ότι $\mathbf{V}^k$ είναι ένας k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_k\}$ είναι μια βάση του V^k, $k = 1, ..., n$. Η απεικόνιση $f : \mathbf{V}^k \to \mathbb{R}^k$ που ορίζεται από τον τύπο*

$$f(x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + ... + x_k \mathbf{p}_k) = (x_1, ..., x_k)$$

είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω ότι $k < n$. Επειδή $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_k\}$ είναι μια βάση του V^k, για κάθε $\mathbf{x} \in V^k$ υπάρχει μοναδική συλλογή αριθμών $(x_1, x_2, ..., x_k)$ τέτοια ώστε $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + ... + x_k \mathbf{p}_k$. Άρα η f είναι ένα-προς-ένα και $f(\mathbf{V}^k) = \mathbb{R}^k$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Επειδή τα στοιχεία $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, υπάρχουν $\mathbf{p}_{k+1}, ..., \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}, ..., \mathbf{p}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Οπότε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ γράφεται

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + ... + x_k \mathbf{p}_k + x_{k+1} \mathbf{p}_{k+1} + ... + x_n \mathbf{p}_n.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + ... + x_k \mathbf{p}_k + x_{k+1} \mathbf{p}_{k+1} + ... + x_n \mathbf{p}_n) = (x_1, x_2, ..., x_k)$$

Αποδεικνύεται αύκολα ότι η F είναι γραμμική. Άρα, από το Θεώρημα 7.3.1, η F είναι συνεχής.

Ο περιορισμός $F|\mathbf{V}^k$ της F στον υπόχωρο $\mathbf{V}^k$ είναι η f. Πράγματι, αν $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^k$, τότε

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + ... + x_k \mathbf{p}_k + 0 \cdot \mathbf{p}_{k+1} + ... + 0 \cdot \mathbf{p}_n.$$

Επομένως $F(\mathbf{x}) = (x_1, ..., x_k) = f(\mathbf{x})$. Άρα, η f είναι συνεχής.

Η απεικόνιση $f^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbf{V}^k \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται από τον τύπο

$$f^{-1}(x_1, ..., x_k) = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + ... + x_k \mathbf{p}_k.$$

Παρατηρούμε ότι η f^{-1} είναι γραμμική, άρα είναι συνεχής.

Για $k = n$ όμοια αποδεικνύεται ότι η f είναι ομοιομορφισμός. $\square$

7.3 k-διάστατα επίπεδα του $\mathbb{R}^n$.

Τα k-διάστατα επίπεδα (ή απλά k-επίπεδα) του $\mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, ..., n$, είναι τα σύνολα

$$\mathbf{\Pi}^k = \mathbf{V}^k + \mathbf{v}_0 = \{\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 : \ \mathbf{v} \in \mathbf{V}^k\},$$

όπου $\mathbf{V}^k$ είναι ένας k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Τα 0-επίπεδα του $\mathbb{R}^n$ είναι τα μονοσύνολα $\{\mathbf{v}\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα 1-επίπεδα του $\mathbb{R}^n$ καλούνται ευθείες. Ο $\mathbb{R}^n$ είναι το μοναδικό n-επίπεδο του $\mathbb{R}^n$.

Ένα k-επίπεδο $\mathbf{\Pi}^k$ είναι k-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν $\mathbf{0}_n \in \mathbf{\Pi}^k$.

Θεώρημα 7.3.1. *Για κάθε k-επίπεδο $\mathbf{\Pi}^k = \mathbf{V}^k + \mathbf{v}_0$ του $\mathbb{R}^n$, η απεικόνιση $i : \mathbf{\Pi}^k \to \mathbf{V}^k$ που ορίζεται από τον τύπο $h(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}$ είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{\Pi}^k$, τότε $\mathbf{x} = \mathbf{v_x} + \mathbf{v}_0$ και $\mathbf{y} = \mathbf{v_y} + \mathbf{v}_0$, όπου $\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y} \in \mathbf{V}^k$. Τότε $i(\mathbf{x}) = \mathbf{v_x}$ και $i(\mathbf{y}) = \mathbf{v_y}$, επομένως

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_n = |(\mathbf{v_x} + \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v_y} + \mathbf{v}_0)|_n = |\mathbf{v_x} - \mathbf{v_y}|_n = |i(\mathbf{x}) - i(\mathbf{y})|_n.$$

Άρα η h είναι ισομετρία. □

Από τα Θεωρήματα 7.3.1 και 7.2.2 προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 7.3.2. *Αν $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \le n$, είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε για κάθε k-επίπεδο*

$$\Pi^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{p}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{p}_k, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

του $\mathbb{R}^n$, η απεικόνιση $h : \Pi^k \to \mathbb{R}^k$ που ορίζεται από τον τύπο

$$h(\mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{p}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{p}_k) = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$$

είναι ομοιομορφισμός.

Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος σημείων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζουν ένα k-διάστατο επίπεδο;

Αν $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι $k+1$ σημεία τέτοια ώστε το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε ο k-διάστατος υπόχωρος

$$\mathbf{V}^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) + ... + \lambda_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0), \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

είναι το k-επίπεδο διερχόμενο από τα $k+1$ σημεία

$$\mathbf{0}_n, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0.$$

Το k-επίπεδο

$$\mathbf{\Pi}^k = \mathbf{V}^k + \mathbf{v}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v_0}), \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

περιέχει τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$. Αποδεικνύεται επιπλέον ότι το $\mathbf{\Pi}^k$ είναι μοναδικό, δηλαδή ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 7.3.3. *Αν $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ και το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε υπάρχει μοναδικό k-επίπεδο $\mathbf{\Pi}^k$ που περιέχει τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$.*

Θεώρημα 7.3.4. *Οποιοδήποτε k-επίπεδο $\mathbf{\Pi}^k$ του $\mathbb{R}^n$ περιέχει $k+1$ σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. $\mathbf{\Pi}^k = \mathbf{V}^k + \mathbf{v}_0$, όπου $\mathbf{V}^k$ είναι k-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $\{\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_k\}$ μια βάση του $\mathbf{V}^k$. Προφανώς $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0 + \mathbf{p}_k \in \mathbf{\Pi}^k$ και $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

□

Παρατήρηση 7.3.5. Οποιαδήποτε $k+1$ σημεία του $\mathbb{R}^n$ $(k = 0, 1..., n)$:

$$\mathbf{v}_0 = (v_1^0, v_2^0, ..., v_n^0),\ \mathbf{v}_1 = (v_1^1, v_2^1, ..., v_n^1),\ \ldots,\ \mathbf{v}_k = (v_1^k, v_2^k, ..., v_n^k)$$

τέτοια ώστε τα k σημεία $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ορίζουν ένα k-επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = v_1^0 + \lambda_1(v_1^1 - v_1^0) + ... + \lambda_k(v_1^k - v_1^0) \\ x_2 = v_2^0 + \lambda_1(v_2^1 - v_2^0) + ... + \lambda_k(v_2^k - v_2^0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = v_n^0 + \lambda_1(v_n^1 - v_n^0) + ... + \lambda_k(v_n^k - v_n^0) \end{array}\right\},\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Για $k = n-1$ οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ένα $(n-1)$-επίπεδο Π^{n-1}.

Προφανώς $\mathbf{x} = (x_1, x_2..., x_n) \in \Pi^{n-1}$ αν και μόνον αν $\mathbf{x} - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ισοδύναμα

$$\left|\begin{array}{cccc} x_1 - v_1^0 & x_2 - v_2^0 & \ldots & x_n - v_n^0 \\ v_1^1 - v_1^0 & v_2^1 - v_2^0 & \ldots & v_n^1 - v_n^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{n-1} - v_1^0 & v_2^{n-1} - v_2^0 & \ldots & v_n^{n-1} - v_n^0 \end{array}\right| = 0.$$

Άρα κάθε $(n-1)$-επίπεδο Π^{n-1} του $\mathbb{R}^n$ έχει εξίσωση της μορφής

$$a_n x_n + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

όπου $|a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| \neq 0$.

7.4 Σύνολα σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 7.4.1. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$ όταν για κάθε $k < n$ κάθε k-επίπεδο του $\mathbb{R}^n$ περιέχει το πολύ $k+1$ σημεία του S (ισοδύναμα, οποιαδήποτε $k+2$ σημεία του S δεν περιέχονται σε κανένα k-διάστατο επίπεδο).

Παραδείγματα 7.4.2.

1. Δύο σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι σε γενική θέση αν και μόνον αν $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}_1$.

   Στο $\mathbb{R}$ δύο σημεία είναι σε γενική θέση αν $\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1} \neq \overrightarrow{0}$.

2. Τρία σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ είναι σε γενική θέση αν και μόνον αν τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ δεν ανήκουν σε καμία ευθεία (1-επίπεδο) του $\mathbb{R}^n$.

   Στο $\mathbb{R}^2$ τρία σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι σε γενική θέση αν και μόνον αν $\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1} \nparallel \overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2}$.

3. Στο $\mathbb{R}^3$ τέσσερα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι σε γενική θέση στο αν και μόνον αν δεν περιέχονται σε κανένα επίπεδο, δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2}$ και $\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_3}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ορισμός 7.4.3. Το σύνολο $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \geq 1$, καλείται *γεωμετρικώς ανεξάρτητο* όταν τα σημεία $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θεώρημα 7.4.4. *Αν $k = 1, ..., n$, τότε για τα σημεία $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$.

(ii) Το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ είναι είναι γεωμετρικώς ανεξάρτητο.

(iii) Για οποιαδήποτε συλλογή πραγματικών αριθμων $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_k$ τέτοια, ώστε

$$\lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}_n \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$$

ισχύει $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι το σύνολο $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$, είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Επειδή τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ είναι σε γενική θέση, είναι διαφορετικά ανά δύο. Επομένως $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}_n$. Άρα, $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Έστω r είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $1, ..., k$ για τον οποίο το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Από την υπόθεση $r < k$. Το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0\}$ είναι βάση του r-διάστατου υποχώρου

$$\mathbf{V}^r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_r(\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0), \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Από τον ορισμό του r έπεται ότι το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Άρα, $\mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0$

και, συνεπώς, $\mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}^r$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $r < n$ και τα $r+2$ σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}$ ανήκουν στο r-επίπεδο $\mathbf{V}^r + \mathbf{v}_0$. Άρα, το σύνολο $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ δεν είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, που είναι άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω ότι το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα το σύνολο $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ δεν είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $r < n$ και ένα r-επίπεδο $\mathbf{V}^r + \mathbf{p}$ που περιέχει τα $r+2$ από τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1} \in \mathbf{V}^r + \mathbf{p}$. Οπότε

$$\{\mathbf{v}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{p}, ..., \mathbf{v}_r - \mathbf{p}, \mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{p}\} \subseteq \mathbf{V}^r,$$

άρα $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_0\} \subseteq \mathbf{V}^r$. Επειδή το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_0\}$ αποτελείται απο $r+1$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία, η διάσταση του $\mathbf{V}^r$ είναι $\geq r+1$, που είναι άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω ότι το σύνολο $\{\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}, ..., \mathbf{v_k} - \mathbf{v_0}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Ας υποθέσουμε ότι

$$\lambda_0 \mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{v_k} = \mathbf{0}_n \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0.$$

Τότε $(-\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_k)\mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{v_k} = \mathbf{0}_n$.

Συνεπώς $\lambda_1(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{v_k} - \mathbf{v_0}) = \mathbf{0}_n$. Ομως το σύνολο $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Οπότε και $\lambda_0 = -\lambda_1 - ... - \lambda_k = 0$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ έχουν την ιδιότητα (iii). Έστω

$$\lambda_1(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{v_k} - \mathbf{v_0}) = \mathbf{0}_n.$$

Τότε $(-\lambda_1 - \cdots - \lambda_k)\mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{v_k} = \mathbf{0}_n$. Για $\lambda_0 = -\lambda_1 - \cdots - \lambda_k$, παίρνουμε

$$\lambda_0 \mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{v_k} = \mathbf{0}_n \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Άρα, το $\{\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}, ..., \mathbf{v_k} - \mathbf{v_0}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

□

Εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 7.4.5. *Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$, $k = 1, ..., n$, του $\mathbb{R}^n$ είναι γεωμετρικώς ανεξάρτητο.*

Πρόταση 7.4.6. *Κάθε υποσύνολο ενός γεωμετρικώς ανεξάρτητου συνόλου $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$, $k = 1, ..., n$, του $\mathbb{R}^n$ είναι γεωμετρικώς ανεξάρτητο.*

Θεώρημα 7.4.7. *Αν το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$, είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, τότε η εξίσωση*

$$\mathbf{x} = \mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v_0}),\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

ορίζει ένα k-επίπεδο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει τα σημεία $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$.

Απόδειξη. Αν το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$, είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, τότε το σύνολο $\{\mathbf{v_1} - \mathbf{v_0}, \mathbf{v_2} - \mathbf{v_0}, ..., \mathbf{v_k} - \mathbf{v_0}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα, η εξίσωση (7.2) ορίζει ένα k-επίπεδο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει τα σημεία $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$. □

7.5 Βαρυκεντρικές συντεταγμένες σημείων του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 7.5.1. *Ένα σημείο* $\mathbf{x}$ *ανήκει στο* k*-επίπεδο που ορίζουν τα σημεία* $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$, $1 \leq k \leq n$, *που είναι σε γενική θέση στο* $\mathbb{R}^n$ *αν και μόνον αν*

$$\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1, \tag{7.3}$$

όπου οι αριθμοί $\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_k$ *είναι μονοσήμαντα ορισμένοι.*

Απόδειξη. Τα σημεία $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$ ορίζουν ένα k-επίπεδο Π^k με εξίσωση (7.2), η οποία γράφεται

$$\mathbf{x} = (1 - \lambda_1 - ... - \lambda_k)\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

Θέτοντας $1 - \lambda_1 - ... - \lambda_k = \lambda_0$ στην (7.4), παίρνουμε τις σχέσεις (7.3).

Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{x} \in \Pi^k$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k\mathbf{v_k} \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 \text{ και} \\ \mathbf{x} &= \lambda_0'\mathbf{v_0} + \lambda_1'\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k'\mathbf{v_k} \text{ και } \lambda_0' + \lambda_1' + \cdots + \lambda_k' = 1. \end{aligned}$$

Τότε

$$(\lambda_0 - \lambda_0')\mathbf{v_0} + (\lambda_1 - \lambda_1')\mathbf{v_1} + \cdots + (\lambda_k - \lambda_k')\mathbf{v_k} = \mathbf{0}_n \text{ και}$$

$$(\lambda_0 - \lambda_0') + (\lambda_1 - \lambda_1') + \cdots + (\lambda_k - \lambda_k') = 1 - 1 = 0$$

Επειδή το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, από το Θεώρημα 7.4.4 προκύπτει ότι $\lambda_0 - \lambda_0' = \lambda_1 - \lambda_1' = \cdots = \lambda_k - \lambda_k' = 0$ Άρα,

$$\lambda_0 = \lambda_0', \ \lambda_1 = \lambda_1', \ \dots, \ \lambda_k = \lambda_k'.$$

□

Ορισμός 7.5.2. Έστω ότι Π^k, $k = 1, ..., n$, είναι το k-επίπεδο που ορίζεται από το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$, που είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$.

Το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ καιλείται *βαρυκεντρικό σύστημα συντεταγμένων* του Π^k.

Για κάθε $\mathbf{x} \in \Pi^k$ οι μονοσήμαντα ορισμένοι αριθμοί $\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_k$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις (7.3) καλούνται *βαρυκεντρικές συντεταγμένες του* $\mathbf{x}$ ως προς το βαρυκεντρικό σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ του Π^k.

Έστω $\lambda_i : \Pi^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$ η απεικόνιση η οποία σε κάθε $\mathbf{x} \in \Pi^k$ αντιστοιχεί την i-οστή βαρυκεντρική συντεταγμένη του $\mathbf{x}$ ως προς το $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$. Τότε οι σχέσεις (7.3) γράφονται

$$\mathbf{x} = \lambda_0(\mathbf{x})\mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{x})\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k(\mathbf{x})\mathbf{v_k} \ \text{ και } \ \lambda_0(\mathbf{x}) + \lambda_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{x}) = 1$$

Πόρισμα 7.5.3. *Αν* $\mathbf{\Pi}^k$ *είναι ένα* k*-επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία* $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$, *τα οποία είναι σε γενική θέση στο* $\mathbb{R}^n$, *τότε για κάθε συλλογή* $k+1$ *αριθμών* $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k)$ *τέτοια ώστε* $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$ *υπάρχει σημείο του* $\mathbf{\Pi}^k$ *με βαρυκεντρικές συντεταγμένες* $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k)$ *ως προς* $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$.

Απόδειξη. $\mathbf{\Pi}^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v_0}), \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$.

Από το Πόρισμα 7.3.2 η απεικόνιση $f : \mathbf{\Pi}^k \to \mathbb{R}^k$ με

$$f(\mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v_0})) = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$$

είναι ομοιομορφισμός. Άρα, η f είναι επί.

Για κάθε συλλογή $k+1$ αριθμών $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k)$ τέτοια ώστε $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$, υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x} \in \mathbf{\Pi}^k$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{x}) = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ και $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 - \lambda_0$. Άρα, υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x} \in \mathbf{\Pi}^k$ για το οποίο $\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k$ και $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$. □

Θεώρημα 7.5.4. *Αν $\mathbf{\Pi}^k$, $k = 1, ..., n$, ένα k-επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$, τα οποιά είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $i = 0, 1, ..., k$ η απεικόνιση $\lambda_i : \Pi^k \to \mathbb{R}$, η οποία σε κάθε $\mathbf{x} \in \Pi^k$ αντιστοιχεί την i-οστή βαρυκεντρική συντεταγμένη του $\mathbf{x}$ ως προς το $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ είναι ανοικτή και επί του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x} \in \mathbf{\Pi}^k$, τότε

$$\mathbf{x} = \lambda_0(\mathbf{x})\mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{x})\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k(\mathbf{x})\mathbf{v_k} \;\; \text{και} \;\; \lambda_0(\mathbf{x}) + \lambda_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{x}) = 1$$

Επομένως

$$\mathbf{x} = \mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_k(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k - \mathbf{v_0}), \text{ όπου } \lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_k(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}.$$

Από το Πόρισμα 7.3.2 η απεικόνιση $f : \mathbf{\Pi}^k \to \mathbb{R}^k$ με

$$f(\mathbf{v_0} + \lambda_1(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_0}) + ... + \lambda_k(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k - \mathbf{v_0})) = (\lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_k(\mathbf{x}))$$

είναι ομοιομορφισμός. Άρα, η f είναι ανοικτή και επί.

Η προβολή $p_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$, που ορίζονται από την σχέση $p_i((\lambda_1, ..., \lambda_k)) = \lambda_i$. είναι ανοικτή και επί. Άρα, η $\lambda_i(\mathbf{x}) = p_i(f(\mathbf{x}))$ είναι ανοικτή και επί του $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι η λ_0 είναι ανοικτή και επί του $\mathbb{R}$, θέτουμε

$\lambda_0' = \lambda_k$, $\lambda_1' = \lambda_0$, ...,$\lambda_k' = \lambda_{k-1}$ και $\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_0$, ...,$\mathbf{v}_k' = \mathbf{v}_{k-1}$.

Τότε

$$\mathbf{\Pi}^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{v}_0' + \lambda_1'(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_0') + ... + \lambda_k'(\mathbf{v}_k' - \mathbf{v}_0')\}.$$

Άρα, όπως αποδείξαμε ποιο πάνω, $\lambda_0 = \lambda_1'$ είναι ανοικτή και επί του $\mathbb{R}$. □

Πόρισμα 7.5.5. *Αν το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, τότε*

1. *Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδική συλλογη αριθμών $\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_n$ τέτοια ώστε*

$$\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v_n} \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1. \tag{7.5}$$

   Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ ως προς $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$ είναι οι αριθμοί $\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_n$ που ικανοποιούν τις σχέσεις (7.5).

2. *Για κάθε συλλογή αριθμών $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ τέτοια ώστε $\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ υπάρχει σημείο του $\mathbb{R}^n$ με βαρυκεντρικές συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ ως προς $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$.*

3. *Για κάθε $i = 0, 1, ..., n$ η απεικόνιση $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, η οποία σε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί την i-οστή βαρυκεντρική συντεταγμένη του $\mathbf{x}$ ως προς το $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$ είναι ανοικτή και επί του $\mathbb{R}$.*

7.6 Ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$ ως προς $(n-1)$-επίπεδο.

Θεώρημα 7.6.1. *Αν Π είναι ένα $(n-1)$-επίπεδο του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα Υ_1, Υ_2 και κλειστά υποσύνολα H_1, H_2 του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*
(i) $\mathbb{R}^n \setminus \Pi = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2$, $H_1 = \Upsilon_1 \cup \Pi$ *και* $H_2 = \Upsilon_2 \cup \Pi$
(ii) $\Upsilon_1 \cap \Upsilon_2 = \emptyset$
(iii) $\mathrm{Int}(H_1) = \Upsilon_1$ *και* $\mathrm{Int}(H_2) = \Upsilon_2$
(iv) $\mathrm{Cl}(\Upsilon_1) = H_1$ *και* $\mathrm{Cl}(\Upsilon_2) = H_2$
(v) $\mathrm{Bd}(\Upsilon_1) = \mathrm{Bd}(\Upsilon_2) = \mathrm{Bd}(H_1) = \mathrm{Bd}(H_2) = \Pi$

Απόδειξη. Έστω Π ένα $(n-1)$-επίπεδο που περιέχει τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$, τα οποιά είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Τότε

$$\mathbf{\Pi} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_{n-1}\mathbf{v}_{n-1},\ \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_{n-1} = 1\}$$

Υπάρχει $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$ να είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Οπότε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ γράφεται

$$\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{v}_0 + ... + \lambda_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n,\ \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_{n-1} + \lambda_n = 1.$$

Προφανώς $\Pi = \lambda_n^{-1}(0)$. Τα σύνολα

$$H_1 = \lambda_n^{-1}((-\infty, 0]), H_2 = \lambda_n^{-1}([0, \infty)),$$
$$\Upsilon_1 = \lambda_n^{-1}((-\infty, 0)), \Upsilon_2 = \lambda_n^{-1}((0, \infty))$$

έχουν τις ιδιότητες (i) και (ii).

Από το Θεώρημα 7.5.2 η απεικόνιση $\lambda_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Συνεπώς τα σύνολα H_1, H_2 είναι κλειστά και τα σύνολα Υ_1, Υ_2 είναι ανοικτά. Επειδή η λ_n είναι και ανοικτή, έχουμε

$$\mathrm{Int}(H_1) = \mathrm{Int}(\lambda_n^{-1}(-\infty, 0]) = \lambda_n^{-1}(\mathrm{Int}(-\infty, 0]) = \lambda_n^{-1}((-\infty, 0)) = \Upsilon_1$$
$$\mathrm{Cl}(\Upsilon_1) = \mathrm{Cl}(\lambda_n^{-1}((-\infty, 0))) = \lambda_n^{-1}(\mathrm{Cl}((-\infty, 0))) = \lambda_n^{-1}((-\infty, 0]) = H_1$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathrm{Int}(H_2) = \Upsilon_2$ και $\mathrm{Cl}(\Upsilon_2) = H_2$.

Από τα παραπάνω

$$\mathrm{Bd}(\Upsilon_1) = \mathrm{Cl}(\Upsilon_1) \setminus \Upsilon_1 = H_1 \setminus \Upsilon_1 = \Pi$$
$$\mathrm{Bd}(\Upsilon_2) = \mathrm{Cl}(\Upsilon_2) \setminus \Upsilon_2 = H_2 \setminus \Upsilon_2 = \Pi$$
$$\mathrm{Bd}(H_1) = H_1 \setminus \mathrm{Int}(H_1) = H_1 \setminus \Upsilon_1 = \Pi$$
$$\mathrm{Bd}(H_2) = H_2 \setminus \mathrm{Int}(H_2) = H_2 \setminus \Upsilon_2 = \Pi$$

□

Ορισμός 7.6.2. Εστω ότι $\lambda_0(\mathbf{x}), \lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_n(\mathbf{x})$ είναι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ως προς το σύνολο $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ που είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$ και έστω ότι

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) = 0\}$$

είναι το $(n-1)$-διάστατο επίπεδο που περιέχει τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$.

Τα σύνολα

$$\Upsilon_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) > 0\}$$
$$\Upsilon_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) < 0\}$$

καλούνται *n-διάστατοι ανοικτοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$ ως προς το επίπεδο* Π και τα σύνολα

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) \geq 0\}$$
$$H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) \leq 0\}$$

καλούνται *n-διάστατοι κλειστοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$ ως προς το επίπεδο* Π.

Σημείωση 7.6.3. Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός των ημιχώρων ως προς ένα $(n-1)$-επίπεδο Π του $\mathbb{R}^n$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των γεωμετρικώς ανεξάρτητων σημείων $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1} \in \Pi$ και του σημείου $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi$.

Σημείωση 7.6.4. Κάθε $(n-1)$-διάστατο επίπεδο Π του $\mathbb{R}^n$ έχει εξίσωση

$$a_n x_n + ... + a_1 x_1 + a_0 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x_1, ..., x_n) = a_n x_n + a_{n-1} + ... + a_1 x_1 + a_0.$$

Αποδεικνύεται ότι τα κλειστά σύνολα

$$H^+ = f^{-1}([0, \infty)) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_n x_n + .. + a_1 x_1 + a_0 \geq 0\},$$
$$H^- = f^{-1}((-\infty, 0]) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_n x_n + ... + a_1 x_1 + a_0 \leq 0\},$$

είναι οι n-διάστατοι κλειστοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$ ως προς το επίπεδο Π. Ένω τα ανοικτά σύνολα

$$\Upsilon^+ = f^{-1}((0, \infty)) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_n x_n + ... + a_1 x_1 + a_0 > 0\},$$
$$\Upsilon^- = f^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_n x_n + ... + a_1 x_1 + a_0 < 0\},$$

είναι οι n-διάστατοι ανοικτοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$ ως προς το επίπεδο Π.

Κεφάλαιο 8

Κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

8.1 Ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ και $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^n$.

Ευθεία του $\mathbb{R}^n$ διερχόμενη από τα σημεία $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $\mathbf{x} = \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p})t$, όπου $t \in \mathbb{R}$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας διερχόμενης από τα σημεία $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + (q_1 - p_1)t \\ x_2 = p_2 + (q_2 - p_2)t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = p_n + (q_n - p_n)t \end{array}\right\}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Στο $t = 0$ αντιστοιχεί το $\mathbf{p}$ και στο $t = 1$ αντιστοιχεί το $\mathbf{q}$.

Το σύνολο όλων των σημείων της παραπάνω ευθείας που αντιστοιχούν στα $t \in [0, 1]$ καλείται *ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$* και συμβολίζεται με $\mathbf{pq}$. Δηλαδή

$$\mathbf{pq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \ \mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}), t \in [0, 1]\}$$

Ημιευθεία του $\mathbb{R}^n$ με αρχή το $\mathbf{p}$ διερχόμενη από το $\mathbf{q}$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $\mathbf{x} = \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p})t$, όπου $t \in \mathbb{R}$ και $t \geq 0$.

Πρόταση 8.1.1. *Κάθε ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{pq}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικό με το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ της ευθείας πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η απεικόνιση $h : [0, 1] \to \mathbf{pq}$ που ορίζεται από την σχέση $h(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ είναι ομοιομορφισμός. □

Η εξίσωση της ευθείας διερχόμενης από τα σημεία $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ μπορεί να γραφεί σε μορφή

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας $\lambda_1 = 1 - t$ και $\lambda_2 = t$ παίρνουμε

$$\mathbf{pq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \ \mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{p} + \lambda_2\mathbf{q}, \ \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_2 \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

8.2 Η έννοια του κυρτού συνόλου.

Ορισμός 8.2.1. Ένα υποσύνολο $\mathbf{K}$ του $\mathbb{R}^n$ καλείται *κυρτό* όταν το $\mathbf{K}$ μαζί με οποιαδήποτε δύο σημεία του περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει. Δηλάδή

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{K} \Longrightarrow \mathbf{pq} \subseteq \mathbf{K}.$$

Παραδείγματα 8.2.2.

1. Το $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό σύνολο.

2. Κάθε μονοσύνολο $\{\mathbf{x}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό σύνολο.

3. Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ οι μπάλες $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ και $B[\mathbf{x}, \varepsilon]$ είναι κυρτά συνολα. Πράγματι, έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ και $\mathbf{c} \in \mathbf{ab}$. Τότε $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Άρα

$$\begin{aligned} |\mathbf{c} - \mathbf{x}|_n = |\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} - \mathbf{x}|_n &= |\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} - \lambda_1\mathbf{x} - \lambda_2\mathbf{x}|_n = \\ &= |\lambda_1(\mathbf{a} - \mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{b} - \mathbf{x})|_n \leq \lambda_1|\mathbf{a} - \mathbf{x}|_n + \lambda_2|\mathbf{b} - \mathbf{x}|_n < \\ &< \varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2) = \varepsilon \Longrightarrow \mathbf{c} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \end{aligned}$$

   Συνεπώς $\mathbf{ab} \subseteq B(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Άρα, $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο. Όμοια αποδεικνύεται ότι $B[\mathbf{x}, \varepsilon]$ είναι κυρτό σύνολο.

4. Κυρτά υποσύνολα του επιπέδου είναι: η ευθεία $y = ax + b$, το τετράγωνο

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

   ο κύκλος $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ το εσωτερικό ενός κύκλου

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

   Μη κυρτά υποσύνολα του επιπέδου είναι : η περιφέρεια του κύκλου

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

   η έλλειψη, η υπερβολή, η παραβολή, αφού καμμία από τις καμπύλες αυτές δεν πριέχει κανένα ευθύγραμμο τμήμα.

5. Κάθε k-επίπεδο είναι κυρτό.

   Πράγματι, έστω ότι

$$\mathbf{p} = \lambda_o\mathbf{v}_0 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k \in \Pi^k, \ \lambda_0 + ... + \lambda_k = 1$$

$$\mathbf{q} = \mu_o\mathbf{v}_0 + ... + \mu_k\mathbf{v}_k \in \Pi^k, \ \mu_0 + ... + \mu_k = 1$$

   Αν $\mathbf{x} \in \mathbf{pq}$, τότε

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \ t \in [0, 1] \Longrightarrow \mathbf{x} = [(1 - t)\lambda_0 + t\mu_0]\mathbf{v}_0 + ... + [(1 - t)\lambda_k + t\mu_k]\mathbf{v}_k$$

   όπου

   $[(1 - t)\lambda_0 + t\mu_0] + ... + [(1 - t)\lambda_k + t\mu_k] = (1 - t)(\lambda_0 + ... + \lambda_k) + t(\mu_0 + ... + \mu_k) = 1.$

   Άρα, $\mathbf{x} \in \Pi^k$.

Ορισμός 8.2.3. Το σύνολο

$$I^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., n\}, \ n \geq 1,$$

καλείται *n-διάστατος μοναδιαίος κύβος ή μοναδιαίος n-κύβος*.

Το σύνολο

$$B^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}|_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leq 1\}, \ n \geq 1,$$

καλείται *n-διάστατη μοναδιαία μπάλα ή μοναδιαία n-μπάλα*.

Το σύνολο

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}|_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = 1\}, \ n \geq 1,$$

καλείται *$(n-1)$-διάστατη μοναδιαία σφαίρα ή μοναδιαία $(n-1)$-σφαίρα*.

Θεώρημα 8.2.4. *Ο κύβος I^n και η μπάλα B^n είναι κυρτά σύνολα, ενώ η σφαίρα S^{n-1} δεν είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Στο Παράδειγμα 8.2.1(3) έχει αποδειχθεί ότι κάθε μπάλα είναι κυρτό σύνολο.

Θα δείξουμε ότι ο κύβος I^n είναι κυρτό σύνολο.

Έστω $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in I^n$ και $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{xy}$. Τότε $x_i, y_i \in [0, 1]$ για κάθε $i = 1, ..., n$ και $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, όπου $t \in [0, 1]$. Επομένως για κάθε $i = 1, ..., n$ έχουμε

$$z_i = tx_i + (1-t)y_i, \ x_i, y_i, t \in [0, 1],$$

Επομένως $z_i \in [0, 1]$, δηλαδή $\mathbf{z} \in I^n$. Συνεπώς $\mathbf{xy} \subseteq I^n$ και, άρα, I^n είναι κυρτό σύνολο.

Θα δείξουμε ότι η σφαίρα S^{n-1} δεν είναι κυρτό σύνολο.

Θεωρούμε τα σημεία

$$\mathbf{p} = (1, 0, ..., 0, 0), \mathbf{q} = (0, 0, ..., 0, 1), \mathbf{x} = (\frac{1}{2}, 0, ..., 0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^{n-1}$ και $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} \in \mathbf{pq}$. Όμως $|\mathbf{x}|_n = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, δηλαδή $\mathbf{x} \notin S^{n-1}$. Συνεπώς $\mathbf{pq} \subsetneq S^{n-1}$. Άρα, η σφαίρα S^{n-1} δεν είναι κυρτό σύνολο. ☐

Θεώρημα 8.2.5. *Κάθε κυρτό σύνολο είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{K}$ ένα κυρτό σύνολο. Τότε για οποιαδήποτε δύο σημεία $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{K}$ ισχύει $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{pq} \subseteq K$. Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{pq}$, ως ομοιομορφικό με το διάστημα $[0, 1]$, είναι συνεκτικό.

Επειδή οποιαδήποτε δύο σημεία του K περιέχονται σε ένα συνεκτικό υποσύνολό του, το σύνολο K είναι συνεκτικό. ☐

Θεώρημα 8.2.6. *Το περίβλημα κάθε κυρτού συνόλου είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbf{K}$ είναι ένα κυρτό σύνολο και $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathrm{Cl}(\mathbf{K})$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{pq} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{K})$ Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbf{pq} \setminus \mathrm{Cl}(\mathbf{K})$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cl}(K)$. Επίσης

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{p} + \lambda_2 \mathbf{q}, \text{ όπου } \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Από την άλλη μεριά υπάρχουν $\mathbf{p}_1 \in B(\mathbf{p}, \frac{\varepsilon}{3}) \cap \mathbf{K}$ και $\mathbf{q}_1 \in B(\mathbf{q}, \frac{\varepsilon}{3}) \cap \mathbf{K}$.
Επειδή $\mathbf{K}$ είναι κυρτό $\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{q}_1 \in \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \subseteq \mathbf{K}$.
Από τα παραπάνω

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|_n &= |\lambda_1(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) + \lambda_2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)|_n \leq \lambda_1 |(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|_n + \lambda_2 |(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)|_n < \\ &< \lambda_1 \frac{\varepsilon}{3} + \lambda_2 \frac{\varepsilon}{3} = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, $\mathbf{x}_1 \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cl}(\mathbf{K})$. Άρα, $\mathbf{x}_1 \notin \mathbf{K}$, που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 8.2.7. *Η τομή κάθε οικογένειας κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $\{\mathbf{K}_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια κυρτών συνόλων και $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i \neq \emptyset$ (το κενό σύνολο είναι κυρτό από τον ορισμό του κυρτού συνόλου).

Αν $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i = \{\mathbf{x}\}$, τότε $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i$ είναι κυρτό από τον ορισμό του κυρτού συνόλου.

Αν $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία, τότε, επειδή κάθε $\mathbf{K}_i$ είναι κυρτό σύνολο, έχουμε

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i \Longrightarrow \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{K}_i, \forall i \in I \Longrightarrow \mathbf{pq} \subseteq \mathbf{K}_i, \forall i \in I \Longrightarrow \mathbf{pq} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i.$$

Άρα, $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i$ είναι κυρτό σύνολο. □

Παρατήρηση 8.2.8. Υπάρχουν ακολουθίες κυρτών υποσυνόλων του επιπέδου, τέτοιες ώστε η τομή κάθε πεπερασμένης υπακολουθίας είναι μη κενή και όμως η τομή όλων των συνόλων είναι κενή. Ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας είναι η ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $\{(0, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Ισχύει όμως το παρακάτω γνωστό θεώρημα.

Θεώρημα του Helly. *Αν $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, ..., \mathbf{K}_m$, $m > n$, είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία ανα $n+1$ έχουν μη κενή τομή, τότε*

$$\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 \cap ... \cap \mathbf{K}_m \neq \emptyset.$$

8.3 Κυρτή θήκη συνόλου.

Για οποιαδήποτε $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{\mathbf{pq}}$ με άκρα $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Άρα, το σύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό. Συνεπώς κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ περιέχεται σε ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, το ίδιο το $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 8.3.1. Η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν ένα σύνολο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται *κυρτή θήκη* του V και συμβολίζεται με $H(V)$.

Παραδείγματα 8.3.2.

1. Η κυρτή θήκη του συνόλου $V = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{vw}$, δηλαδή $H(V) = H(\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}) = \mathbf{vw}$.

2. Αν τα σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ είναι μη συνευθειακά, τότε η κυρτή θήκη του συνόλου $V = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ είναι το τρίγωνο $\mathbf{xyz}$ (μαζί με το εσωτερικό του).

3. Η κυρτή θήκη μιας ευθείας ε ενός επιπέδου είναι η ευθεία ε.

4. Αν ε_1 και ε_2 είναι ευθείες ενός επιπέδου $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$, οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο, τότε
$$H(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2) = \cup\{AB : \ A \in \varepsilon_1, B \in \varepsilon_2\} = \Pi.$$

Πρόταση 8.3.3. *Αν το σύνολο V είναι κυρτό, τότε $H(V) = V$.*

Πρόταση 8.3.4. *Η κυρτή θήκη $H(V)$ οποιουδήποτε υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Αν $\{K_i\}_{i\in I}$ είναι η οικογένεια όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το V, τότε $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$. Άρα $H(V) = \bigcap_{i\in I} K_i$ είναι κυρτό σύνολο. □

Θεώρημα 8.3.5. *Η διάμετρος της κυρτής θήκης κάθε φραγμένου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ είναι ίση με τη διάμετρο του A.*

Απόδειξη. Επειδή $A \subseteq H(A)$, έχουμε $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(H(A))$.

Θα δείξουμε ότι $\operatorname{diam}(H(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$.

Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H(A)$. Θέτουμε $\delta = \operatorname{diam}(A)$.

Θεωρούμε ένα σημείο $\mathbf{a} \in A$. Επειδή $B[\mathbf{a}, \delta]$ είναι κυρτό και $A \subseteq B[\mathbf{a}, \delta]$, προκύπτει ότι $H(A) \subseteq B[\mathbf{a}, \delta]$. Επομένως $\mathbf{x} \in B[\mathbf{a}, \delta]$. Άρα $d_n(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq \delta$, οπότε $\mathbf{a} \in B[\mathbf{x}, \delta]$. Αφού η τελευταία σχέση ισχύει για τυχαίο $\mathbf{a} \in A$, παίρνουμε: $A \subseteq B[\mathbf{x}, \delta]$. Επειδή το σύνολο $B[\mathbf{x}, \delta]$ είναι κυρτό, $H(A) \subseteq B[\mathbf{x}, \delta]$. Επομένως $\mathbf{y} \in B[\mathbf{x}, \delta]$. Άρα $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \delta$. □

Ορισμός 8.3.6. Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Το σύνολο
$$K(B, \mathbf{v}) = \cup\{\mathbf{bv} : \ \mathbf{b} \in B\}$$
καλείται *κώνος με βάση B και κορυφή* $\mathbf{v}$.

Θεώρημα 8.3.7. *Αν $B \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό σύνολο και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, τότε*
$$H\left(B \cup \{\mathbf{v}\}\right) = K(B, \mathbf{v}).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του κώνου προκύπτει ότι το σύνολο $K(B, \mathbf{v})$ είναι υποσύνολο κάθε κυρτού συνόλου που περιέχει το σύνολο $B \cup \{\mathbf{v}\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο κώνος $K(B, \mathbf{v})$ είναι κυρτό σύνολο, δηλαδή ότι
$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K(B, \mathbf{v}) \Longrightarrow \mathbf{pq} \subseteq K(B, \mathbf{v}).$$

Αν $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in B$, τότε, επειδή το B είναι κυρτό, $\mathbf{pq} \subseteq B \subseteq K(B, \mathbf{v})$.

Αν $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in b\mathbf{v}$, όπου $\mathbf{b} \in B$, τότε $\mathbf{pq} \subseteq \mathbf{bv} \subseteq K(B, \mathbf{v})$.

Έστω ότι $\mathbf{p} \in \mathbf{b}_1\mathbf{v}$ και $\mathbf{q} \in \mathbf{b}_2\mathbf{v}$, όπου $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in B$, και έστω ότι $\mathbf{x} \in \mathbf{pq}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \kappa_1\mathbf{b}_1 + \kappa_2\mathbf{v},\ \kappa_1 + \kappa_2 = 1,\ \kappa_1 \geq 0,\ \kappa_2 \geq 0 \\ \mathbf{q} &= \lambda_1\mathbf{b}_2 + \lambda_2\mathbf{v},\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \\ \mathbf{x} &= \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q},\ \mu_1 + \mu_2 = 1,\ \mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mu_1(\kappa_1\mathbf{b}_1 + \kappa_2\mathbf{v}) + \mu_2(\lambda_1\mathbf{b}_2 + \lambda_2\mathbf{v}) = \\ &= (\mu_1\kappa_1\mathbf{b}_1 + \mu_2\lambda_1\mathbf{b}_2) + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\lambda_2)\mathbf{v} = \\ &= (\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1)\left(\frac{\mu_1\kappa_1}{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1}\ \mathbf{b}_1 + \frac{\mu_2\lambda_1}{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1}\mathbf{b}_2\right) + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\lambda_2)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Θέτοντας στην παραπάνω ισότητα

$$\frac{\mu_1\kappa_1}{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1}\ \mathbf{b}_1 + \frac{\mu_2\lambda_1}{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1}\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}, \tag{8.2}$$

παίρνουμε

$$\mathbf{x} = (\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1)\mathbf{b} + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\lambda_2)\mathbf{v} \tag{8.3}$$

Από την (8.2), επειδή $\dfrac{\mu_1\kappa_1}{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1} + \dfrac{\mu_2\lambda_1}{\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1} = 1$, έπεται ότι $\mathbf{b} \in \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$. Όμως τα σημεία $\mathbf{b}_1$ και $\mathbf{b}_2$ ανήκουν στο κυρτό σύνολο B. Επομένως $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \subseteq B$. Άρα, $\mathbf{b} \in B$. Από την (8.3), επειδή

$$\begin{aligned} (\mu_1\kappa_1 + \mu_2\lambda_1) + (\mu_1\kappa_2 + \mu_2\lambda_2) &= \mu_1(\kappa_1 + \kappa_2) + \mu_2(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= \mu_1 \cdot 1 + \mu_2 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

προκύπτει ότι $\mathbf{x} \in \mathbf{bv} \subseteq K(B, \mathbf{v})$. Άρα, $\mathbf{pq} \subseteq K(B, \mathbf{v})$.

□

8.4 Κύτταρα του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 8.4.1. *Κάθε $(n-1)$-επίπεδο Π του $\mathbb{R}^n$ και οι ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$ ως προς το Π είναι κυρτά σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω Π ένα $(n-1)$-επίπεδο που περιέχει τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$, τα οποία είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$ να είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Οπότε

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(\mathbf{x}) = 0\} \\ \Upsilon_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) > 0\},\ \Upsilon_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) < 0\} \\ H_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) \geq 0\},\ H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_n(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

Αν $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Pi$ και $\mathbf{x} \in \mathbf{pq}$, τότε

$$\lambda_n(\mathbf{p}) = 0, \lambda_n(\mathbf{q}) = 0 \text{ και } \mathbf{x} = \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q}, \text{ όπου } \mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

Οπότε $\lambda_n(\mathbf{x}) = \mu_1\lambda_n(\mathbf{p}) + \mu_2\lambda_n(\mathbf{q}) = 0$, δηλαδή $\mathbf{x} \in \Pi$. Συνεπώς $\mathbf{pq} \subseteq \Pi$. Άρα, Π είναι κυρτό σύνολο.

Όμοια αποδεικνύεται ότι οι ημίχωροι $\Upsilon_1, \Upsilon_2, H_1, H_2$ είναι κυρτά σύνολα. □

Ορισμός 8.4.2. Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ καλείται *n-διάστατο κύτταρο* ή n-κύτταρο αν και μόνον αν

(i) K είναι φραγμένο,

(ii) K είναι τομή πεπερασμένου πλήθους n-διάστατων κλειστών ημιχώρων,

(iii) $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n}(K) \neq \emptyset$.

Παραδείγματα 8.4.3.

1. Η τομή των κλειστών ημιχώρων (ημιεπιπέδων):

$$\begin{aligned} H_1^0 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}, \ H_1^1\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 1\} \\ H_2^0 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}, \ H_2^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

είναι το τετράγωνο

$$I^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ και } 0 \leq x_1 \leq 1\},$$

το οποίο είναι φραγμένο και έχει μη κενό εσωτερικό.

Άρα το τετράγωνο I^2 είναι 2-διάστατο κύτταρο.

2. Η τομή των κλειστών ημιχώρων:

$$\begin{aligned} H_1^0 &= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}, H_1^1\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 1\} \\ H_2^0 &= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 \geq 0\}, H_2^1 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 \leq 1\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ H_n^0 &= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}, H_n^1 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \leq 1\} \end{aligned}$$

είναι ο κύβος

$$I^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., n\},$$

ο οποίος είναι φραγμένος και έχει μη κενό εσωτερικό.

Άρα ο κύβος I^n είναι n-διάστατο κύτταρο.

Θεώρημα 8.4.4. *Κάθε n-κύτταρο K του $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό και συμπαγές.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του κυττάρου προκύπτει ότι το κύτταρο K είναι φραγμένο και $K = H_1 \cap \cdots \cap H_m$, όπου $H_1, ..., H_m$ είναι κλειστοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^n$. Επειδή τα σύνολα $H_1, ..., H_m$ είναι κυρτά και κλειστά στο $\mathbb{R}^n$, το K είναι κλειστό και κυρτό. Επειδή κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, το K είναι συμπαγές.

□

8.5 Κελιά του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 8.5.1. Κάθε σύνολο ομοιομορφικό με τη μοναδιαία n-μπάλα B^n, $n = 1, 2, ...$, καλείται *n-διάστατο κελί ή n-κελί.*

Λήμμα 8.5.1. *Έστω ότι K είναι κυρτό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$.*

Αν $\mathbf{p} \in \mathrm{Int}(K)$, τότε κάθε ημιευθεία E με αρχή το $\mathbf{p}$ τέμνει το σύνορο του K ακριβώς σε ένα σημείο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι $E \cap Bd(K) \neq \emptyset$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $Bd_E(E \cap K) \subseteq E \cap Bd(K)$ και ότι $Bd_E(E \cap K) \neq \emptyset$.

Πράγματι, από την Πρόταση 1.3.2, έπεται ότι

$$Bd_E(E \cap K) = E \cap Cl_{\mathbb{R}^n}(E \cap K) \cap Cl_{\mathbb{R}^n}(E \setminus K) \subseteq E \cap Cl(K) \cap Cl(\mathbb{R}^n \setminus K) = E \cap Bd(K).$$

Θα δείξουμε ότι $Bd_E(E \cap K) \neq \emptyset$.

Προφανώς $\mathbf{p} \in E \cap K$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{p}$ είναι το μοναδικό σημείο του συνόλου $E \cap K$. Τότε $E_1 = Int(K) \cap E = \{\mathbf{p}\}$ και $E_2 = E \setminus K$ είναι ξένα και ανοικτά υποσύνολα του υποχώρου E και $E = E_1 \cup E_2$. Δηλαδή, E είναι μη συνεκτικό σύνολο, που είναι άτοπο.

Επειδή το σύνολο E είναι κυρτό και κλειστό και το σύνολο K είναι κυρτό και συμπαγές, το $E \cap K$ είναι κυρτό και συμπαγές υποσύνολο της ημιευθείας E. Συνεπώς $E \cap K$ είναι κλειστό και συνεκτικό υποσύνολο της E, το οποίο περιέχει και άλλα σημεία εκτός από το $\mathbf{p}$. Άρα, $E \cap K$ είναι ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{pq}$, όπου $\mathbf{q} \in E \cap K$. Συνεπώς $Bd_E(E \cap K) = Bd_E(\mathbf{pq}) = \{\mathbf{q}\}$. Από τα παραπάνω $\mathbf{q} \in E \cap Bd(K)$.

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $\mathbf{q}$ δεν είναι μοναδικό σημείο τομής της ημιευθαίας E με το σύνορο του K. Τότε υπάρχει $\mathbf{s} \in E \cap Bd(K)$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{q}$. Επειδή το K είναι κλειστό και $\mathbf{p} \notin Bd(K)$, παίρνουμε $\mathbf{s} \in E \cap Cl(K) = E \cap K = \mathbf{pq}$ και $\mathbf{s} \neq \mathbf{p}$. Άρα, $\mathbf{s} = (1-r)\mathbf{p} + r\mathbf{q}$, όπου $r \in (0, 1)$. Επειδή $\mathbf{s} \in Cl(\mathbb{R}^n \setminus K)$, έπεται ότι $\mathbf{s} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}_n$, όπου $\{\mathbf{s}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$. Τότε για την ακολουθία

$$\mathbf{p}_n = \frac{1}{1-r}\mathbf{s}_n + \frac{-r}{1-r}\,\mathbf{q}$$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \frac{1}{1-r}\mathbf{s} + \frac{-r}{1-r}\,\mathbf{q} = \frac{1}{1-r}\left((1-r)\mathbf{p} + r\mathbf{q}\right) + \frac{-r}{1-r}\,\mathbf{q} = \mathbf{p}.$$

Επειδή $\mathbf{p} \in B(\mathbf{p}, \varepsilon) \subseteq K$, υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $\mathbf{p}_n \in K$ για κάθε $n > n_0$. Όμως

$$\mathbf{s}_n = (1-r)\mathbf{p}_n + r\mathbf{q}.$$

Επειδή το K είναι κυρτό, προκύπτει ότι $\mathbf{s}_n \in K$ για κάθε $n > n_0$, που είναι άτοπο.

□

Ορισμός 8.5.2. Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου X καλείται συνοριακό αν και μόνον αν $\mathrm{Int}(S) = \emptyset$ (το εσωτερικό του S ως προς το X είναι κενό).

Θεώρημα 8.5.3. *Κάθε κυρτό, συμπαγές και μη συνοριακό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικό με μια κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Επειδή το σύνολο K είναι μη συνοριακό, $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχει $\mathbf{c} \in K$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια, ώστε
$$B(\mathbf{c}, \varepsilon) \subseteq B[\mathbf{c}, \varepsilon] \subseteq \mathrm{Int}(K).$$
Το σύνολο $B[\mathbf{c}, \varepsilon]$ είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία n-μπάλα B^n.

Από το Λήμμα 8.5.1 κάθε ημιευθεία με αρχή το σημείο $\mathbf{c}$ τέμνει το σύνορο του K ακριβώς σε ένα σημείο. Έχουμε
$$K = \cup\{\mathbf{ck} : \ \mathbf{k} \in \mathrm{Bd}(K)\}.$$

Για κάθε $\mathbf{k} \in \mathrm{Bd}(K)$ συμβολίζουμε με $\mathbf{c_k}$ το μοναδικό σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος $\mathbf{ck}$ με το σύνορο $\mathrm{Bd}(B[\mathbf{c}, \varepsilon])$ του $B[\mathbf{c}, \varepsilon]$.

Ορίζουμε τον ομοιομορφισμό $h : K \to B[\mathbf{c}, \varepsilon]$ ως εξής:
$$h(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$$
$$h(\mathbf{k}) = \mathbf{c_k} \text{ αν } \mathbf{k} \in \mathrm{Bd}(K)$$

και αν $\mathbf{x} \in \mathbf{ck} \setminus \{\mathbf{c}, \mathbf{k}\}$, όπου $\mathbf{k} \in \mathrm{Bd}(K)$, τότε
$$\frac{d_n(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{d_n(\mathbf{x}, \mathbf{k})} = \frac{d_n(\mathbf{c}, h(\mathbf{x}))}{d_n(h(\mathbf{x}), \mathbf{c_k})}.$$
□

Πόρισμα 8.5.4. *Κάθε κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφική με τη μοναδιαία n-μπάλα B^n.*

Πόρισμα 8.5.5. *Κάθε n-κύτταρο του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία n-μπάλα B^n.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του κυττάρου και από το Θεώρημα 8.4.4 προκύπτει ότι κάθε n-διάστατο κύτταρο είναι κυρτό, συμπαγές και μη συνοριακό σύνολο. Από το Θεώρημα 8.5.3 και το Πόρισμα 8.5.4, κάθε n-διάστατο κύτταρο είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία n-μπάλα B^n. □

Πόρισμα 8.5.6. *Ο κύβος I^n είναι ομοιομορφικός με τη μοναδιαία n-μπάλα B^n.*

Πόρισμα 8.5.7. *Κάθε κυρτό, συμπαγές και μη συνοριακό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι n-κελί.*

Πόρισμα 8.5.8. *Κάθε n-κύτταρο είναι n-κελί.*

Πόρισμα 8.5.9. *Ο κύβος I^n είναι n-κελί.*

Επειδή $Bd(B^n) = S^{n-1}$ στο $\mathbb{R}^n$, το σύνορο κάθε n-διάστατου κελιού του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία $(n-1)$-σφαίρα S^{n-1}.

Σημείωση 8.5.10. Υπάρχουν n-κελιά του $\mathbb{R}^n$ που δεν είναι n-κύτταρα και n-κελιά που δεν είναι κυρτά.

Σημείωση 8.5.11. Επειδή κάθε n-διάστατος κλειστός ημίχωρος είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ένα $(n-1)$-διάστατο επίπεδο του $\mathbb{R}^n$, το σύνορο ενός n-διάστατου κυττάρου είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους συμπαγών και κυρτών $(n-1)$-διάστατων συνόλων—"εδρών" του κυττάρου.

Αν ένα κύτταρο K είναι τομή των m κλειστών ημιχώρων $H_1, ..., H_m$, τότε το πλήθος των $(n-1)$-διάστατων "εδρών" του K είναι m.

Τα n-μονόπλοκα που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο είναι τα n-διάστατα κύτταρα στο $\mathbb{R}^n$ με τις λιγότερες $(n-1)$-διάστατες "έδρες".

Κεφάλαιο 9

Μονόπλοκα του $\mathbb{R}^n$.

9.1 Η έννοια του μονοπλόκου.

Ορισμός 9.1.1. Για κάθε $n = 1, 2, ...$ και για κάθε $k = 0, 1, ..., n$, η κυρτή θήκη των $k+1$ σημείων $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$, τα οποία είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, καλείται *k-διάστατο μονόπλοκο* ή *k-μονόπλοκο* του $\mathbb{R}^n$ *με κορυφές* $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{v_0}\mathbf{v_1}...\mathbf{v_k}$.

Παραδείγματα 9.1.1.

1. Τα 0-διάστατα μονόπλοκα (0-μονοπλόκα) είναι τα μονοσύνολα $\{\mathbf{v_0}\}$.

2. Τα 1-διάστατα μονόπλοκα τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathbf{v_0}\mathbf{v_1}$.

3. Τα 2-διάστατα μονόπλοκα είναι τα τρίγωνα $\mathbf{v_0}\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}$.

4. Τα 3-διάστατα μονόπλοκα είναι τα τετράεδρα $\mathbf{v_0}\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}\mathbf{v_3}$.

Πρόταση 9.1.1. *Κάθε μονόπλοκο είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Επειδή η κυρτή θήκη οποιουδήποτε συνόλου είναι κυρτό σύνολο,

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k = H(\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\})$$

είναι κυρτό σύνολο. □

Πρόταση 9.1.2. *Κάθε μονόπλοκο είναι φραγμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Επειδή η διάμετρος της κυρτής θήκης κάθε φραγμένου συνόλου ισούται με τη διάμετρο του συνόλου (Θεώρημα 8.3.1), προκύπτει ότι

$$\mathrm{diam}(\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k) = \mathrm{diam}(H(\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\})) = \mathrm{diam}(\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}).$$

□

Πρόταση 9.1.3. *Για κάθε $k \geq 1$ ισχύει*

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k = \cup\{\mathbf{v}\mathbf{v}_k :\ \mathbf{v} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k-1}\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\sigma = \cup\{\mathbf{v}\mathbf{v}_k :\ \mathbf{v} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k-1}\}$. Τότε σ είναι ο κώνος με βάση το κυρτό σύνολο $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k-1}$ και κορυφή το $\mathbf{v}_k$. Από το Θεώρημα 8.3.2 προκύπτει ότι

$$\sigma = H\left(\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k-1} \cup \{\mathbf{v}_k\}\right).$$

Επειδή το σύνολο σ είναι κυρτό και $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\} \subseteq \sigma$, παίρνουμε

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k = H(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}) \subseteq \sigma$$

Θα δείξουμε ότι $\sigma \subseteq \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$.

Αν $\mathbf{x} \in \sigma$, τότε $\mathbf{x} \in \mathbf{v}\mathbf{v}_k$, όπου

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k-1} &= H(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}\}) \subseteq \\ &\subseteq H(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\}) = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Αφού $\mathbf{v}, \mathbf{v}_k \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ και το μονόπλοκο $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ είναι κυρτό, έπεται ότι $\mathbf{v}\mathbf{v}_k \subseteq \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ και, άρα, $\mathbf{x} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$.

□

Θεώρημα 9.1.1. *Αν το σύνολο $V = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$, $1 \leq k \leq n$, είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n :\ \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή ως προς k.

Αν $k = 1$, τότε $V = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\}$. Συνεπώς η κυρτή θήκη του V είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\mathbf{v}_0$ και $\mathbf{v}_1$. Οπότε

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 = \{\mathbf{v} :\ \mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}_0 + \lambda_1\mathbf{v}_1,\ \lambda_0 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$$

Ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $k = k_0 < n$ και ότι $V = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k_0}, \mathbf{v}_{k_0+1}\}$ είναι σε γενική θέση στο γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$. Τότε $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k_0}\}$ είναι σε γενική θέση, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε το μονόπλοκο $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0}$. Από την υπόθεση της επαγωγής

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0} = \{\mathbf{v} :\ \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{k_0} \lambda_i'\mathbf{v}_i,\ \lambda_i' \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k_0} \lambda_i' = 1\}.$$

Επειδή $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0}\mathbf{v}_{k_0+1} = \cup\{\mathbf{v}\mathbf{v}_{k_0+1} :\ \mathbf{v} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0}\}$, έχουμε

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0}\mathbf{v}_{k_0+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}_{k_0+1},\ \mathbf{v} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0},\ \lambda \in [0,1]\}$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0}\mathbf{v}_{k_0+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{k_0} \lambda_i'\mathbf{v}_i + \lambda\mathbf{v}_{k_0+1},\ \lambda \in [0,1],\ \lambda_i' \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k_0} \lambda_i' = 1\}$$

Θέτοντας $(1-\lambda)\lambda_i' = \lambda_i$ για κάθε $i = 1, ..., k_0$ και $\lambda = \lambda_{k_0+1}$ παίρνουμε

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_{k_0}\mathbf{v}_{k_0+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k_0+1} \lambda_i \mathbf{v}_i, \lambda_i \geq 0\}$$

Επειδή $\sum_{i=0}^{k_0} \lambda_i' = 1$ έχουμε

$$\sum_{i=0}^{k_0+1} \lambda_i = \sum_{i=0}^{k_0}(1-\lambda)\lambda_i' + \lambda = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{k_0}\lambda_i' + \lambda = (1-\lambda)\cdot 1 - \lambda = 1$$

Άρα, το θεώρημα ισχύει για $k = k_0 + 1$. □

Για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{v_0 v_1} \dots \mathbf{v_k}$ οι αριθμοί $\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_k$ για τους οποίους

$$\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k\mathbf{v_k} \text{ και } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

είναι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$.

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ συμβολίζονται επίσης με

$$\lambda_0(\mathbf{v}), \lambda_1(\mathbf{v}) \dots, \lambda_k(\mathbf{v}).$$

Πόρισμα 9.1.1. *Έστω $\mathbf{v_0v_1}...\mathbf{v_k}$, $0 \leq k \leq n$, ένα μονόπλοκο του $\mathbb{R}^n$.*

Για κάθε $i = 0, 1, ..., k$ η απεικόνιση

$$\lambda_i : \mathbf{v_0 v_1} \dots \mathbf{v_k} \to [0, 1],$$

η οποία σε κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{v_0v_1} \dots \mathbf{v_k}$ αντιστοιχεί την i-οστή βαρυκεντρική συντεταγμένη του $\mathbf{v}$ ως προς το $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ είναι συνεχής και επί του $[0, 1]$.

Απόδειξη. Η συνέχεια της λ_i προκύπτει από το Θεώρημα 7.5.4. Επειδή το μονόπλοκο ως κυρτό σύνολο είναι συνεκτικό, το υποσύνολο $\lambda_i(\mathbf{v_0v_1}...\mathbf{v_k})$ του $[0, 1]$ είναι συνεκτικό. Επομένως $\lambda_i(\mathbf{v_0v_1}...\mathbf{v_k})$ είτε είναι διάστημα είτε είναι σημείο.

Παρατηρούμε ότι $\lambda_i(\mathbf{v}_i) = 1$ και $\lambda_i(\mathbf{v}_j) = 0$ για $j \neq i$, δηλαδή $\{0, 1\} \subseteq \lambda_i(\mathbf{v_0v_1}...\mathbf{v_k})$. Άρα, $\lambda_i(\mathbf{v_0v_1}...\mathbf{v_k}) = [0, 1]$. □

9.2 Έδρες ενός μονοπλόκου.

Ορισμός 9.2.1. Θεωρούμε ένα k-μονόπλοκο $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ του $\mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, ..., n$.

Έστω $0 \leq r \leq k$ και $\{\mathbf{v}_{i_0}, \mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_r}\} \subseteq \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$.

Τότε τα σημεία $\mathbf{v}_{i_0}, \mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_r}$ είναι σε γενική θέση στο $\mathbb{R}^n$ και, συνεπώς, ορίζουν ένα r-μονόπλοκο $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$.

Το μονόπλοκο $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$ καλείται *r-διάστατη έδρα* του σ^k.

Οι 0-διάστατες έδρες του $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ είναι τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$.

Το ίδιο το σ^k είναι η μοναδική k-διάστατη έδρα του εαυτού του.

Οι έδρες του σ^k διάστασης $< k$ καλούνται *γνήσιες*.

Η ένωση όλων των γνήσιων εδρών του σ^k καλείται *σύνορο του* σ^k.

Πρόταση 9.2.1. *Κάθε μονόπλοκο περιέχει όλες τις έδρες του.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$ μία έδρα του μονόπλοκου $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$. Τότε

$$\{\mathbf{v}_{i_0}, \mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_r}\} \subseteq \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r} = H(\{\mathbf{v}_{i_0}, \mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_r}\}) \subseteq H(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}) = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k.$$

□

Θεώρημα 9.2.1. *Κάθε έδρα $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$ ενός μονοπλόκου $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k$ του σ^k για τα οποία $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \in \{0, 1, ..., k\} \setminus \{i_0, i_1, ..., i_r\}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbf{v}$ είναι ένα σημείο του $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ με βαρυκεντρικές συντεταγμένες $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$ ως προς το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$. Τότε

$$\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1, \text{ και } \lambda_i \geq 0 \text{ για κάθε } i = 0, 1, ..., k.$$

Αν $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \in \{0, 1, ..., k\} \setminus \{i_0, i_1, ..., i_r\}$, τότε

$$\mathbf{v} = \lambda_{i_0}\mathbf{v_{i_0}} + \lambda_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + ... + \lambda_{i_k}\mathbf{v}_{i_r},\ \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + ... + \lambda_{i_r} = 1$$

και $\lambda_{i_j} \geq 0$ για κάθε $j = 0, 1, ..., r$. Άρα, $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$.

Αν $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$, τότε

$$\mathbf{v} = \lambda_{i_0}\mathbf{v_{i_0}} + \lambda_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + ... + \lambda_{i_k}\mathbf{v}_{i_r},\ \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + ... + \lambda_{i_r} = 1$$

και $\lambda_{i_j} \geq 0$ για κάθε $j = 0, 1, ..., r$.

Θέτοντας $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \in \{0, 1, ..., k\} \setminus \{i_0, i_1, ..., i_r\}$, παίρνουμε

$$\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k,\ \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1,$$

όπου $\lambda_i \geq 0$ για κάθε $i = 0, 1, ..., k$.

Συνεπώς $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ και οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς το σύνολο $\{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ είναι οι $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$, όπου $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \in \{0, 1, ..., k\} \setminus \{i_0, i_1, ..., i_r\}$. □

Σημείωση 9.2.1. Το πλήθος των r-διάστατων εδρών ενός k-μονοπλόκου ισούται με $\binom{k+1}{r+1}$, δηλαδή με τον συντελεστή του t^{r+1} στο διωνυμικό ανάπτυγμα του $(t+1)^{k+1}$

$$(t+1)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} t^r, \ \binom{k+1}{r} = \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}$$

Για $k = 3$ παίρνουμε

$$(t+1)^4 = 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4$$

Πράγματι, το τρισδιάστατο μονόπλοκο, δηλαδή το τετράεδρο, έχει 4 κορυφές (μηδενδιάστατες έδρες), 6 ακμές (μονοδιάστατες έδρες), 4 έδρες (δισδιάστατες έδρες) και το ίδιο το τετράεδρο είναι η μοναδική τρισδιάστατη έδρα.

9.3 Μονόπλοκο ως κύτταρο του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 9.3.1. *Κάθε n-μονόπλοκο σ^n του $\mathbb{R}^n$ είναι n-διάστατο κύτταρο.*

Απόδειξη. Έστω $\sigma^n = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_n$ ένα n-μονόπλοκο του $\mathbb{R}^n$.

Τότε τα σημεία $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ είναι σε γενική θέση. Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδική συλλογή αριθμών $\lambda_0(\mathbf{x}), \lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_n(\mathbf{x})$ τέτοια ώστε (βλ. Πόρισμα 7.5.2)

$$\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{v_0} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n \text{ και } \lambda_0(\mathbf{x}) + \lambda_1(\mathbf{x}) + ..\lambda_n(\mathbf{x}) = 1.$$

Για κάθε $i = 0, 1, ..., n$ το σύνολο

$$\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i, ..., \mathbf{v}_n\} \setminus \{\mathbf{v}_i\}$$

είναι σε γενική θέση και, συνεπώς ορίζει ένα $(n-1)$-διάστατο επίπεδο Π_i, το οποίο δεν περιέχει το σημείο $\mathbf{v}_i$. Επομένως $\mathbf{v}_i$ ανήκει στο εσωτερικό ενός n-διάστατου κλειστού ημιχώρου H_i ως προς Π_i. Επειδή $\lambda_i(\mathbf{v}_i) = 1 > 0$, προκύπτει ότι

$$H_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_i(\mathbf{x}) \geq 0\} \text{ και } \mathrm{Int}(H_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_i(\mathbf{x}) > 0\}$$

Από τα παραπάνω

$$H_0 \cap .... \cap H_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i, \lambda_i(\mathbf{x}) \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(\mathbf{x}) = 1\} = \sigma^n.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(\sigma^n) &= \mathrm{Int}(H_0 \cap .... \cap H_n) = \mathrm{Int}(H_0) \cap ... \cap \mathrm{Int}(H_n) = \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(\mathbf{x}) = 1, \lambda_0(\mathbf{x}) > 0, ..., \lambda_n(\mathbf{x}) > 0\}.\end{aligned}$$

Το τελευταίο σύνολο είναι μη κενό από το Πόρισμα 7.5.3 Από τον ορισμό του n-διάστατου κυττάρου προκύπτει ότι το σ^n είναι n-διάστατο κύτταρο.

□

Πόρισμα 9.3.2. *Κάθε n-μονόπλοκο σ^n του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεωρήματα 8.4.4 και 9.3.1. □

Πόρισμα 9.3.3. *Κάθε n-μονόπλοκο σ^n του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία n-διάστατη μπάλα B^n.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το Πόρισμα 8.5.5. □

Πόρισμα 9.3.4. *Κάθε n-μονόπλοκο σ^n του $\mathbb{R}^n$ είναι n-διάστατο κελί.*

9.4 Μονοπλεκτική υποδιαίρεση μονοπλόκου.

Ορισμός 9.4.1. Μια πεπερασμένη οικογένεια $\mathfrak{D} = \{\sigma_1^n, \sigma_2^n, ..., \sigma_m^n\}$ αποτελούμενη από n-μονόπλοκα καλείται *μονοπλεκτική υποδιαίρεση* του n-μονοπλόκου σ^n αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\sigma_1^n \cup \sigma_2^n \cup ... \cup \sigma_m^n = \sigma^n$

(ii) οποιαδήποτε δύο στοιχεία της $\mathfrak{D}$ ή δεν τέμνονται ή τέμνονται κατά μία κοινή τους έδρα.

Αν $\mathfrak{D} = \{\sigma_1^n, \sigma_2^n, ..., \sigma_m^n\}$ είναι μια μονοπλεκτική υποδιαίρεση ενός μονοπλόκου σ^n, τότε ο αριθμός

$$\mathrm{mesh}(\mathfrak{D}) = \max\{\mathrm{diam}(\sigma_1^n), \mathrm{diam}(\sigma_2^n), ..., \mathrm{diam}(\sigma_m^n)\}$$

καλείται *λεπτότητα* της $\mathfrak{D}$.

Για κάθε $\sigma_i^n \in \mathfrak{D}$, $i = 1, ..., m$, συμβολίζουμε με $V(\sigma_i^n)$ το σύνολο όλων των κορυφών του μονοπλόκου σ_i^n. Τα στοιχεία του συνόλου $V(\mathfrak{D}) = \bigcup_{i=1}^m V(\sigma_i^n)$ καλούνται *κορυφές της μονοπλεκτικής υποδιαίρεση* $\mathfrak{D}$.

Ορισμός 9.4.2. Έστω $\mathfrak{D}$ μια μονοπλεκτική υποδιαίρεση ενός n-μονοπλόκου $\sigma^n = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_n$. Κάθε απεικόνιση $\alpha : V(\mathfrak{D}) \to \{0, 1, ..., n\}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{v} \in V(\mathfrak{D}) \text{ και } \mathbf{v} \in \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}, \text{ όπου } \{i_0, i_1, ..., i_r\} \subseteq \{0, 1, ..., n\} \Longrightarrow \alpha(\mathbf{v}) \in \{i_0, i_1..., i_r\}$$

καλείται *αρίθμηση των κορυφών της μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης* $\mathfrak{D}$.

Από τον ορισμό 9.4.2 προκύπτει ότι αν α είναι μια αρίθμηση κορυφών μιας μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης $\mathfrak{D}$ ενός μονοπλόκου $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_n$, τότε $\alpha(\mathbf{v}_i) = i$ για κάθε κορυφή $\mathbf{v}_i$ του $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_n$ ($\mathbf{v}_i \in \sigma^0 = H(\{\mathbf{v}_i\}) \Rightarrow \alpha(\mathbf{v}_i) \in \{i\}$). Αν μια κορυφή $\mathbf{v}$ της $\mathfrak{D}$ ανήκει στην έδρα $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$ του $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_n$, τότε $\alpha(\mathbf{v})$ πρέπει να ισούται με την τιμή της α σε μια από τις κορυφές της έδρας $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_k}$.

Παρατηρούμε ότι αν σ_i^n είναι ένα στοιχείο της μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης $\mathfrak{D}$ και α είναι μια αρίθμηση του $V(\mathfrak{D})$, τότε η α αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή του σ_i^n έναν από τους αριθμούς $0, 1, ..., n$. Ο περιορισμός αυτός της α στο σύνολο των κορυφών του σ_i^n μπορεί σε δύο διαφορετικές κορυφές του σ_i^n να αντιστοιχεί τον ίδιο αριθμό, οπότε να μην αντιστοιχεί σε καμία κορυφή του σ_i^n κάποιον από τους αριθμούς $0, 1, ..., n$. Ισχύει όμως το ακόλουθο λήμμα, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος του Brouwer.

Λήμμα του Sperner. *Για κάθε αρίθμηση α των κορυφών μιας μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης $\mathfrak{D} = \{\sigma_1^n, \sigma_2^n, ..., \sigma_m^n\}$ ενός n-μονοπλόκου σ^n υπάρχει τουλάχιστον ένα μονόπλοκο $\sigma_i^n \in \mathfrak{D}$ οι κορυφές του οποίου να έχουν αριθμηθεί από όλους τους αριθμούς $0, 1, ..., n$, δηλαδή*

$$\alpha(V(\sigma_i^n)) = \{0, 1, ..., n\}.$$

9.5 Κέντρο βάρους και βαρυκεντρικό άστρο μονοπλόκου.

Ορισμός 9.5.1. *Κέντρο βάρους* ενός μονοπλόκου $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ είναι το σημείο

$$\mathbf{b}(\sigma^k) = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k}{k+1}$$

Αν $\mathbf{b}(\sigma^k)$ είναι κέντρο βάρους του $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v}_0 = (v_1^0, v_2^0, ..., v_n^0),\ \mathbf{v}_1 = (v_1^1, v_2^1, ..., v_n^1),\ \ldots,\ \mathbf{v}_k = (v_1^k, v_2^k, ..., v_n^k)$$

και $\mathbf{b}(\sigma^k) = (b_1, b_2..., b_n)$, τότε

$$b_1 = \frac{v_1^0 + v_1^1 + ... + v_1^k}{k+1}, b_2 = \frac{v_2^0 + v_2^1 + ... + v_2^k}{k+1}, \ldots, b_n = \frac{v_n^0 + v_n^1 + ... + v_n^k}{k+1},$$

Δηλαδή η i-στη συντεταγμένη του $\mathbf{b}(\sigma^k)$ είναι ο μέσος όρος των i-στων συντεταγμένων των κορυφών $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ του σ^k.

Παραδείγματα 9.5.1.

1. Το κέντρο βάρους ενός 0-μονοπλόκου $\sigma^0 = \{\mathbf{v}_0\}$ είναι το σημείο $\mathbf{v}_0$.
2. Κάθε 1-μονοπλόκο σ^1 του $\mathbb{R}^3$ είναι ευθύγραμμο τμήμα και το κέντρο βάρους του είναι το μέσο του τμήματος.
3. Κάθε 2-μονοπλόκο σ^2 του $\mathbb{R}^3$ είναι τρίγωνο και το κέντρο βάρους του είναι το σημείο τομής των διαμέσων του σ^2.
4. Κάθε 3-μονοπλόκο $\sigma^3 = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ του $\mathbb{R}^3$ είναι τετράεδρο και το κέντρο βάρους του είναι το σημείο τομής των ευθύγραμμων τμημάτων $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i'$, $i = 0, 1, 2, 3$, όπου $\mathbf{v}_i'$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων της έδρας που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή $\mathbf{v}_i$.

Πρόταση 9.5.1. *Έστω $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ ένα k-μονόπλοκο.*
Για κάθε φθίνουσα ακολουθία εδρών του σ^k

$$\sigma^k \supset \sigma^{k-1} \supset \cdots \supset \sigma^0$$

(για κάθε $r = 1, ..., k$ το μονόπλοκο σ^{r-1} είναι $(r-1)$-διάστατη έδρα του μονοπλόκου σ^r) τα σημεία

$$\mathbf{b}(\sigma^k), \mathbf{b}(\sigma^{k-1}), \ldots, \mathbf{b}(\sigma^0)$$

είναι σε γενική θέση και, συνεπώς, ορίζουν ένα k-μονόπλοκο $\mathbf{b}(\sigma^k)\mathbf{b}(\sigma^{k-1})\ldots\mathbf{b}(\sigma^0)$.

Η οικογένεια όλων των k-μονοπλόκων $\mathbf{b}(\sigma^k)\mathbf{b}(\sigma^{k-1})\ldots\mathbf{b}(\sigma^0)$ που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο είναι μια μονοπλεκτική υποδιαίρεση του σ^k.

Ορισμός 9.5.2. Το *βαρυκεντρικό άστρο* ενός k-μονοπλόκου $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ είναι η μονοπλεκτική υποδιαίρεση $\mathfrak{B}(\sigma^k)$ του σ^k αποτελούμενη απ' όλα τα k-μονόπλοκα της μορφής $\mathbf{b}(\sigma^k)\mathbf{b}(\sigma^{k-1})\ldots\mathbf{b}(\sigma^0)$, το καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μια φθίνουσα ακολουθία εδρών του $\sigma^k \supset \sigma^{k-1} \supset \cdots \supset \sigma^0$ του σ^k.

Παραδείγματα 9.5.2.

1. Το βαρυκεντρικό άστρο του ευθύγραμμου τμήματος AB με μέσο το σημείο M αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα AM και MB, δηλαδή $\mathfrak{B}(AB) = \{AM, MB\}$

2. Το βαρυκεντρικό άστρο του τριγώνου ABC με κέντρο βάρους το σημείο M, μέσο του AB το σημείο C', μέσο του BC το σημείο A' και μέσο του AC το σημείο B', αποτελείται από 6 τρίγωνα με ένωση το ABC, δηλαδή

$$\mathfrak{B}(ABC) = \{AMB', AMC', BMA', BMC', CMA', CMB'\}.$$

Πρόταση 9.5.2. *Για κάθε* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *και για κάθε* $\mathbf{v} \in \mathbf{v_0 v_1 ... v_k}$ *ισχύει*

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq \max\{d_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) : j = 0, 1, ..., k\}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v_0} + \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{v_k}$, όπου $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Επειδή

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k)\mathbf{x}$$

παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = |\mathbf{x} - \mathbf{v}|_n &= \left|\sum_{j=0}^{k} \lambda_j \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \mathbf{v_j}\right|_n = \left|\sum_{j=0}^{k} \lambda_j (\mathbf{x} - \mathbf{v_j})\right|_n \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \left|\mathbf{x} - \mathbf{v_j}\right|_n \leq \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \max_{0 \leq j \leq k} \left|\mathbf{x} - \mathbf{v_j}\right|_n = \max_{0 \leq j \leq k} \left|\mathbf{x} - \mathbf{v_j}\right|_n \cdot \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = \\ &= \max\{d_n(\mathbf{x}, \mathbf{v_j}) : j = 0, 1, ..., k\}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 9.5.3. *Για κάθε μονόπλοκο* $\sigma^k = \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 ... \mathbf{v}_k$ *ισχύει*

$$\mathrm{mesh}(\mathfrak{B}(\sigma^k)) \leq \frac{k}{k+1} \,\mathrm{diam}(\sigma^k).$$

Απόδειξη. Έστω $\sigma = \mathbf{b}(\sigma^k)\mathbf{b}(\sigma^{k-1}) \ldots \mathbf{b}(\sigma^0) \in \mathfrak{B}(\sigma^k)$, όπου

$$\sigma^k \supset \sigma^{k-1} \supset \cdots \supset \sigma^0$$

είναι μια φθίνουσα ακολουθία εδρών του σ^k τέτοια ώστε για κάθε $r = 1, ..., k$ το σ^{r-1} είναι μια $(r-1)$-διάστατη έδρα του σ^r. Τότε

$$\mathrm{diam}(\sigma) = \mathrm{diam}(\{\mathbf{b}(\sigma^k), \mathbf{b}(\sigma^{k-1}), \ldots, \mathbf{b}(\sigma^0)\}).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $d(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{b}(\sigma^s) \leq \frac{k}{k+1} \,\mathrm{diam}(\sigma^k)$, για κάθε $s, r \in \{0, 1, ..., k\}$.

Έστω $s < r \leq k$. Τότε σ^s είναι μία έδρα του σ^r και σ^r είναι μια έδρα του σ^k. Επομένως υπάρχουν $\mathbf{v}_{i_0}, \mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_s}, ..., \mathbf{v}_{i_r} \in \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \sigma^r &= \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_s}...\mathbf{v}_{i_r}, \\ \sigma^s &= \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_s}. \end{aligned}$$

Επειδή $\mathbf{b}(\sigma^s) \in \sigma^s = \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_s}$, από την Πρόταση 9.5.2 έχουμε

$$\begin{aligned} d(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{b}(\sigma^s) &\leq \max\{d_n(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{v}_{i_0}), ..., d(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{v}_{i_s})\} \\ &= d(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{v}_{i_j}),\ \mathbf{v}_{i_j} \in \{\mathbf{v}_{i_0}, ..., \mathbf{v}_{i_s}\} \subseteq \{\mathbf{v}_{i_0}, ..., \mathbf{v}_{i_s}, ..., \mathbf{v}_{i_r}\}. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} d_n(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{v}_{i_j}) = \left| \frac{\mathbf{v}_{i_0} + \mathbf{v}_{i_1} + ... + \mathbf{v}_{i_r}}{r+1} - \mathbf{v}_{i_j} \right|_n \leq \frac{1}{r+1} \left| \sum_{k=0}^{r} (\mathbf{v}_{i_k} - \mathbf{v}_{i_j}) \right|_n \leq \\ \leq \frac{1}{r+1} \left| \sum_{k=0}^{r-1} (\operatorname{diam}(\sigma^k)) \right|_n \leq \frac{r}{r+1} \operatorname{diam}(\sigma^k) \leq \frac{k}{k+1} \operatorname{diam}(\sigma^k). \end{aligned}$$

Άρα

$$d_n(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{b}(\sigma^s) \leq d_n(\mathbf{b}(\sigma^r), \mathbf{v}) \leq \frac{k}{k+1} \operatorname{diam}(\sigma^k).$$

□

Πόρισμα 9.5.1. *Για κάθε μονόπλοκο σ^k και για κάθε $\mathbf{x} \in \sigma^k$ ισχύει*

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\sigma^k)) \leq \frac{k}{k+1} \operatorname{diam}(\sigma^k).$$

Ορισμός 9.5.3. Για κάθε $i = 1, 2, ...$, η i-οστή βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\mathfrak{B}_i(\sigma^k)$ του μονοπλόκου σ^k ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1(\sigma^k) &= \mathfrak{B}(\sigma^k), \\ \mathfrak{B}_2(\sigma^k) &= \cup\{\mathfrak{B}(\sigma) :\ \sigma \in \mathfrak{B}_1(\sigma^k)\}, \dots, \\ \mathfrak{B}_{i+1}(\sigma^k) &= \cup\{\mathfrak{B}(\sigma) :\ \sigma \in \mathfrak{B}_i(\sigma^k)\}, \dots \end{aligned}$$

Κάθε i-οστή βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\mathfrak{B}_i(\sigma^k)$ είναι μονοπλεκτική και

$$\operatorname{mesh}(\mathfrak{B}_i(\sigma^k)) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \operatorname{diam}(\sigma^k).$$

Πόρισμα 9.5.2. *Για κάθε μονόπλοκο σ^k και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός i τέτοιος, ώστε η λεπτότητα της i-οστής βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης να είναι $< \varepsilon$, δηλαδή*

$$\operatorname{mesh}(\mathfrak{B}_i(\sigma^k)) < \varepsilon.$$

9.6 Απεικονίσεις μεταξύ των μονοπλόκων.

Θεώρημα 9.6.1. *Οποιαδήποτε δύο k-μονόπλοκα είναι ομοιομορφικά.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σημεία

$$\mathbf{d}_0 = (1, 0, 0, ..., 0),\ \mathbf{d}_1 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ \mathbf{d}_k = (0, ..., 0, 1)$$

του $\mathbb{R}^{k+1}$. Δηλαδή όλες οι συντεταγμένες του $\mathbf{d}_j$ είναι ίσες με 0 εκτός από την $(j+1)$-συντεταγμένη, η οποία ισούται με 1. Τα σημεία $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k$ είναι σε γενική θέση και, συνεπώς, ορίζουν ένα k-μονόπλοκο $\sigma = \mathbf{d}_0\mathbf{d}_1...\mathbf{d}_k$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{k+1}$, άρα οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες οποιουδήποτε $\mathbf{d} \in \mathbf{d}_0\mathbf{d}_1...\mathbf{d}_k$ συμπίπτουν με τις συντεταγμένες του $\mathbf{d}$ στο $\mathbb{R}^{k+1}$. Άρα,

$$\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1...\mathbf{d}_k = \{x_0\mathbf{d}_0 + x_1\mathbf{d}_1 + ... + x_k\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^{k+1} : x_0, ..., x_k \in [0, \infty),\ x_0 + \cdots + x_k = 1\}.$$

Το σ είναι κλειστό ως τομή τομή k-επιπέδου που ορίζεται από τα σημεία $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k$ και του κλειστού υπόχωρου $\{x_0\mathbf{d}_0 + x_1\mathbf{d}_1 + ... + x_k\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^{k+1} : x_0, x_1, ..., x_k \in [0, \infty)\}$. Επειδή κάθε μονόπλοκο είναι φραγμένο, προκύπτει ότι σ είναι συμπαγές.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε k-μονόπλοκο είναι ομοιομορφικό με το σ.

Έστω $\sigma^k = \mathbf{v_0v_1...v_k}$, $0 \leq k \leq n$, ένα k-μονόπλοκο του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^n$ ορίζεται από τον τύπο

$$f(x_0\mathbf{d}_0 + x_1\mathbf{d}_1 + ... + x_k\mathbf{d}_k) = x_0\mathbf{v}_0 + x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_k\mathbf{v}_k.$$

Προφανώς η f είναι γραμμική, επομένως η f είναι συνεχής.

Επειδή $f(\mathbf{d}_j) = \mathbf{v}_j$ για $j = 1, ..., k+1$ και επειδή οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου είναι μονοσήμαντα ορισμένες, προκύπτει ότι ο περιορισμός της f στο μονόπλοκο $\sigma = \mathbf{d}_0\mathbf{d}_1...\mathbf{d}_k$ είναι μια ένα-προς-ένα απεικόνιση επί του μονοπλόκου $\sigma^k = \mathbf{v_0v_1...v_k}$.

Επειδή κάθε συνεχής, ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση ορισμένη σε ένα συμπαγή χώρο είναι ομοιομορφισμός, έπεται ότι ο περιορισμός $f|_\sigma$ της f στο συμπαγές σ είναι ομοιομορφισμός του σ επί του $f(\sigma) = \sigma^k$. □

Πόρισμα 9.6.1. *Κάθε μονόπλοκο είναι συμπαγές.*

Πόρισμα 9.6.2. *Για κάθε $1 \leq k \leq n$ κάθε k-μονόπλοκο του $\mathbb{R}^n$ είναι k-διάστατο κελί.*

Θεώρημα 9.6.3. *Έστω $\{F_i\}_{i=0}^k$ μια οικογένεια $k+1$ κλειστών υποσυνόλων του μονοπλόκου $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$.*

Αν για κάθε έδρα $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$, $0 \leq r \leq k$ του σ^k ισχύει ότι

$$\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r} \subseteq F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_r},$$

τότε

$$F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_k \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι
$$F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_k = \emptyset.$$
Τότε η οικογένεια $\{U_i\}_{i=0}^k$, όπου $U_i = \sigma^k \setminus F_i$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του σ^k. Επειδή το σ^k συμπαγής χώρος, για την ανοικτή κάλυψη $\{U_i\}_{i=0}^k$ υπάρχει αριθμός $\varepsilon > 0$ (αριθμός του Lebesgue) τέτοιος ώστε κάθε υποσύνολο του σ^k διαμέτρου $< \varepsilon$ περιέχεται σε ένα από τα $U_0, ..., U_k$, δηλαδή δεν τέμνει ένα από τα $F_0, ..., F_k$.

Έστω ότι l ένας φυσικός αριθμός για τον οποίο η λεπτότητα της l-οστής βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης $\mathfrak{B}_l(\sigma^k)$ του σ^k να είναι $< \varepsilon$. Έστω W το σύνολο όλων των κορυφών της $\mathfrak{B}_l(\sigma^k)$.

Για κάθε $\mathbf{w} \in W$ η τομή όλων των εδρών του σ^k που περιέχουν το $\mathbf{w}$ είναι μία έδρα $\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$ του σ^k. Από την υπόθεση του θεωρήματος
$$\mathbf{w} \in \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r} \subseteq F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_r}.$$
Συνεπώς $\mathbf{w} \in F_{i_j}$ όπου $0 \leq j \leq r$. Θέτουμε $h(\mathbf{w}) = i_j$.

Με τον τρόπο αυτό για την μονοπλεκτική υποδιαίρεση $\mathfrak{B}_l(\sigma^k)$ ορίζουμε μία απεικόνιση $h : W \to \{0, 1, ..., k\}$ που ικανοποιεί την συνθήκη του Λήμματος Sperner :
$$\mathbf{w} \in \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r} \Longrightarrow h(\mathbf{w}) \in \{i_0, i_1, ..., i_r\}.$$
Άρα υπάρχει $\sigma = \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1...\mathbf{w}_k \in \mathfrak{B}_l(\sigma^k)$ τέτοιο, ώστε $h(\mathbf{w}_i) = i$ για κάθε $i = 0, 1, ..., k$. Επειδή $\mathrm{diam}(\sigma) < \varepsilon$, $\sigma \subseteq U_i = \sigma^k \setminus F_i$ για κάποιο i. Όμως, από τον ορισμό της h έχουμε $\mathbf{w}_i \in F_i$ για κάθε $i = 0, 1, ..., k$. Άρα, $\sigma \cap F_i \neq \emptyset$ για κάθε $i = 0, 1, ..., k$, που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 9.6.4. (**Brouwer**)*Για κάθε $k = 1, 2, ...$ κάθε k-μονόπλοκο σ^k έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Δηλαδή, για κάθε συνεχής απεικόνιση
$$f : \sigma^k \to \sigma^k$$
υπάρχει $\mathbf{x} \in \sigma^k$ για το οποίο $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Απόδειξη. Έστω $\sigma^k = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_k$ και $\mathbf{x} \in \sigma^k$. Τότε
$$\mathbf{x} = \lambda_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_0 + \lambda_1(\mathbf{x})\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k(\mathbf{x})\mathbf{v}_k, \tag{9.1}$$
$$\lambda_0(\mathbf{x}) + \lambda_1(\mathbf{x}) + ... + \lambda_k(\mathbf{x}) = 1 \text{ και } \lambda_j(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ για κάθε } j = 0, 1, ...k. \tag{9.2}$$
Επειδή $f(\mathbf{x}) \in \sigma^k$, έχουμε επίσης
$$f(\mathbf{x}) = \lambda_0(f(\mathbf{x}))\mathbf{v}_0 + \lambda_1(f(\mathbf{x}))\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k(f(\mathbf{x}))\mathbf{v}_k, \tag{9.3}$$
$$\lambda_0(f(\mathbf{x})) + \lambda_1(f(\mathbf{x})) + ... + \lambda_k(f(\mathbf{x})) = 1 \text{ και } \lambda_j(f(\mathbf{x})) \geq 0 \text{ για κάθε } j = 0, 1, ...k. \tag{9.4}$$
Θα δείξουμε ότι για κάθε $i = 0, 1, ..., k$ το σύνολο
$$F_i = \{\mathbf{x} \in \sigma^k : \lambda_i(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_i(\mathbf{x})\}$$
είναι κλειστό, δηλαδή περιέχει τα σημεία συσσώρευσης του.

Πράγματι, αν $\mathbf{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του F_i, τότε υπάρχει ακολουθία $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in F_i$ για την οποία $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$. Επειδή η συναρτήσεις λ_i και f είναι συνεχής, η συνάρτηση $\lambda_i \circ f$ είναι συνεχής. Οπότε $\lambda_i(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \lambda_i(\mathbf{x}_n)$ και $\lambda_i(f(\mathbf{x})) = \lim_{n\to\infty} \lambda_i(f(\mathbf{x}_n))$. Επειδή $\lambda_i(f(\mathbf{x}_n)) \leq \lambda_i(\mathbf{x}_n)$ για κάθε n, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_i(f(\mathbf{x}_n)) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda_i(\mathbf{x}_n).$$

Άρα, $\lambda_i(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_i(\mathbf{x})\}$, δηλαδή $\mathbf{x} \in F_i$.

Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\{F_i\}_{i=0}^{k}$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θεωρήματος 9.6.3.

Έστω $\mathbf{x} \in \mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r}$, $0 \leq r \leq k$. Τότε

$$\lambda_{i_0}(\mathbf{x}) + \lambda_{i_1}(\mathbf{x}) + ... + \lambda_{i_r}(\mathbf{x}) = 1 \tag{9.5}$$

Από την σχέσεις (9.4) και (9.5) προκύπτει ότι

$$\lambda_{i_0}(f(\mathbf{x})) + \lambda_{i_1}(f(\mathbf{x})) + ... + \lambda_{i_r}(f(\mathbf{x})) \leq 1 = \lambda_{i_0}(\mathbf{x}) + \lambda_{i_1}(\mathbf{x}) + ... + \lambda_{i_r}(\mathbf{x}).$$

Επομένως $\lambda_{i_j}(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_{i_j}(\mathbf{x})$ για κάποιο $j \in \{0, 1, ..., r\}$, οπότε $\mathbf{x} \in F_{i_j}$. Άρα

$$\mathbf{v}_{i_0}\mathbf{v}_{i_1}...\mathbf{v}_{i_r} \subseteq F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_r}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.6.3 υπάρχει $\mathbf{x} \in F_0 \cap F_1 \cap ... \cap F_k$. Από τον ορισμό των συνόλων F_i έχουμε

$$\lambda_0(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_0(\mathbf{x}),\ \lambda_1(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_k(f(\mathbf{x})) \leq \lambda_k(\mathbf{x}). \tag{9.6}$$

Από τις σχέσεις (9.2), (9.4) και (9.6) προκύπτει ότι η αυστηρή ανισότητα $\lambda_j(f(\mathbf{x})) < \lambda_j(\mathbf{x})$ δεν μπορεί να ισχύει για κανένα $j = 0, 1, ..., k$. Άρα,

$$\lambda_0(f(\mathbf{x})) = \lambda_0(\mathbf{x}),\ \lambda_1(f(\mathbf{x})) = \lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_k(f(\mathbf{x})) = \lambda_k(\mathbf{x}),$$

δηλαδή $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. □

Θεώρημα 9.6.5. *Το σύνορο του μονοπλόκου σ^n, $n = 1, 2, ...$, δεν είναι συρρίκνωμα του. Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r : \sigma^n \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$ ενός μονοπλόκου στο σύνορό του τέτοια ώστε $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Brouwer κάθε μονόπλοκο σ^n έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Επομένως (από το Θεώρημα 1.6.2) κάθε συρρίκνωμα του σ^n έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Bd}(\sigma^n)$ δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Να βρούμε δηλαδή μια συνεχής απεικόνιση του $\mathrm{Bd}(\sigma^n)$ στο $\mathrm{Bd}(\sigma^n)$ που να μην έχει σταθερό σημείο.

Έστω $\mathbf{s} \in \mathrm{Int}(\sigma^n)$. Κάθε ευθεία που διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο $\mathbf{s}$ του μονοπλόκου τέμνει το σύνορο του μονοπλόκου ακριβώς σε δύο σημεία.

Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση $g : \mathrm{Bd}(\sigma^n) \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$, η οποία σε κάθε $\mathbf{b} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$ αντιστοιχεί το σημείο $g(\mathbf{b}) \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$ που είναι το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{b}$ και $\mathbf{s}$ με το σύνορο $\mathrm{Bd}(\sigma^n)$ και το οποίο είναι διαφορετικό από το $\mathbf{b}$. Επειδή $g(\mathbf{b}) \neq \mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$, η g δεν έχει σταθερό σημείο.

□

Θεώρημα 9.6.6. *Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση ενός n-μονοπλόκου σ^n στο σύνορό του που να απεικονίζει κάθε $(n-1)$-διάστατη έδρα του σ^n στον εαυτό της.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $r : \sigma^n \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$ που απεικονίζει κάθε $(n-1)$-διάστατη έδρα του σ^n να απεικονίζεται στον εαυτό της.

Έστω ότι $g : \mathrm{Bd}(\sigma^n) \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$ είναι η συνεχής απεικόνιση που ορίστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.6.5 και $f = g \circ r : \sigma^n \to \mathrm{Bd}(\sigma^n) \subseteq \sigma^n$.

Επειδή η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα του Brouwer προκύπτει ότι υπάρχει $\mathbf{b} \in \sigma^n$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$. Επειδή η f απεικονίζει το σ^n στο $\mathrm{Bd}(\sigma^n)$, προκύπτει ότι $\mathbf{b} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$. Από τις ιδιότητές της g προκύπτει ότι τα σημεία $r(\mathbf{b})$ και $g(r(\mathbf{b})) = \mathbf{b}$ ανήκουν σε διαφορετικές $(n-1)$-διάστατες έδρες του σ^n. Άρα, $r(\mathbf{b})$ και $\mathbf{b}$ ανήκουν σε διαφορετικές $(n-1)$-διάστατες έδρες του σ^n, που είναι άτοπο. □

Ορισμός 9.6.3. Έστω ότι $f : S \to Z$ είναι μια απεικόνιση και $S \subseteq X$.

Μια απεικόνιση $\bar{f} : X \to Z$ καλείται *επέκταση* της f στο σύνολο X αν και μόνον αν $\bar{f}(s) = f(s)$ για κάθε $s \in S$.

Μια απεικόνιση $r : X \to S$, όπου $S \subseteq X$ είναι συρρίκνωση αν και μόνον αν r είναι επέκταση της ταυτοτικής απεικόνισης $\tau : S \to S$ στον X.

Θεώρημα 9.6.7. *Δεν υπάρχει επέκταση της ταυτοτικής απεικόνισης*

$$i : \mathrm{Bd}(\sigma^n) \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$$

του συνόρου του σ^n σε όλο το σ^n.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα υπάρχει μια συνεχής επέκταση

$$\bar{i} : \sigma^n \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$$

στο σ^n της ταυτοτικής απεικόνισης $i : \mathrm{Bd}(\sigma^n) \to \mathrm{Bd}(\sigma^n)$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$ θα ισχύει

$$\bar{i}(\mathbf{x}) = i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Οπότε $\bar{i}$ είναι συρρίκνωση του σ^n στο $\mathrm{Bd}(\sigma^n)$, που είναι άτοπο αφού το σύνορο κανενός μονοπλόκου δεν είναι συρρίκνωμα του (βλ. Θεώρημα 9.6.5). □

Θεώρημα 9.6.8. *Για κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathrm{Bd}(\sigma^n) \to \sigma^m$ υπάρχει μια συνεχής επέκταση $\bar{f} : \sigma^n \to \sigma^m$.*

Απόδειξη. Επειδή για κάθε $k = 0, 1, \ldots$ οποιαδήποτε δύο k-μονόπλοκα είναι ομοιομορφικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\sigma^m \subseteq \mathbb{R}^m$.

Έστω $\mathbf{p} \in \mathrm{Int}(\sigma^n)$. Τότε

$$\sigma^n = \cup\{\mathbf{pb} : \mathbf{b} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$$

Έστω $\mathbf{q}$ ένα τυχαίο σημείο του σ^m.

Αν $\mathbf{x} \in \sigma^n$, τότε $\mathbf{x} \in \mathbf{pb}$ για κάποιο $\mathbf{b} \in \mathrm{Bd}(\sigma^n)$. Έστω $\bar{f}(\mathbf{x})$ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα q και $f(b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d_n(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{d_n(\mathbf{x}, \mathbf{b})} = \frac{d_m(\mathbf{q}, \bar{f}(\mathbf{x}))}{d_m(\bar{f}(\mathbf{x}), f(\mathbf{b}))}$$

Η απεικόνιση $\bar{f} : \sigma^n \to \sigma^m$ είναι συνεχής επέκταση της f. □

Κεφάλαιο 10

Σύμπλοκα και Πολύεδρα.

10.1 Σύμπλοκα.

Ορισμός 10.1.1. Ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathbf{T}$ αποτελούμενο από μονόπλοκα του $\mathbb{R}^m$ καλείται *σύμπλοκο* αν και μόνον αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathbf{T}$ περιέχει όλες τις έδρες όλων των στοιχείων του.

(ii) Αν $\sigma, \sigma' \in \mathbf{T}$ και $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$, τότε $\sigma \cap \sigma'$ είναι μια κοινή έδρα και του σ και του σ'.

Η ένωση όλων των στοιχείων ενός συμπλόκου $\mathbf{T}$ καλείται *στερεό του* $\mathbf{T}$ και συμβολίζεται με $|\mathbf{T}|$.

Ο φυσικός αριθμός n καλείται *διάσταση του συμπλόκου* $\mathbf{T}$ αν είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίον κάθε στοιχείο του συμπλόκου $\mathbf{T}$ έχει διάσταση $\leq n$.

Ένα σύμπλοκο $\mathbf{T}$ διάστασης n περιέχει μονόπλοκα όλων των διαστάσεων από 0 έως n.

Ορισμός 10.1.2. Τα 0-μονόπλοκα του συμπλόκου $\mathbf{T}$ καλούνται *κορυφές* του $\mathbf{T}$. Το σύνολο όλων των κορυφών του $\mathbf{T}$ συμβολίζεται με $\mathbf{T}^0$.

Ορισμός 10.1.3. Για κάθε $i = 0, 1, ..., n$, το σύνολο όλων των i-μονοπλόκων του $\mathbf{T}$ καλείται *i-σκελετός* του $\mathbf{T}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{T}^i$.

Παραδείγματα 10.1.1.

1. Το σύνολο που αποτελείται από ένα μονόπλοκο σ^n και όλες τις έδρες του είναι ένα σύμπλοκο, το στερεό του οποίου είναι το σ^n.

2. Έστω $\mathfrak{D}$ μια μονοπλεκτική υποδιαίρεση ενός τριγώνου $\sigma^2 = v_0v_1v_2$.

   Η $\mathfrak{D}$ αποτελείται από τρίγωνα, τα οποία ανά δύο είτε δεν τέμνονται, είτε τέμνονται κατά μία κορυφή, είτε τέμνονται κατά μία πλευρά.

   Έστω ότι $\mathbf{T}$ είναι το σύνολο όλων των τριγώνων της $\mathfrak{D}$, όλων των πλευρών των τριγώνων της $\mathfrak{D}$ και όλων των κορυφών των τριγώνων της $\mathfrak{D}$. Τότε $\mathbf{T}$ είναι ένα σύμπλοκο για το οποίο

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^0 &= V(\mathfrak{D}) \\
\mathbf{T}^1 &= \bigcup\{vw : vw \text{ είναι πλευρά κάποιου τριγώνου της } \mathfrak{D}\} \\
\mathbf{T}^2 &= \bigcup\{vwz : vwz \text{ είναι τριγώνου-στοιχείο της } \mathfrak{D}\} \\
|\mathbf{T}| &= v_0v_1v_2
\end{aligned}$$

3. Θεωρούμε τα σημεία $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ του $\mathbb{R}^2$. Ένα σύμπλοκο του $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο

$$\mathbf{T} = \{OA, OB, OC, BC, O, A, B, C\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^0 &= \{O, A, B, C\} \\
\mathbf{T}^1 &= \{OA, OB, OC, BC\} \\
|\mathbf{T}| &= OA \cup OB \cup OC \cup BC
\end{aligned}$$

4. Έστω $abcd$ ένα ορθογώνιο με πλευρές ab, bc, cd και da.

Αν χωρίσουμε το $abcd$ με διαγώνιο ac σε δύο τρίγωνα abc και adc, τότε το σύνολο

$$\mathbf{T_1} = \{abc, adc, ab, bc, ca, cd, da, a, b, c, d\},$$

που αποτελείται από τα τρίγωνα αυτά, τις πλευρές τους και τις κορυφές τους, είναι ένα σύμπλοκο και $|\mathbf{T_1}| = abcd$.

Έστω o είναι σημείο τομής των διαγωνίων ac και bd του $abcd$. Το σύνολο

$$\mathbf{T_2} = \{aob, aod, doc, cob, ab, bc, cd, da, ao, bo, co, do, a, b, c, d\}$$

είναι ένα σύμπλοκο και $|\mathbf{T_2}| = abcd$.

10.2 Πολύεδρα.

Ορισμός 10.2.1. Ένα υποσύνολο $\mathbf{P}$ του $\mathbb{R}^n$ καλείται *πολύεδρο* αν υπάρχει ένα σύμπλοκο $\mathbf{T}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε το $\mathbf{P} = |\mathbf{T}|$.

Αν $\mathbf{T}$ είναι ένα σύμπλοκο και $\mathbf{P} = |\mathbf{T}|$, τότε το σύμπλοκο $\mathbf{T}$ καλείται *τριγωνισμός* του πολυέδρου $\mathbf{P}$.

Ένα πολύεδρο μπορεί να έχει πολλούς τριγωνισμούς.

Ένα πολύεδρο μπορεί να μην είναι συνεκτικό.

Ένα πολύεδρο μπορεί να κατασκευαστεί από μονόπλοκα διαφορετικών διαστάσεων.

Αν το σύμπλοκο T είναι ένας τριγωνισμός ενός πολυέδρου $\mathbf{P}$, τότε η (τοπολογική) *διάσταση του πολυέδρου* $\mathbf{P}$ ισούται με την διάσταση του T.

Παραδείγματα 10.2.1.

1. Κάθε μονόπλοκο είναι πολύεδρο.

2. Το ορθογώνιο $abcd$ που περιγράψαμε παραπάνω είναι ένα πολύεδρο, επειδή είναι ένωση των στοιχείων ενός συμπλόκου $\mathbf{T_1}$. Το σύμπλοκο $\mathbf{T_1}$ είναι ένας τριγωνισμός του $abcd$.

   Χωρίζοντας το $abcd$ σε τέσσερα τρίγωνα με δύο διαγώνιους ac και bd που τέμνονται στο σημείο o, παίρνουμε έναν άλλο τριγωνισμό

$$\mathbf{T_2} = \{aob, boa, cod, doa, ab, bc, cd, da, oa, ob, oc, od, a, b, c, d, o\}.$$

3. Τα τρισδιάστατα πολύεδρα τις γεωμετρίας είναι πολύεδρα με την έννοια που ορίσαμε. Για να βρούμε ένα τριγωνισμό ενός τέτοιου πολυέδρου $\mathbf{P}$, αρκεί να χωρίσουμε τις έδρες του σε τρίγωνα και να χωρίσουμε το $\mathbf{P}$ σε τετράεδρα με επίπεδα που περιέχουν ένα επιλεγμένο σημείο p στο εσωτερικό του πολυέδρου και τις πλευρές των τριγώνων.

4. Κάθε μονοπλεκτική υποδιαίρεση $\mathfrak{D}$ ενός μονοπλόκου σ ορίζει έναν τριγωνισμό του σ, ο τριγωνισμός αυτός αποτελείται από τα στοιχεία της $\mathfrak{D}$ και όλες τις έδρες όλων των στοιχείων της $\mathfrak{D}$.

5. Το βαρυκεντρικό άστρο και κάθε i-οστή $(i = 2, 3, ...)$ βαρυκεντρική υποδιαίρεση ενός μονοπλόκου σ ορίζουν έναν τριγωνισμό του σ.

Σημείωση 10.2.1. Για κάθε μονόπλοκο σ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\mathfrak{B}_i(\sigma)$ του σ τα στοιχεία της οποίας έχουν διάμετρο $< \varepsilon$.

Επομένως για κάθε πολύεδρο υπάρχουν οσοδήποτε λεπτοί τριγωνισμοί, δηλαδή για κάθε πολύεδρο $\mathbf{P}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας τριγωνισμός $\mathbf{T}$ του $\mathbf{P}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{T}$ αποτελείται από μονόπλοκα με διαμέτρους $< \varepsilon$.

Πρόταση 10.2.1. *Κάθε πολύεδρο είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Κάθε πολύεδρο είναι ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας μονοπλόκων. Επειδή κάθε μονόπλοκο είναι συμπαγές και επειδή η ένωση κάθε πεπερασμένης οικογένειας συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο, προκύπτει ότι κάθε πολύεδρο είναι συμπαγές. ☐

Ορισμός 10.2.2. Κάθε σύνολο ομοιομορφικό με ένα πολύεδρο καλείται *τριγωνοποιήσιμο σύνολο.*

Τα τριγωνοποιήσιμα σύνολα καλούνται *καμπυλόγραμμα πολύεδρα.*

Αν ένα σύνολο A είναι τριγωνοποιήσιμο, τότε υπάρχει ένα πολύεδρο $\mathbf{P}$ και ένας ομοιομορφισμός $h : \mathbf{P} \to A$. Αν $\mathbf{T}$ είναι ένας τριγωνισμός του $\mathbf{P}$, τότε ο ομοιομορφισμός h απεικονίζει τα μονόπλοκα του $\mathbf{T}$ σε υποσύνολα του A. Το σύνολο

$$\{h(\sigma) : \sigma \in \mathbf{T}\}$$

καλείται *καμπυλόγραμμος τριγωνισμός* του A.

Παραδείγματα 10.2.2.

1. Η μπάλα B^n είναι ομοιομορφική με το n-διάστατο μονόπλοκο σ^n. Επειδή κάθε μονόπλοκο είναι πολύεδρο, η B^n είναι ένα καμπυλόγραμμο πολύεδρο, δηλαδή η μπάλα B^n είναι τριγωνοποιήσιμη.

2. Αν $h : \sigma^n \to B^n$, τότε $h(Bd(\sigma^n)) = Bd(B^n)) = S^{n-1}$. Επειδή το σύνορο κάθε μονοπλόκου είναι τριγωνοποιήσιμο, έπεται ότι η σφαίρα S^{n-1} είναι τριγωνοποιήσιμη για κάθε $n = 1, 2, ...$

3. Κάθε κυρτό, συμπαγές και μη συνοριακό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι τριγωνοποιήσιμο, επειδή είναι ομοιμορφικό με το σ^n.

4. Υπάρχουν τριγωνοποιήσιμα σύνολα, τα οποία είναι μη κυρτά. Για παράδειγμα η n-διάστατη σφαίρα S^n είναι τριγωνοποιήσιμη και μη κυρτή.

10.3 Χαρακτηριστική του Euler ενός πολυέδρου.

Ορισμός 10.3.1. Έστω $\mathbf{P}$ ένα n-διάστατο πολύεδρο και $\mathbf{T}$ ένας τριγωνισμός του $\mathbf{P}$. Για κάθε $i = 0, 1, ...$ συμβολίζουμε με t_i το πλήθος των i-διάστατων μονοπλόκων του $\mathbf{T}$. Ο αριθμός

$$\chi(\mathbf{P}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t_i$$

καλείται *χαρακτηριστική του Euler* του $\mathbf{P}$.

Αποδεικνύεται ότι:

1. Ο αριθμός $\chi(\mathbf{P})$ ενός πολυέδρου $\mathbf{P}$ είναι ανεξάρτητος από τον τριγωνισμό $\mathbf{T}$ του $\mathbf{P}$.

2. Αν τα πολύεδρα $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P_2}$ είναι ομοιομορφικά, τότε $\chi(\mathbf{P}_1) = \chi(\mathbf{P}_2)$.

Παραδείγματα 10.3.1.

1. Για ένα τρίγωνο abc έχουμε: $t_0 = 3$, $t_1 = 3$ και $t_2 = 1$. Άρα,

$$\chi(abc) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i t_i = 3 - 3 + 1 = 1.$$

2. Για τους τριγωνισμούς $\mathbf{T}_1$ και $\mathbf{T}_2$ ενός ορθογωνίου $abcd$ (Παράδειγμα 10.1.1(4)) έχουμε:

$$\chi(\mathbf{T}_1) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i t_i = 4 - 5 + 2 = 1,$$
$$\chi(\mathbf{T}_2) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i t_i = 5 - 8 + 4 = 1.$$

3. Για ένα τετράεδρο σ^3 έχουμε: $t_0 = 4$, $t_1 = 6$, $t_2 = 4$ και $t_3 = 1$. Άρα,

$$\chi(\sigma^3) = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i t_i = 4 - 6 + 4 - 1 = 1.$$

Για κάθε καμπυλόγραμμο πολύεδρο A υπάρχει ένα πολύεδρο $\mathbf{P}$ και ένας ομοιομορφισμός $h : \mathbf{P} \to A$. Η χαρακτηριστική του Euler μπορεί να οριστεί για το A ως εξής:

$$\chi(A) = \chi(\mathbf{P}).$$

Για παράδειγμα

$$\chi(B^2) = \chi(\sigma^2) = 1 \text{ και } \chi(B^3) = \chi(\sigma^3) = 1.$$

Αν δύο καμπυλόγραμμα πολύεδρα A και B είναι ομοιομορφικά, τότε

$$\chi(A) = \chi(B).$$

Μπορεί όμως και δύο μη ομοιμορφικά καμπυλόγραμμα πολύεδρα να έχουν την ίδια χαρακτηριστική του Euler, π.χ. $\chi(B^2) = \chi(B^3) = 1$, όμως ο κύκλος και η μπάλα δεν είναι ομοιομορφικά.

Βιβλιογραφία

[1] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[2] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.

[3] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[4] A. Lelek, *Zbiory*, Biblioteczka Matematyczna, Tom 26 Państwowe Zaklady Wydawnictw Szkolnych, Warsaw, 1966. (*Εισαγωγή στα Σύνολα και την Τοπολογία*, Εκδόσεις Τροχαλία-Γρ. Τρουφάκος και Σία Ε.Ε, Αθήνα, 1992.)

[5] E .M. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York Inc., 1977.

Ευρετήριο