ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ»

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

1) Να υπολογιστούν τα όρια των κάτωθι ακολουθιών με $n \in \mathbb{N}$:

(α) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n^2+n-5}{7n^2+n+1}$ (β) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3-3n^2+n-5}{3n^2-n+2}$

(γ) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+n-3})$ (δ) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+4^n}{(-2)^n+5^n}$

2) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών :

α. $x_n = \dfrac{2^n+3^n}{4^n+2^n}$ **β.** $y_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+n-1}}{n-\sqrt{n^2-n+1}}$, $n>1$ **γ.** $z_n = \dfrac{n}{2^n}$

3) Ένας ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας είναι και ο εξής: Μία ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο, α, αν, για κάθε ε > 0, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > n_0$, ισχύει $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό αυτό εξετάστε αν οι κάτωθι ακολουθίες συγκλίνουν και αν ναι σε ποιο όριο:

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

4) Να εξετασθεί αν η ακολουθία με γενικό όρο:

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

είναι i) φραγμένη ii) συγκλίνουσα.

5) Δίνεται η αναδρομική ακολουθία:

$$\alpha_{n+1} = 2 - \frac{1}{\alpha_n}, \text{ με } \alpha_1 = 2$$

Να εξετασθεί αν είναι μονότονη, φραγμένη και συγκλίνουσα. Σε περίπτωση που συγκλίνει να προσδιορισθεί το όριο.

6) Να υπολογισθεί το όριο των ακολουθιών

i) $a_n = n\sqrt{n+4} - n\sqrt{n+1}$ ii) $a_n = n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Βρείτε τα όρια

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin(\pi x)-\sin(3\pi x)}{x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-3x+2}$

2) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)}[(\dfrac{\pi}{2}-x)\tan x]$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$

3) Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+10}-n}{n}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x^2-2\cos x}{x^4}$ (γ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

4) Προσδιορίστε τα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης

$$h(x)=x^2-4x-5,\qquad -\infty<x<\infty.$$

στα οποία αυτή αντιστρέφεται και υπολογίστε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντιστρόφου της σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.

(β) Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, δείξτε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να προσδιορίστε την, επισημαίνοντας το πεδίο ορισμού της.

5) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L' Hospital, υπολογίστε τα επόμενα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1+3x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{1-\cos x}$

Υπόδειξη: Στο ii., ονομάστε το όριο L, πάρτε λογάριθμους με βάση το e και θεωρήστε την εξίσωση $\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=\ln L$, όπου έχουμε κάνει την αντιμετάθεση λογαρίθμου και ορίου (που επιτρέπεται). Ονομάστε τώρα $y = 1/x$ και εφαρμόστε τον κανόνα L' Hospital για $y\to 0$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

1) Να βρεθούν οι πραγματικοί α,β ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+4\alpha x+1, & x\le 1\\ 3x^2+\beta, & 1<x\le 4\\ \alpha x+\beta, & 4<x \end{cases}$$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x-\sin(2x), & x<0\\ \sqrt{x+1}-\dfrac{x}{2}-1, & x\ge 0 \end{cases}$$

Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$.

3) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $y=x^3+7x-8$ β) $y=\sin\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)$

γ) $y=(2-x-3x^3)(7+x^5)$ δ) $y=\dfrac{4x^2+1}{x^3-2}$.

4) Εάν $x\neq 0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $y=\dfrac{1}{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^3y''+x^2y'-xy=0.$$

5) Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του x για τις οποίες η καμπύλη

$y=x^3-6x^2+9x+1$ και η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$, με $x\in(-\infty,+\infty)$

α) ανέρχεται, **β)** κατέρχεται, **γ)** είναι κοίλη προς τα κάτω, **δ)** είναι κοίλη προς τα πάνω. Σχεδιάστε την καμπύλη και δείξτε τα σημεία καμπής και τα σημεία όπου η συνάρτηση έχει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα.

6) Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του x για τις οποίες η καμπύλη

$$y=\frac{x^5}{5}-3\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}$$

ανέρχεται, κατέρχεται, είναι κοίλη προς τα κάτω, ή προς τα πάνω. Σχεδιάστε την καμπύλη και προσδιορίστε τα σημεία όπου η συνάρτηση έχει τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και σημεία καμπής.

7) Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+x^2+1$, με $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ και χαρακτηρίστε τα ως τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα. Ποιο είναι το πεδίο τιμών της $f(x)$;

8) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(i) $f(x)=e^{x^2}\cos(2x)$ (ii) $g(x)=3\tan(\sqrt{x^2-1})$ (iii) $h(x)=\dfrac{x^{2/3}+1}{x^{3/2}}$

(iv) $f(x)=x\sqrt{x}\left(3\ln(x)-2\right)$ **(v)** $f(x)=\dfrac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$ **(vi)** $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(vii) $f(x)=e^{\sin^2(x^3)}$

9) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<1 \\ 2\sqrt{x}+x^2, & x\ge 1 \end{cases}$. Εξετάστε εάν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

10) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2\ln(x)-\alpha x^2, & x>1 \\ 1+\beta x+x^3 \quad , & x\le 1 \end{cases}$. Να εξετασθεί για ποιες τιμές των α και β είναι παραγωγίσιμη στο x = 1.

11) Να προσδιορίσετε τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-ax}{x-1}, & x\ne 1 \\ b \quad , & x=1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x=1$.

112 Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν, για $-\infty<x<\infty$, όλα τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^4-2x^2+7$. Να υπολογισθούν επίσης τα σημεία καμπής της συνάρτησης.

13) Σε ένα ακτήμονα γεωργό προσφέρεται όση έκταση καλλιεργήσιμης γης μπορεί να περικλείσει με ένα φράχτη μήκους 100 μ. σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ποια μήκη πλευρών x, y πρέπει να επιλέξει ώστε να έχει η έκταση αυτή το μέγιστο δυνατό εμβαδόν;

14) Να βρεθεί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μεγαλύτερο εμβαδόν που μπορεί να εγγραφεί σε ένα ημικύκλιο ακτίνας 1, έτσι ώστε οι δύο γωνίες του να βρίσκονται πάνω στην διάμετρο του κύκλου.

15) Να δώσετε το πεδίο ορισμού, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x\ln(\ln x)$ εκεί όπου υπάρχει και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}[x\ln(\ln x)]$.

16) Αν $2x+y=4$ όπου x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ποσότητας $E=x^2y$.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2bx+4+a\ln(x^2)$ με $x>0$. Υπολογίστε την $f'(x)$ και βρείτε τις πραγματικές παραμέτρους a, b έτσι ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=1$, $x_2=2$ και προσδιορίστε το είδος των ακρότατων αυτών. Υπάρχουν τοπικά ή ολικά ακρότατα στα σημεία αυτά;

17) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$, $x\in(-\infty,\infty)$.
Αφού υπολογίστε $f'(x)$, $g'(x)$, εξετάστε την συμμετρία (αρτια, περιττή) μονοτονία, ακρότατα, σημεία τομής των αξόνων, και τα όρια καθώς $x\to\infty$, $x\to-\infty$.

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$, με $x\in(-\infty,+\infty)$. Να προσδιορίσετε:

i) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία αυτή είναι αύξουσα, φθίνουσα και τα τοπικά ακρότατά της (μέγιστα και ελάχιστα).

ii) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία στρέφει τα κοίλα άνω, εκείνα στα οποία στρέφει τα κοίλα κάτω όπως επίσης και τα σημεία καμπής της f.

iii) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

iv) Τις ασύμπτωτες της f.

v) Συνοψίστε σε έναν πίνακα τα παραπάνω στοιχεία και σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f.

19) Να βρεθούν τα $\lambda,\mu\in R$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x-3\lambda x^2}{x^2}, & \text{αν } x<0\\ 2x^2+6\lambda x+\mu, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}.$$

να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R.

20) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y(t)=A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)$ επαληθεύει την εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\omega_0^{\,2}y(t)=0$, για γενικές τιμές των $A,B,\omega_0\in R$.
Ακολούθως να δείξετε ότι η συνάρτηση $y(t)=e^{-\mu t}(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t))$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή με τριβές $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\mu\dfrac{dy(t)}{dt}+\omega_0^{\,2}y(t)=0$ για μ > 0 προσδιορίζοντας την εξάρτηση του ω από τα ω_0,μ.

ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

1) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $\sin x$ σε σειρά Mclaurin υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

2) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor δυνάμεων του $x-1$ την συνάρτηση $\ln x$ και υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

3) Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Maclaurin αναπτύξτε σε δυνάμεις του x τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln(1+x)$$

στο διάστημα $[0,1]$.

4) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)=e^{2x-x^2}$, στο x = 0, μέχρι όρους τάξης x^3 .

5) Βρείτε τα αναπτύγματα Taylor μέχρι όρους τάξης x^2 των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{2}\left(1-(1+4x)^{1/2}\right)$, $g(x)=e^{-x}-\cos x$, στο x = 0 και δείξτε μέσω αυτών ότι οι συναρτήσεις ταυτίζονται μέχρι την τάξη αυτή .

6) (i) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=e^x$ κέντρου 0 υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^x-x-1}{x^2e^x}$

ii) (5 μονάδες) Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor κέντρου 0 η συνάρτηση $f(x)=1-e^{-2x^2}$

iii) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανάπτυγμα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(1-e^{-2x^2}\right)dx$ σε μορφή σειράς. Πόσους όρους πρέπει να κρατήσουμε ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-3};

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(a+x),\ -a<x\le a.$

i) Να υπολογιστούν οι παράγωγοι έως και $4^{ης}$ τάξης αυτής της συνάρτησης και το ανάπτυγμα Maclaurin της f μέχρι και τον πέμπτο όρο.

ii) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, να υπολογιστεί προσεγγιστικά το όριο

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t^2+3)-\ln 3}{t^2}$$

8) Αφού εκφράσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ ως το άθροισμα απείρων όρων (συγκλίνουσας) δυναμοσειράς, να προσεγγίσετε την τιμή του με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

<u>Υπόδειξη</u>: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση όρο-προς-όρο κατάλληλης σειράς Maclaurin.

9) Α) Να υπολογιστούν οι τρείς πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Maclaurin της $e^{\sinh x}$.

Β) Να υπολογιστούν οι τέσσερις πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Maclaurin της $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

1) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$i. \quad \int e^{ax}\cos(bx)dx \qquad ii. \quad \int x^2 \ln x dx \qquad iii. \quad \int \ln(x^2+1)dx$

2) Το εμβαδόν Ε του χωρίου , που ορίζεται από την καμπύλη $y(x)=\ln^2 x$, τις ευθείες $x=1$, $x=2$ και τον άξονα των x, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E=\int_1^2 \ln^2 x dx$$

Βρείτε το εμβαδόν αυτό υπολογίζοντας το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \ln^2 x dx$, με τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης (βλ. παράδειγμα στη σελ. 150 του βιβλίου) και εφαρμόζοντας μετά το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.

3) Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$y=2x-x^3, \qquad y=x^2$$

οι οποίες προφανώς τέμνονται στο σημείο (0,0) του επιπέδου (x,y). Να βρεθούν και τα άλλα σημεία στα οποία τέμνονται και να υπολογιστούν τα εμβαδά των περιοχών που περικλείονται από τις συναρτήσεις, και τα σημεία τομής τους.

4) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου μεταξύ των καμπυλών $y=\sqrt{x}$ και $y=x/2$ στο διάστημα μεταξύ των σημείων τομής τους.

5) Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα

(i) $\int \frac{x+2}{(x+1)(x-1)}dx$ (ii) $\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{x+2+\sqrt{x+2}}dx$ (iii) $\int x^2 \sin x dx$

6) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=a\cos\theta$, ή $x=a\tan\theta$, για μια κατάλληλη σταθερά α , υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{\mathrm{x}^2}{\sqrt{4-\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx}$ β) $\int \frac{\mathrm{x}^3}{\sqrt{\mathrm{x}^2+25}}\mathrm{dx}$

7) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$x=-2y^2$ και $x=1-3y^2$

8) Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής, γύρω από τον άξονα των x, του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του τόξου του κύκλου $x^2+y^2=16$ και της ευθείας $x+y=4$.

9) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που ευρίσκεται πάνω από την παραβολή $y=\frac{x^2}{2}$ και κάτω από τον κύκλο $x^2+y^2=8$. (Υπόδειξη: Ίσως χρειαστεί σε ένα ολοκλήρωμα η αντικατάσταση $x=\sqrt{8}\sin\theta$).

10) Να υπολογίσετε τα γενικευμένα ολοκληρώματα :

1. $I_1 = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$ **2.** $I_2 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ **4.** $I_4 = \int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x} dx$

11) Δίνεται η ακολουθία

$$I_n = \int_1^e x\left(\ln x\right)^n dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

α) Να υπολογίσετε τα I_0, I_1.

β) Να δείξετε την ισότητα $2I_n + nI_{n-1} = e^2$, για $n \geq 1$, και στη συνέχεια να υπολογίσετε το I_2.

12) α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(a) = \int_{-\infty}^{a} (x^2 - 3)\, e^x dx$, (χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση). Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες ισχύει $I(a) = 0$. Με την γνωστή ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδόν, πώς εξηγείτε τον μηδενισμό του $I(a)$ για αυτές τις τιμές;

β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)x}$ και εξετάστε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)x}$ συγκλίνει.
