

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια του ορίου είναι ένα ευρύ μαθηματικό ζήτημα. Πολλοί ερευνητές (π.χ. Artigue, 2001· Bezuidenhout, 2001· Cornu, 1991· Dorier, 1995) αναφέρουν ότι η έννοια του ορίου έχει σημαντικό ρόλο αφού είναι η κεντρική ιδέα της Ανάλυσης. Καθώς λοιπόν, οι μαθητές μεταβαίνουν από τα σχολικά μαθηματικά στα πιο αυστηρά τυπικά μαθηματικά, σε αυτά του Πανεπιστημίου, ο τυπικός ορισμός του ορίου χρησιμεύει ως βασικό εργαλείο, αν αναλογιστεί κανείς ότι η συνέχεια (τόσο κατά σημείο, όσο και η ομοιόμορφη), η παράγωγος, τα ολοκληρώματα, οι προσεγγίσεις της σειράς Taylor είναι μόνο μερικά από τα θέματα που βασίζονται στη κατανόηση του τυπικού ορισμού του ορίου. Αρκετές έρευνες (Bezuidenhout, 2001· Cornu, 1991· Dorier, 1995· Monaghan, 1991) έχουν διεξαχθεί με σκοπό να διερευνηθεί πώς οι πρωτοετείς φοιτητές ‘αυστηροποιούν’ τις διαισθητικές τους εικόνες, ώστε να κατανοήσουν τον τυπικό ορισμό του ορίου. Οι φοιτητές σε ένα πρώτο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης I αποκτούν εμπειρία στα όρια συναρτήσεων μιας μεταβλητής στο διακριτό πεδίο/επίπεδο και στο συνεχές. Εξαιτίας αυτού, πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την έννοια του ορίου στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, αλλά πολύ λιγότεροι έχουν ασχοληθεί με την περίπτωση των δύο μεταβλητών.

Η διατριβή αυτή, επιχειρεί να παρουσιάσει μία έρευνα που αποτελείται από δύο πειράματα που διενεργήθηκαν σε δευτεροετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Οι φοιτητές ασχολήθηκαν με εναλλακτικούς ορισμούς και προσεγγίσεις του ορίου συναρτήσεων που έχουν πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}^2$  και εικόνα στο  $\mathbb{R}$  και που ικανοποιούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες ή μόνο αναγκαίες. Ειδικότερα, στους φοιτητές δόθηκαν προβλήματα με τη μορφή test που περιλάμβαναν τη διερεύνηση της οριακής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης δυο μεταβλητών με τη χρήση διαφορετικών ορισμών και προσεγγίσεων. Θα ήταν παράλειψη να μην πούμε

ότι, οι φοιτητές ήταν η πρώτη φορά που αντιμετώπιζαν μια τέτοια κατάσταση, γεγονός που αποτέλεσε πρόκληση για αυτούς. Οι γραπτές απαντήσεις των φοιτητών αλλά και οι συνεντεύξεις μαζί τους, αναλύθηκαν ως προς τον τρόπο που αιτιολογούσαν τις επιλογές τους και ως προς τις εικόνες που σχημάτισαν για την έννοια του ορίου. Αρκετοί από τους φοιτητές που συμμετείχαν, φάνηκαν να είναι αρκετά ώριμοι στο να χειριστούν μια τέτοια κατάσταση και κατάφεραν ως ένα βαθμό να αντιπαραβάλουν τους διαφορετικούς ορισμούς και προσεγγίσεις μεταξύ τους.

Ωστόσο, άλλοι φοιτητές από τις δύο ομάδες συμμετεχόντων φάνηκε να υιοθετούν τεχνικές ‘ρουτίνας’ και δεξιότητες χειρισμού που στερούνταν εννοιολογικής βάσης. Επιπλέον, τα σχήματα που σχεδίασαν οι φοιτητές δεν εξηγήθηκαν αρκετά καλά. Παράλληλα, παρατηρήθηκαν παρανοήσεις σχετικά με το πώς αντιλαμβάνονταν τα όρια για συναρτήσεις μίας μεταβλητής, και μετέφεραν εννοιακές εικόνες από την περίπτωση αυτή στην περίπτωση των δύο μεταβλητών.

Οι παρανοήσεις των φοιτητών όσον αφορά την έννοια του ορίου, πιστεύουμε ότι οφείλονται στη ‘φύση’ αυτή καθαυτή του αντικειμένου, αλλά και στη μη αποτελεσματική διδακτική προσέγγιση, μέσω της οποίας παρουσιάζεται πολλές φορές η έννοια αυτή και οι αντίστοιχοι ορισμοί τόσο στη διδασκαλία, όσο και στην παρουσίαση σε ορισμένα εγχειρίδια. Επίσης, η γνώση που εφαρμόζεται αποτελεσματικά και εδραιώνεται στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης περιοχής γνώσης, μπορεί να αποτύχει να εφαρμοστεί ικανοποιητικά σε ένα άλλο πλαίσιο (Brousseau, 1983). Πράγματι, αυτό φαίνεται από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές όταν εξετάζουν την ύπαρξη του ορίου μια συνάρτησης δύο μεταβλητών ακόμα και εάν είναι εξοικειωμένοι με τη συγκεκριμένη έννοια στην περίπτωση της μίας μεταβλητής.