ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ: Μελέτη στατιστικών και $\mathcal{I}$-συγκλίσεων σε τοπολογικούς χώρους

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Πρίνος

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γεωργίου Δημήτριος (Καθηγητής, Επιβλέπων)

Ζαφειρίδου Σοφία (Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής)

Ταχτσής Ελευθέριος (Αναπληρωτής Καθηγητής, Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ:

Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{C}$ μια κλάση που αποτελείται από τριάδες $((s_d)_{d\in D}, x, \mathcal{I})$, όπου $(s_d)_{d\in D}$ είναι δίκτυο στο X, $x \in X$ και $\mathcal{I}$ είναι ιδεώδες του κατευθυνόμενου συνόλου D. Καθορίζουμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια τέτοια κλάση και την ονομάζουμε κλάση ιδεώδους σύγκλισης, προκειμένου να υπάρχει μια τοπολογία τ στο X που να ικανοποιεί την ακόλουθη ισοδυναμία: το δίκτυο $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$-συγκλίνει $(\mathcal{C})$ στο $x \in X$, όπου $\mathcal{I}$ είναι D-αποδεκτό ιδεώδες του D, αν και μόνο αν το $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$-συγκλίνει στο x, ως προς την τοπολογία τ.

Εισάγουμε την έννοια της κλάσης ημι-σύγκλισης στο X για να δώσουμε μια νέα εκδοχή του κλασικού θεωρήματος του Kelley, για τις κλάσεις σύγκλισης δικτύων. Επίσης, εισάγουμε την έννοια της κλάσης ιδεώδους ημι-σύγκλισης $\mathcal{C}'$ στο X προκειμένου να εξασφαλίσουμε μια εκδοχή του θεωρήματος του Kelley, σε σχέση με την $\mathcal{I}$-σύγκλιση δικτύων. Συγκεκριμένα, επισημαίνουμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια τέτοια κλάση ώστε να υπάρχει μοναδική τοπολογία τ στο X τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ισοδυναμία: το δίκτυο $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$-ημι-συγκλίνει $(\mathcal{C}')$ στο $x \in X$, όπου $\mathcal{I}$ είναι ιδεώδες του D, αν και μόνο αν το $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$-συγκλίνει στο x, ως προς την τοπολογία τ.

Εισάγουμε και μελετάμε την έννοια της ιδεώδους-order-σύγκλισης σε posets. Εισάγουμε τοπολογίες σε posets και εξετάζουμε τις ιδιότητές τους. Χαρακτηρίζουμε τα posets στα οποία η ιδεώδης-order-σύγκλιση είναι τοπολογική. Στη συνέχεια, εξετάζουμε μια ασθενέστερη μορφή της ιδεώδους-order-σύγκλισης, που ονομάζεται ιδεώδης-o_2-σύγκλιση.

Χρησιμοποιούμε την εκδοχή του θεωρήματος του Kelley, για την $\mathcal{I}$-σύγκλιση δικτύων, αλλά και συγκεκριμένα ανοικτά σύνολα της o_2-τοπολογίας για να δώσουμε εναλλακτικές αποδείξεις ότι η ιδεώδης-o_2-σύγκλιση σε ένα poset είναι τοπολογική αν και μόνο αν το poset είναι O_2-διπλά συνεχές. Επίσης εισάγουμε και μελετάμε την ιδεώδη-lim-inf-σύγκλιση σε poset. Διαπιστώνουμε τη σύμπτωση μεταξύ της επαγόμενης ιδεώδους-lim-inf τοπολογίας, της lim-inf τοπολογίας και της τοπολογίας Scott και αποδεικνύουμε ότι η ιδεώδης-lim-inf-σύγκλιση είναι τοπολογική αν και μόνο αν το poset είναι συνεχές.

Δίνουμε νέους χαρακτηρισμούς για τα στατιστικά εσωτερικά και εξωτερικά όρια, ακολουθιών κλειστών συνόλων σε μετρικούς χώρους, τα οποία γενικεύουν τα συμβατικά Painleve-Kuratowski εσωτερικά και εξωτερικά όρια. Επίσης, παρέχουμε κριτήρια για τον έλεγχο των Wijsman και Hausdorff στατιστικών συγκλίσεων και εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ των Kuratowski και Wijsman στατιστικών συγκλίσεων. Τέλος, εισάγουμε και μελετάμε την έννοια της στατιστικά Cauchy ακολουθίας, ως προς την «εκτεταμένη» μετρική Hausdorff h.

TITLE OF THESIS: A study of statistical and $\mathcal{I}$-convergences in topological spaces

FULL NAME: George Prinos

THREE-MEMBER ADVISORY COMMITTEE:
Georgiou Dimitrios (Professor, Supervisor)
Zafeiridou Sophia (Associate Professor, Member of the Advisor Committee)
Tachtsis Eleftherios (Associate Professor, Member of the Advisor Committee)

ABSTRACT:

Let X be a non-empty set and $\mathcal{C}$ be a class consisting of triads $((s_d)_{d\in D}, x, \mathcal{I})$, where $(s_d)_{d\in D}$ is a net in X, $x \in X$ and $\mathcal{I}$ is an ideal of the directed set D. We define the properties that such a class must have and call it an ideal convergence class in order to exists a topology τ on X that satisfies the following equivalence: a net $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$ - converges ($\mathcal{C}$) to $x \in X$, where $\mathcal{I}$ is a D-admissible ideal of D, if and only if $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$ - converges to x, with respect to the topology τ.

We introduce the concept of the semi-convergence class to X in order to give a new version of the classical Kelley's theorem for convergence classes of nets. We also introduce the concept of the ideal semi-convergence class $\mathcal{C}'$ on X in order to provide a version of the theorem Kelley, relative to the $\mathcal{I}$ -convergence of nets. Specifically, we denote the properties that such a class must have in order to exists a unique topology τ on X such that the equivalence is satisfied: a net $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$-semi-converges ($\mathcal{C}'$) in $x \in X$, where $\mathcal{I}$ is an ideal of D, if and only if $(s_d)_{d\in D}$ $\mathcal{I}$ - converges at x, with respect to the topology τ.

We introduce and study the concept of the ideal-order-convergence to posets. We import topologies into posets and examine their properties. We characterize posets in which the ideal-order-convergence is topological. Next, we look at a weaker form of the ideal-order-convergence, called ideal-o_2-convergence.

We use the version of Kelley's theorem, for $\mathcal{I}$-convergence of nets, and specific open sets of the o_2-topology to provide alternative proofs that the ideal o_2-convergence in a poset is topological if and only if the poset is O_2-doubly continuous. We also introduce and study the ideal-lim-inf-convergence in posets. We establish the coincidence between the induced ideal-lim-inf topology, the lim-inf topology and the Scott topology and prove that the ideal-lim-inf-convergence is topological if and only if the poset is continuous.

We give new characterizations for the statistical inner and outer limits, of sequences of closed sets in metric spaces, which generalize the conventional Painleve-Kuratowski inner and outer limits. We also provide criteria for checking the Wijsman and Hausdorff statistical convergences, and examine the relation between Kuratowski and Wijsman statistical convergences. Finally, we introduce and study the concept of statistical Cauchy sequence, in terms of the "extended" Hausdorff metric h.