

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ: Μελέτη της θεωρίας διαστάσεων στην περιοχή των τοπολογικών χώρων και των δικτυωτών

Ονοματεπώνυμο: Φωτεινή Σερέτη

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γεωργίου Δημήτριος (Καθηγητής, Επιβλέπων)

Ζαφειρίδου Σοφία (Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής)

Ταχτσής Ελευθέριος (Αναπληρωτής Καθηγητής, Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ:

Αντικείμενο μελέτης της διδακτορικής διατριβής αποτελούν οι διαστάσεις τοπολογικών χώρων και μερικώς διατεταγμένων συνόλων (partially ordered sets ή συνηθέστερα, posets), οι χαρακτηρισμοί αυτών με πίνακες και η έννοια της καθολικότητας σε κλάσεις frames και κλάσεις βάσεων για frames οι οποίες προσδιορίζονται από έννοιες διαστάσεων.

Ειδικότερα, ορίζουμε μία νέα τοπολογική διάσταση, την quasi διάσταση κάλυψης, \dim_q , μέσα από την έννοια της quasi κάλυψης ενός τοπολογικού χώρου. Αποδεικνύουμε ότι η \dim_q είναι μεγαλύτερη ή ίση της κλασικής διάστασης κάλυψης, \dim , και παρουσιάζουμε παραδείγματα τοπολογικών χώρων, προσδιορίζοντας τόσο τη διάσταση \dim_q όσο και τη διάσταση \dim αυτών. Επίσης, αποδεικνύουμε μία πληθώρα ιδιοτήτων της διάστασης \dim_q , όπως, για παράδειγμα, το θεώρημα υποχώρου, το θεώρημα αθροίσματος και το θεώρημα συμπαγοποίησης.

Στη συνέχεια, μελετάμε το Πρόβλημα Καθολικότητας, το οποίο έγκειται στην εύρεση καθολικών τοπολογικών χώρων (αντίστοιχα, καθολικών frames) σε διάφορες κλάσεις τοπολογικών χώρων (αντίστοιχα, κλάσεις frames). Αποδεικνύουμε ότι στην κλάση όλων των κανονικών frames που έχουν βάρος μικρότερο ή ίσο ενός πληθαρύθμου τ και μικρή επαγωγική διάσταση, $frind$, μικρότερη ή ίση ενός διατακτικού αριθμού α , υπάρχουν καθολικά στοιχεία. Η μελέτη αυτή επιτυγχάνεται με τον ορισμό και τη μελέτη μίας νέας διάστασης για frames, την οποία καλούμε μικρή επαγωγική διάσταση, $frind$, και της έννοιας της κορεσμένης κλάσης frames.

Συνεχίζοντας την ερευνητική μελέτη του Προβλήματος Καθολικότητας σε κλάσεις frames, ορίζουμε νέες, για τη θεωρία των frames, έννοιες, όπως της κλάσης βάσεων, της κορεσμένης κλάσης βάσεων, του καθολικού στοιχείου για κλάσεις βάσεων καθώς, επίσης, την έννοια της διάστασης βάσης του τύπου της μικρής επαγωγικής διάστασης $frind$. Βασιζόμενοι στις παραπάνω έννοιες, αποδεικνύουμε ότι σε κλάση βάσεων για frames, η οποία προσδιορίζεται από τη νέα διάσταση βάσης, υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Επίσης, μελετάμε την order-διάσταση πεπερασμένων μερικώς διατεταγμένων συνόλων μέσα από πίνακες. Ειδικότερα, σε κάθε πεπερασμένο poset (X, \leq) προσαρτάμε τον λεγόμενο order-πίνακα \mathbf{A}_X^{\leq} . Μελετάμε ιδιότητες αυτού του πίνακα και χαρακτηρίζουμε τις γραμμικές επεκτάσεις της μερικής διάταξης \leq και την order-διάσταση του X χρησιμοποιώντας τους order-πίνακες. Τέλος, βασιζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα, δίνουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της order-διάστασης ενός τυχαίου πεπερασμένου poset.

Επιπλέον, μελετάμε τη διάσταση κάλυψης πεπερασμένων δικτυωτών μέσα από πίνακες. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε τις έννοιες των minimal καλύψεων και της τάξης αυτών μέσα από order-πίνακες και πίνακες πρόσπτωσης. Δίνουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος προσδιορίζει το σύνολο των minimal καλύψεων σε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο δικτυωτό και βασιζόμενοι

σε αυτή τη μελέτη δίνουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει τη διάσταση κάλυψης ενός τυχαίου πεπερασμένου δικτυωτού. Η μελέτη αυτής της διάστασης ολοκληρώνεται παρουσιάζοντας αλγορίθμους οι οποίοι υπολογίζουν τη διάσταση κάλυψης του γραμμικού αθροίσματος και του λεξικογραφικού γινομένου δύο οποιονδήποτε πεπερασμένων δικτυωτών.

Το ερευνητικό μέρος αυτής της διατριβής ολοκληρώνεται με τη μελέτη της Krull-διάστασης πεπερασμένων επιμεριστικών δικτυωτών μέσα από join-πρώτα στοιχεία, πρώτα φίλτρα, κύρια φίλτρα, order-πίνακες και πίνακες πρόσπτωσης. Περιγράφονται νέοι χαρακτηρισμοί αυτών των εννοιών μέσα από αυτούς τους πίνακες και δίνονται ένας αλγόριθμος προσδιορισμού του συνόλου των join-πρώτων στοιχείων σε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο δικτυωτό και ένας αλγόριθμος υπολογισμού του ύψους πεπερασμένων posets. Βάσει όλων αυτών των αποτελεσμάτων επιτυγχάνεται ο υπολογισμός της Krull-διάστασης για ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό μέσα από πίνακες.

TITLE OF THESIS: A study of dimension theory in the field of topological spaces and lattices

FULL NAME: Foteini Sereti

THREE-MEMBER ADVISORY COMMITTEE:

Georgiou Dimitrios (Professor, Supervisor)

Zafeiridou Sophia (Associate Professor, Member of the Advisor Committee)

Tachtsis Eleftherios (Associate Professor, Member of the Advisor Committee)

ABSTRACT:

The study of dimensions of topological spaces and partially ordered sets (usually, posets), the characterizations of those dimensions using matrices and the notion of universality in classes of frames and classes of bases for frames which are determined by meanings of dimensions are the subjects of the doctoral thesis.

Especially, we define a new topological dimension, called quasi covering dimension, \dim_q , using the notion of the quasi cover of a topological space. We prove that \dim_q is greater than or equal to the classical covering dimension, \dim , and we present examples of topological spaces, computing their \dim_q and \dim . Also, we prove many properties of the dimension \dim_q such as the theorem of subspace, the addition theorem and the compactification theorem.

Afterwards, we study the Universality Problem, which focuses on finding universal topological spaces (respectively, universal frames) in various classes of topological spaces (respectively, classes of frames). We prove that in the class of all regular frames with weight less than or equal to a cardinal τ and small inductive dimension, $frind$, less than or equal to an ordinal α , there exist universal elements. This study is succeeded by defining and studying a new dimension for frames, which is called small inductive dimension. $frind$, and the notion of saturated class of frames.

Continuing with the research of the Universality Problem in classes of frames, we define new notions for the theory of frames such as the notions of classes of bases, the saturated class of bases, the universal element for classes of bases and the notion of base dimension-like function of the type of the small inductive dimension $frind$. Based on the above notions, we prove that in a class of bases for frames, which is determined by the new base dimension, there exist universal elements.

Also, we study the order-dimension of finite partially ordered sets with matrices. Especially, in every finite poset (X, \leq) , we assign a matrix, called order-matrix, \mathbf{A}_X^{\leq} . We study properties of this matrix and we characterize the linear extensions of the partial order \leq and the order-dimension of X using the order-matrices. Finally, based on the above results, we give an algorithm which computes the order-dimension of an arbitrary finite poset.

Moreover, we study the covering dimension of finite lattices. In particular, we study the notions of minimal covers and their order using order and incidence matrices. We give an algorithm which finds the set of all minimal covers of an arbitrary finite lattice and based on this study we give an algorithm which computes the covering dimension of an arbitrary finite lattice. This study is completed by presenting algorithms which compute the covering dimension of the linear sum and the lexicographic product of two arbitrary finite lattices.

The investigation of this thesis is completed by the study of the Krull-dimension of finite distributive lattices through join-prime elements, prime filters, principal filters, order-matrices and incidence matrices. New characterizations of these notions through these matrices are given and an algorithm which finds the set of all join-prime elements of an arbitrary finite lattice and an algorithm for computing the height of finite posets are provided. Based on the above results, we succeed a computing of the Krull-dimension for an arbitrary finite distributive lattice through matrices.